УДК 517.512

С. Б. Вакарчук, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т геотехн. механики АН Украины, Днепропетровск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО НЕКОТОРОЙ ОБОБЩЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Для классов аналитических функций, определенных при помощи 2-мерной композиции Адамара, предложен метод восстановления линейных функционалов на основании блендинговых конструкций; указаны наилучшие методы восстановления, найдены точные оценки погрешности.

Для класів аналітичних функцій, означених за допомогою 2-вимірної композиції Адамара, запропоновано метод відновлення лінійних функціоналів на основі блендінгових конструкцій; вказані найкращі методи відновлення, знайдені точні оцінки похибки.

Задача о нахождении оптимального метода восстановления функционалов и возникающей при этом погрешности была рассмотрена в общем виде в работах С. А. Смоляка [1] и Н. С. Бахвалова [2]. В одномерном случае конкретные решения удалось получить как для вещественных (см., например, [3 – 6]), так и для аналитических (см., например, [7, 8]) функций. Что касается многомерного случая, то неизвестны не только наилучшие методы восстановления, но и точные порядковые оценки погрешности аппроксимации [9].

Использование блендинговых (blending) конструкций в [10, 11] и дальнейшее развитие данной идеи в [12] позволили указать наилучшие методы восстановления и найти точные оценки погрешности на рассматриваемых классах функций нескольких вещественных переменных. В настоящей статье подход автора [12] применен к решению сформулированной в заглавии задачи на некоторых классах аналитических функций двух комплексных переменных, определенных при помощи композиций Адамара и обобщающих ряд известных функциональных множеств.

1. Пусть заданы множество $\mathfrak{M}$ из комплексного линейного пространства X и множество $n+1$ линейных функционалов $\Lambda(f), \Lambda_1(f), \ldots, \Lambda_n(f)$, определенных на $\mathfrak{M}$. Рассмотрим задачу о построении метода S для приближенного восстановления значения $\Lambda(f)$ на основании информации $T(f) = \{\Lambda_1(f), \ldots, \Lambda_n(f)\}$ о функции f; через $S[T(f)]$ обозначим приближенные значения $\Lambda(f)$ [1, 2].

Полагаем $R(f, S, \Lambda) \overset{\text{df}}{=} |\Lambda(f) - S[T(f)]|$. Величину $R(\mathfrak{M}, S, L) = \sup\{R(f, S, \Lambda): f \in \mathfrak{M}\}$ называют погрешностью метода S на множестве $\mathfrak{M}$. Далее обозначаем $R(\mathfrak{M}, \Lambda) \overset{\text{df}}{=} \inf R(\mathfrak{M}, S, \Lambda)$, где точная нижняя грань берется по всевозможным методам востановления S, которые используют информацию $T(f)$. Метод восстановления S^* называют оптимальным, если для него справедливо равенство $R(\mathfrak{M}, S^*, \Lambda) = R(\mathfrak{M}, \Lambda)$.

Пусть X^1 — некоторое пространство функций, аналитических в односвязной области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а Λ_1 и Λ_2 — линейные функционалы, определенные на нем. Полагаем $\Omega^2 \overset{\text{df}}{=} \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{C}^2$, где Ω_j — область Ω, выделенная в плоскости $\mathbb{C}_j$ комплексной переменной $z_j = x_j + i y_j$, $j = 1, 2$; операция $A \times B$ является декартовым произведением множеств A и B; $\mathbb{C}^2 \overset{\text{df}}{=} \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$. Обозначим через X^2 двухмерный аналог пространства X^1, т. е. множество функций $f(z_1, z_2)$, аналитических в области Ω^2 и подчиненных ряду условий, которые являются распространением на двухмерный случай соответствующих требований, налагаемых на все элементы из X^1.

