УДК 517.5

Д. Н. Бушев, И. Р. Ковальчук, кандидаты физ.-мат. наук (Луц. пед. ин-т)

О ПРИБЛИЖЕНИИ КЛАССОВ СВЕРТОК

Найдены асимптотические равенства для точных верхних граней наилучших приближений некоторых классов сверток с четным ядром в метрике пространства L_p.

Знайдені асимптотичні рівності для точних верхніх меж найкращих наближень деяких класів згорток з парним ядром в метриці простору L_p.

Обозначим через L_p, $1 \le p \le \infty$, L_∞, C-пространства 2π-периодических функций, соответственно суммируемых в p-й степени, существенно ограниченных и непрерывных с нормами

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \ \|f\|_\infty = \operatorname*{sup\,vrai}_x |f(x)|, \ \|f\|_c = \max_x |f(x)|;$$

$T_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше $(n-1)$

$$E_n(f)_X = \inf_{T_{n-1}} \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_X \ \text{ и } \ E_n(\mathfrak{M})_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E_n(f)_X$$

— наилучшее приближение соответственно функции $f(x) \in X$ и множества $\mathfrak{M} \subset X$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x)$ в метрике пространства X ($X = L_p$, $1 \le p \le \infty$, или $X = C$); A_n — произвольный линейный оператор, отображающий пространство X в подпространство всех тригонометрических полиномов степени не выше $(n-1)$;

$$A(f) = l * f = \int_0^{2\pi} f(x-t) l(t) dt, \tag{1}$$

$$U_n(\Lambda, \mathrm{M}, f, x) = \frac{1}{\pi} U_n(\lambda, \mu) * f, \tag{2}$$

$$U_n(\Lambda, f, x) = \frac{1}{\pi} U_n(\lambda) * f \tag{3}$$

— линейные операторы, заданные с помощью свертки соответственно с ядрами

$$l(t) \in L, \ U_n(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{(n)} \cos kt + \mu_k^{(n)} \sin kt), \ U_n(\lambda, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt;$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{M}, A)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - A(f)\|_X, \ \mathfrak{E}_n(\mathfrak{M})_X = \inf_{A_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - A_n(f)\|_X.$$

Пусть $K * H_p^s$ — классы 2π-периодических функций $f(x)$, представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{K} * \varphi)(x), \tag{4}$$

где $s \ge 1$, $K(t) \in L$, $\|\varphi\|_p \le 1$ и $\int_0^{2\pi} \varphi(u) \begin{Bmatrix} \cos ku \\ \sin ku \end{Bmatrix} du = 0$, $k = 0, 1, \ldots, s-1$.

В частности, $K * H_p^0$ есть класс функций (4), у которых $\|\varphi\|_p \le 1$. Такие классы функций рассматривались, например, в [1, с. 76]. Если β — фиксированное действительное число, $\psi(k)$ — произвольная последовательность такая, что $\psi(k) \ne 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \beta\pi/2)$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $D_{\psi,\beta}(t)$, то классы $D_{\psi,\beta} * H_p^1$ с точностью до константы совпадают с классами $L_{\beta,p}^{\psi}$, введенными А.И.Степанцом в [2].

Пусть $\psi(k) = k^{-r}$, где $r > 0$. Тогда классы $L^{\psi}_{\beta,p}$ совпадают с классами $W^{r}_{\beta,p}$.

В работах [3, 4] установлено,что

$$\mathcal{E}(W^{r}_{\beta,1}, U_n(\Lambda))_L \leq \mathcal{E}(W^{r}_{\beta,\infty}, U_n(\Lambda))_C. \tag{5}$$

В большинстве случаев величины в правой и левой частях неравенства (5) асимптотически равны, хотя в работе [4] указаны случаи, когда эти величины не равны асимптотически. Для некоторых классов функций многих переменных, 2π-периодических по каждой из них, представимых в виде свертки, получены аналогичные неравенства в работе [5].

В работе [6] установлено, что в некоторых случаях неравенство (5) превращается в равенство.

В данной работе указаны классы сверток, для которых в (5) всегда имеет место знак равенства, независимо от выбора оператора A, задаваемого сверткой.

Известно (см., например, [7, с. 8]), что если последовательность $\psi(k)$ монотонно убывает, то $e_n(D_{\psi,\beta} * H^1_p)_p = O(\psi(n))$, где $1 < p < \infty$. Кроме того, в [7] найдены асимптотические равенства для величины $e_n(D_{\psi,0} * H^s_p)$, если последовательность $\psi(k)$ достаточно медленно убывает к нулю, $s = 0, 1, \ldots, n-1$ и $1 \leq$ $\leq p \leq \infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $A(f) = I * f = \int_0^{2\pi} f(x-t)\, I(t)\, dt$ *— линейный оператор, заданный сверткой с произвольным ядром* $I(t) \in L$.