Всюду в дальнейшем под $\Lambda_1^{z_1}$ (соответственно $\Lambda_2^{z_2}$) понимаем линейный оператор, который является результатом действия на $f(z_1, z_2) \in X^2$ линейного функционала $\Lambda_1(\Lambda_2)$ как на функцию от $z_1(z_2)$ при фиксированном $z_2(z_1)$. Из этого следует, что в ходе последовательного применения к $f(z_1, z_2)$ $\Lambda_1^{z_1}$ и $\Lambda_2^{z_2}$ получим некоторый линейный функционал $\Lambda(f)$, определенный на X^2. При этом полагаем $\Lambda(f) = \Lambda_1^{z_1}[\Lambda_2^{z_2}(f)] = \Lambda_2^{z_2}[\Lambda_1^{z_1}(f)]$.

Для аналитической функции $f(z_1, z_2)$ из некоторого класса $\mathfrak{M}^2 \subset X^2$ рассмотрим два множества одномерных аналитических функций $T_1^{z_1}(f)$ и $T_2^{z_2}(f)$, зависящих соответственно от переменных z_1 и z_2:

$$T_1^{z_1}(f) \equiv \left\{\Lambda_{1,k}^{z_1}(f)\right\}_{k=1}^{n_1}, \; T_2^{z_2}(f) \equiv \left\{\Lambda_{2,l}^{z_2}(f)\right\}_{l=1}^{n_2}. \qquad (1)$$

Здесь $\Lambda_{1,k}^{z_1}$, $k = \overline{1, n_1}$, и $\Lambda_{2,l}^{z_2}$, $l = \overline{1, n_2}$, — линейные функционалы. Использовав (1), введем по аналогии с [12] обобщенную информацию о функции $f \in \mathfrak{M}^2$ в виде набора линейных функционалов

$$T(f) \equiv \left\{\left\{\Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_2^{z_2}(f)\right]\right\}_{k=1}^{n_1}, \left\{\Lambda_{2,l}^{z_2}\left[\Lambda_1^{z_1}(f)\right]\right\}_{l=1}^{n_2}, \left\{\Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_{2,l}^{z_2}(f)\right]\right\}_{k=1,\, l=1}^{n_1,\, n_2}\right\}. \qquad (2)$$

При этом

$$\Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_2^{z_2}(f)\right] = \Lambda_2^{z_2}\left[\Lambda_{1,k}^{z_1}(f)\right], \; \Lambda_{2,l}^{z_2}\left[\Lambda_1^{z_1}(f)\right] = \Lambda_1^{z_1}\left[\Lambda_{2,l}^{z_2}(f)\right],$$

$$\Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_{2,l}^{z_2}(f)\right] = \Lambda_{2,l}^{z_2}\left[\Lambda_{1,k}^{z_1}(f)\right], \; k = \overline{1, n_1}; \; l = \overline{1, n_2}.$$

Обозначим через $U^1 = \{z: |z| < 1\}$, $U^2 = \{(z_1, z_2): |z_k| < 1, k = 1, 2\}$ и $T^2 = \{(z_1, z_2): |z_k| = 1, k = 1, 2\}$ соответственно единичный круг в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$ и тор в $\mathbb{C}^2$.

Всюду далее $X^1(X^2)$ — пространство Харди $H^p(U^1)(H^p(U^2))$, $p \geq 1$, аналитических в $U^1(U^2)$ функций $f(z)$ $(f(z_1, z_2))$, которые удовлетворяют условию

$$\|f\|_{p,1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\exp(it))\right|^p dt\right\}^{1/p} < \infty,$$

$$\left(\|f\|_{p,2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\exp(it_1), \exp(it_2))\right|^p dt_1\, dt_2\right\}^{1/p} < \infty\right).$$

2. Определим функциональные классы, необходимые нам в дальнейшем. Пусть $f(z_1, z_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{k,l}\, z_1^k z_2^l$ и $F(z_1, z_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \beta_{k,l}\, z_1^k z_2^l$ аналитичны в U^2; $D(F, f) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{k,l}\, \beta_{k,l}\, z_1^k z_2^l$ — их композиция Адамара [13, 14].

Если $f \in H^1(U^2)$, то, как и в одномерном случае,

$$D(F, f)(z_1, z_2) = (2\pi i)^{-2}\int_{T^2} f(t_1, t_2) F(z_1 \bar{t}_1, z_2 \bar{t}_2)\bar{t}_1 \bar{t}_2 dt_1 dt_2, \; (z_1, z_2) \in U^2,$$

где $f(t_1, t_2)$ — существующие почти всюду на T^2 угловые граничные значения $f(z_1, z_2)$. Всюду далее полагаем

$$F_{m_1, m_2}(z_1, z_2) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(z_1, z_2) = F_{m_1}(z_1) F_{m_2}(z_2), \qquad (3)$$

где $F_{m_j}(z_j) = \sum_{k=m_j}^{\infty} b_{k,j}\, z_j^k$ $(b_{k,j} \neq 0,\ k = m_j, m_j + 1, \ldots;\ m_j \geq 0)$, $j = 1, 2$, — аналитические в единичном круге функции, удовлетворяющие условиям $\lim_{k\to\infty} b_{k,j} = \infty$, $\lim_{k\to\infty} |b_{k,j}|^{1/k} = 1$. При этом коэффициенты Тейлора $F_{m_1,m_2}(z_1, z_2)$ равны $\beta_{k,l} = b_{k,1}\, b_{l,2}$ $(k \ge m_1; l \ge m_2)$.

Функции $F_{m_j}(z)$, $j = 1, 2$, называют допустимыми в единичном круге U^1 [15], если при всех $\rho < 1$, $|\tau| \le \pi$ и $n \ge m_j$

$$1/2 + \operatorname{Re}\left[b_{n,j} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k,j}^{-1} \rho^k \exp(ik\tau)\right] \ge 0.$$

Будем говорить, что функция (3) допустима в U^2, если $F_{m_1}(z)$ и $F_{m_2}(z)$ допустимы в U^1. Символом $F_{m_1,m_2}H^p(U^2)$, где $p \ge 1$, $F_{m_1,m_2}(z_1, z_2)$ — допустимая функция, обозначим множество элементов $f(z_1, z_2) \in H^p(U^2)$, для которых $D(F_{m_1,m_2}; f) \in H^p(U^2)$, $\| D(F_{m_1,m_2}; f)\|_{p,2} \le 1$.

Пусть функция $F_{m_j}(z)$ допустима в круге U^1. Полагая для аналитической в U^1 функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ $D(F_{m_j}, f)(z) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=m_j}^{\infty} b_{k,j} c_k z^k$, под $F_{m_j}H^p(U^1)$ будем понимать множество элементов $f(z) \in H^p(U^1)$, которые удовлетворяют условиям $D(F_{m_j}, f) \in H^p(U^1)$ и $\| D(F_{m_j}, f)\|_{p,1} \le 1$. Операцию $D(F_{m_j}, \cdot)$ называют еще обобщенным дифференцированием [14].

Записав, например, $F_{m_j}(z) = \sum_{k=m_j}^{\infty} k!\, z^k/(k-m_j)!$, $j = 1, 2$, видим, что класс $F_{m_j}H^p(U^1)$ совпадает с множеством функций $f(z) \in H^p(U^1)$, у которых производные $d^{m_j} f(z)/dz^{m_j} = z^{-m_j} D(F_{m_j}, f)(z) \in H^p(U^1)$ ограничены по норме $\|\cdot\|_{p,1}$ единицей. В рассматриваемом случае класс $F_{m_1,m_2}H^p(U^2)$ совпадает с множеством элементов $f(z_1, z_2) \in H^p(U^2)$, у которых смешанные производные $f^{(m_1,m_2)}(z_1, z_2) \overset{\text{df}}{=} d^{m_1+m_2} f(z_1, z_2)/dz_1^{m_1} dz_2^{m_2} = z_1^{-m_1} z_2^{-m_2} D(F_{m_1,m_2}; f)(z_1, z_2) \in H^p(U^2)$ удовлетворяют неравенству $\|f^{(m_1,m_2)}\|_{p,2} \le 1$. Таким образом, при некоторых значениях определяющих параметров $\{b_{k,j}\}$ классы $F_{m_j}H^p(U^1)$, $j = 1, 2$, и $F_{m_1,m_2}H^p(U^2)$ могут совпадать с некоторыми хорошо изученными множествами аналитических функций. В то же время использование операции обобщенного дифференцирования [14] и ее многомерного аналога [13] при определении функциональных классов позволяет учесть такие свойства функций, отразить которые в терминах известных классов не представляется возможным [15].

Пусть $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2$, — множества последовательностей комплексных чисел $L_j \overset{\text{df}}{=} \{\lambda_{j,k}\}_{k=1}^{n_j}$, $n_j \ge m_j$, и для любой $f \in F_{m_j}H^p(U^1)$ погрешность восстановления функционала $\Lambda_j(f)$ линейным методом $S[T_j(f)] = S(\Lambda_{j,1}(f); \ldots; \Lambda_{j,n_j}(f)) = \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k}\Lambda_{j,k}(f)$ имеет интегральное представление

$$E(\Lambda_j(f), T_j, L_j) \overset{\text{df}}{=} \Lambda_j(f) - \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k}\Lambda_{j,k}(f) = $$
$$= (1/2\pi i)\int_{|t|=1} D(F_{m_j}, f)(t)\, Q(L_j, \Lambda_j, t)\, \bar{t}\, dt. \tag{4}$$

Далее полагаем, что при выполнении соотношения (4)

$$R(F_{m_j}H^p(U^1), \Lambda_j) = \inf\{\|Q(L_j, \Lambda_j, \cdot)\|_{p',1} : L_j \in \mathcal{L}_j\}, \tag{5}$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Отметим, что выражения вида (4) и соотношения типа (5) возникают, например, при решении различного рода задач восстановления значений аналитических в круге функций $f(z)$ (см., например, [7] и следующий п. 3).

Теорема 1. *Если для каждого линейного функционала* $\Lambda_j, j = 1, 2$, *справедливы формулы* (4), (5), *то для функционала* $\Lambda(f) = \Lambda_1^{z_1}\left[\Lambda_2^{z_2}(f)\right]$, *восстанавливаемого по информации* (2), *справедливо равенство*

$$R(F_{m_1, m_2} H^p(U^2), \Lambda) = R(F_{m_1} H^p(U^1), \Lambda_1)\, R(F_{m_2} H^p(U^1), \Lambda_2).$$

Доказательство. Для получения оценки сверху запишем

$$R(F_{m_1, m_2} H^p(U^2), \Lambda) \le \inf_{\{\lambda_{j,k}\}_{k=1}^{n_j}} \sup_{f \in F_{m_1, m_2} H^p(U^2)} \Big| \Big(\Lambda_1^{z_1}(\cdot) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \lambda_{1,k} \Lambda_{1,k}^{z_1}(\cdot)\Big) \Big(\Lambda_2^{z_2}(f) - \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_{2,l} \Lambda_{2,l}^{z_2}(f)\Big)\Big|, \tag{6}$$

где $\Lambda(\cdot)(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda(f)$. Используя (4), (5), из (6) получаем

$$R(F_{m_1, m_2} H^p(U^2), \Lambda) \le \inf_{\substack{L_j \in \mathcal{L}_j \\ (j=1,2)}} \sup_{f \in F_{m_1, m_2} H^p(U^2)} \frac{1}{4\pi^2} \Big| \int_{T^2} D(F_{m_1, m_2}; f)(t_1, t_2) \times$$

$$\times\, Q(L_1, \Lambda_1^{z_1}, t_1)\, Q(L_2, \Lambda_2^{z_2}, t_2)\, \bar{t}_1 \bar{t}_2 \, dt_1\, dt_2 \Big|. \tag{7}$$

Применяя к правой части (7) неравенство Гельдера и учитывая (5), имеем

$$R(F_{m_1, m_2} H^p(U^2), \Lambda) \le \inf_{\substack{L_j \in \mathcal{L}_j \\ (j=1,2)}} \|Q(L_1, \Lambda_1^{z_1}, \cdot)\|_{p',1} \|Q(L_2, \Lambda_2^{z_2}, \cdot)\|_{p',1} =$$

$$= R(F_{m_1} H^p(U^1), \Lambda_1)\, R(F_{m_2} H^p(U^1), \Lambda_2). \tag{8}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим класс аналитических в U^2 функций $\overline{F_{m_1, m_2} H^p(U^2)} = F_{m_1} H^p(U^1) \otimes F_{m_2} H^p(U^1) = \{f(z_1, z_2) \in H^p(U^2) : f = f_1(z_1) \times f_2(z_2), f_j \in F_{m_j} H^p(U^1), j = 1, 2\}$. Поскольку $\overline{F_{m_1, m_2} H^p(U^2)} \subset F_{m_1, m_2} H^p(U^2)$, то на основании [1, 2, 7] запишем

$$R(F_{m_1, m_2} H^p(U^2), \Lambda) \ge R(\overline{F_{m_1, m_2} H^p(U^2)}, \Lambda) = \sup\{\Lambda(f) : f \in$$

$$\in \overline{F_{m_1, m_2} H^p(U^2)};\ \Lambda_{1,k}^{z_1}(f_1) = 0,\ k = \overline{1, n_1};\ \Lambda_{2,l}^{z_2}(f_2) = 0,\ l = \overline{1, n_2}\} =$$

$$= R(F_{m_1} H^p(U^1), \Lambda_1)\, R(F_{m_2} H^p(U^1), \Lambda_2). \tag{9}$$

Утверждение теоремы получаем из сравнения неравенств (8) и (9).

Следствие. *Пусть выполнено условие теоремы* 1 *и*

$$\sup_{f \in F_{m_j} H^p(U^1)} |\Lambda_j(f) - \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k}^* \Lambda_{j,k}(f)| = R(F_{m_j} H^p(U^1), \Lambda_j), j = 1, 2.$$

Тогда метод

$$S_*[T(f)] = \sum_{k=1}^{n_1} \lambda_{1,k}^* \ \Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_2^{z_2}(f)\right] + \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_{2,l}^* \ \Lambda_{2,l}^{z_2}\left[\Lambda_1^{z_1}(f)\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_{1,k}^* \ \lambda_{2,l}^* \ \Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_{2,l}^{z_2}(f)\right]$$

является оптимальным методом восстановления функционала $\Lambda(f)$ *по информации* $T(f)$ *вида* (2).

3. Для иллюстрации результатов п. 2 рассмотрим вопрос о восстановлении значения $f \in F_{m_1, m_2} H^{\infty}(U^2)$ в произвольной точке $(z_1, z_2) \in U^2$ по информации $T_*(f)$, имеющей вид

$$\varphi_{k-1}(f, z_2) = \Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_2^{z_2}(f)\right] = (1/2\pi i)\int_{|t|=1} f(t, z_2)\, t^{-k}\, dt, \qquad (10)$$

$$\psi_{l-1}(f, z_1) = \Lambda_{2,l}^{z_2}\left[\Lambda_1^{z_1}(f)\right] = (1/2\pi i)\int_{|t|=1} f(z_1, t)\, t^{-l}\, dt, \qquad (11)$$

$$c_{k-1, l-1}(f) = \Lambda_{1,k}^{z_1}\left[\Lambda_{2,l}^{z_2}(f)\right] = (1/2\pi i)^2 \int_{T^2} f(t_1, t_2)\, t_1^{-k} t_2^{-l}\, dt_1 dt_2, \qquad (12)$$

$$k = \overline{1, n_1}\,;\; l = \overline{1, n_2}\,.$$

Иными словами на основании $T_*(f)$ требуется приближенно вычислить функционал $\Lambda(f) = \Lambda_1^{z_1}\left[\Lambda_2^{z_2}(f)\right] = f(z_1, z_2)$ для $f \in F_{m_1, m_2} H^{\infty}(U^2)$. Как следует из п. 2, вначале необходимо на классе $F_{m_j} H^{\infty}(U^1)$ решить задачу об оптимальном восстановлении функционала $\Lambda(f) = f(z)$, $z \in U^1$, по информации $c_{k-1}(f) = \Lambda_k(f) = (2\pi i)^{-1} \int_{|t|=1} f(t) t^{-k}\, dt$, $k = \overline{1, n_j}$, где $c_k(f)$ — коэффициенты Тейлора функции $f(z) \in H^{\infty}(U^1)$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\Lambda_j(f) = f(z_j)$, $|z_j| = \rho_j < 1$, *и вектор информации* $\tilde{T}_j(f) = \{c_0(f), c_1(f), \ldots, c_{n_j-1}(f)\}$, $n_j \ge m_j$. *Тогда* $R(F_{m_j} H^{\infty}(U^1), \Lambda_j) = |b_{n_j, j}|\, \rho_j^{n_j}$, *и метод* $S^*\left[\tilde{T}_j(f)\right] = \sum_{k=0}^{n_j-1} \lambda_{j,k}^* c_k(f)$, *где* $\lambda_{j,k}^* = \{1$, *если* $k = 0, 1, \ldots, m_j - 1$; $1 - b_{k,j}\, \bar{b}_{n_j, j}\, \rho^{2(n_j - k)} / (b_{n_j, j}\, \bar{b}_{2n_j - k, j})$, *если* $k = m_j, m_j + 1, \ldots, n_j - 1\}$, *является оптимальным среди методов восстановления значения* $f(z)$ *по информации* $\tilde{T}_j(f)$.

Действительно, как следует из [15], для произвольной функции $f(z) \in F_{m_j} H^{\infty}(U^1)$ можно убедиться в справедливости равенства

$$E(\Lambda_j(f), \tilde{T}_j, L_j) = (2\pi i)^{-1} \int_{|t|=1} D(F_{m_j} f)(t)\, \tilde{Q}(L_j, \Lambda_j, t)\, \bar{t}\, dt,$$

где

$$\tilde{Q}(L_j, \Lambda_j, t) \overset{\mathrm{df}}{=} (z\bar{t})^{n_j} \left\{ \sum_{k=m_j}^{n_j-1} (1 - \lambda_{j,k}) b_{k,j}^{-1} (z\bar{t})^{k-n_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n_j}^{\infty} b_{k,j}^{-1} (z\bar{t})^{k-n_j} + \bar{b}_{n_j, j}\, b_{n_j, j}^{-1} \sum_{k=2n_j+1-m_j}^{\infty} \bar{b}_{k,j}^{-1} (\bar{z} t)^{k-n_j} \right\},$$

а также в справедливости соотношения

$$R(F_{m_j} H^{\infty}(U^1), \Lambda_j) \le \inf\{\, \|\tilde{Q}(L_j, \Lambda_j, \cdot)\|_{1,1} : L_j \in \mathcal{L}_j \} =$$

$$= \|\tilde{Q}(L_j^*, \Lambda_j, \cdot)\|_{1,1} = \left| b_{n_j, j}^{-1} \right| \rho_j^{n_j}.$$

Здесь $L_j^* \overset{\mathrm{df}}{=} \{\lambda_{j,k}^*\}_{k=0}^{n_j-1}$. Используя [7] и то, что $f_0(z) = b_{n_j, j}^{-1} z^{n_j}$ принадлежит $F_{m_j} H^{\infty}(U^1)$, получаем

$$R(F_{m_j}H^{\infty}(U^1), \Lambda_j) = \sup\{|\Lambda_j(f)| : f \in F_{m_j}H^{\infty}(U^1)\} \geq |\Lambda_j(f_0)| = \left|b_{n_j,j}^{-1}\right| \rho_j^{n_j}.$$

Отсюда имеем $R(F_{m_j}H^{\infty}(U^1), \Lambda_j) = |b_{n_j,j}^{-1}| \rho_j^{n_j}$ и лемма доказана.

На основании теоремы 1, следствия из нее и леммы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для восстановления функционала* $\Lambda(f) = f(z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) \in U^2$, $|z_j| = \rho_j < 1$; $j = 1, 2$, *на классе* $F_{m_1, m_2}H^{\infty}(U^2)$ *использована обобщенная информация* $T_*(f)$ *вида* (2), *состоящая из элементов* (10) – (12), *где* $n_j \geq m_j$; $j = 1, 2$. *Тогда справедливо равенство*

$$R(F_{m_1, m_2}H^{\infty}(U^2), \Lambda) = \left|b_{n_1,1}^{-1}\ b_{n_2,2}^{-1}\right| \rho_1^{n_1}\ \rho_2^{n_2}$$

и метод

$$S[T_*(f)] = \sum_{k=0}^{n_1-1} \lambda_{1,k}^* \varphi_j(f, z_2) z_1^k + \sum_{l=0}^{n_2-1} \lambda_{2,l}^* \psi_l(f, z_1) z_2^l -$$
$$- \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} \lambda_{1,k}^* \lambda_{2,l}^* c_{k,l}(f) z_1^k z_2^l$$

является оптимальным среди методов восстановления значения $f(z_1, z_2) \in$ $\in F_{m_1, m_2}H^{\infty}(U^2)$ *по* $T_*(f)$.

В заключение отметим, что полученные в статье результаты соответствующим образом можно распространить на классы аналитических функций n, $n >$ > 2, независимых комплексных переменных, определенные при помощи n-мерной композиции Адамара [13].

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1965. – 152 с.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики.– 1977.– **11**, №1.– С. 1014 – 1018.
3. *Боянов Б. Д.* Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 4. – С. 511 – 524.
4. *Боянов Б. Д.* Наилучшее восстановление дифференцируемых периодических функций по их коэфициентам Фурье // Сердика. Бълг. мат. списание. – 1976. – **2**, № 4. – С. 300 – 304.
5. *Великин В. Л.* Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 5. – С. 663 – 670.
6. *Ligun A. A.* Optimal methods for the approximate calculation of the functionals of classes $W^r L_\infty$ // Anal. math. – 1979. – **5**, № 4. – P. 269 – 286.
7. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 1. – С. 29 – 40.
8. *Овчинцев М. П.* К вопросу об оптимальном восстановлении функций класса E_p в кольце // Сиб. мат. журн. – 1989. – **30**, № 4. – С. 87 – 101.
9. *Темляков В. Н.* О приближенном восстановлении периодических функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1985. – **280**, № 6. – С. 1310 – 1313.
10. *Levin M.* On the evaluation of double integrals // Конструктив. теория функций: Тр. Междунар. конф. (Варна, 1 – 5 июня 1981 г.). – София, 1983. – С. 414 – 418.
11. *Шабозов М. Ш.* О задаче восстановления линейных функционалов по информации, заданной в виде граничных условий // Изв. АН Тадж ССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук. – 1982. – С. 9 – 15.
12. *Вакарчук С. Б.* О восстановлении линейных функционалов на классах дифференцируемых функций двух переменных по некоторой обобщенной информации // Изв. вузов. Математика. – 1989. – №2. – С. 11 – 17.
13. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применение. – Новосибирск: Наука, 1988. – 240 с.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
15. *Белый В. Н., Двейрин М. З.* О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрич. вопросы теории функций и отображения. – 1971. – Вып. 2. – С. 37 – 54.

Получено 06.05.91