Если $1 \leq p \leq \infty$ *и* $1/p + 1/p' = 1$, *то*

$$\mathcal{E}(K * H^0_p, A)_p = \mathcal{E}(K * H^1_{p'}, A)_{p'}. \tag{6}$$

В частности,

$$\mathcal{E}(K * H^0_p, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_p = \mathcal{E}(K * H^1_{p'}, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_{p'}, \tag{7}$$

$$\mathcal{E}_n(K * H^0_p)_p = \mathcal{E}_n(K * H^0_{p'})_{p'} = \mathcal{E}(K * H^0_p, U_n(\Lambda^*, \mathrm{M}^*))_p. \tag{8}$$

Величины $\mathcal{E}(K * H^0_p, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_p$ *и* $\mathcal{E}(K * H^0_p)_p$, *как функции от* p, *при* $1 \leq$ $\leq p \leq 2$ *не возрастают, а при* $2 \leq p \leq \infty$ *не убывают.*

Доказательство. Теорема 1 является следствием теоремы Риса – Торина [8] и свойств рассматриваемых операторов. Действительно, поскольку оператор (2) является частным случаем оператора вида (1), то равенство (7) следует из равенства (6).

Оператор (1) (см., например, [1, с.71, 72]) отображает пространство L_p в L_p, где $1 \leq p \leq \infty$ и L_∞ в C. Пусть $\|A\|_{p,p} = \sup\limits_{\|f\|_p \leq 1} \|A(f)\|_p$ — норма оператора A и $T_a A(f) = f(x-a)$ — оператор сдвига. Так как операция свертки коммутативна и оператор (1) перестановочен с оператором сдвига, т. е. $T_a(A(f)) = = A(T_a(f))$, то (см., например, [8, с. 315]) оператор (1) является m-оператором типа (L_p, L_p).

Следовательно (см., например, [8, с. 331]),

$$\|A\|_{p,p} = \|A\|_{p',p'}. \tag{9}$$

Из теоремы Риса – Торина для m–операторов (см., например, [8, с. 331]) и равенства (9) следует, что при $1 \leq p_0 \leq p \leq 2$ и при $2 \leq q_0 \leq q \leq \infty$

$$\|A\|_{p,p} \leq \|A\|_{p_0,p_0}, \quad \|A\|_{q,q} = \|A\|_{q_0,q_0}. \tag{10}$$

Значит, величина $\| A \|_{p,p}$ при $1 \le p \le 2$ не возрастает, а при $2 \le p \le \infty$ не убывает.

Используя определение нормы оператора, ассоциативность операции свертки и дистрибутивность ее относительно операции сложения, получаем

$$\mathfrak{E}(K * H_p^0, A)_p = \sup_{f \in K * H_p^0} \| f - A(f) \|_p = \sup_{f \in K * H_p^0} \| (1/\pi) K * \varphi -$$

$$- A * ((1/\pi) K * \varphi) \|_p = \sup_{f \in K * H_p^0} (1/\pi) \| (K - A * K) * \varphi \|_p =$$

$$= (1/\pi) \sup_{\|\varphi\|_p \le 1} \| (K - A * K) * \varphi \|_p = (1/\pi) \| (K - A(K) \|_{p,p}. \tag{11}$$

Из равенств (9), (11) вытекает (6), а из соотношений (10), равенств (9) и (11) следует, что величина $\mathfrak{E}(K * H_p^0, A)_p$ при $1 \le p \le 2$ не возрастает, а при $2 \le p \le \infty$ не убывает. Если множество $\mathfrak{M} \subset X$ инвариантно относительно сдвига, т. е. из включения $f(x) \in \mathfrak{M}$ следует $T_a(f) \in \mathfrak{M}$, то (см., например, [9, с. 195 – 196]; [1, с. 87])

$$\mathfrak{E}_n(\mathfrak{M})_x = \mathfrak{E}(\mathfrak{M}, U_n(\Lambda^*, \mathrm{M}^*))_X. \tag{12}$$

В силу того что класс $K * H_p^0$ инвариантен относительно сдвига, из равенств (12), (6) следует (8).

Так как величина $\mathfrak{E}(K * H_p^0, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_p$ при $1 \le p \le 2$ не возрастает, а при $2 \le p \le \infty$ не убывает, то из равенства (8) следует, что и величина $\mathfrak{E}_n(K * H_p^0)$ при $1 \le p \le 2$ не возрастает, а при $2 \le p \le \infty$ не убывает. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $F_A(t) = K(t) - A(K(t))$, $F_n(t) = K(t) - U_n(\Lambda, \mathrm{M}, K, t)$, $U_n(\Lambda^*, \mathrm{M}^*, f, x)$ — *линейный оператор, отображающий функцию* $K(t)$ *в многочлен наилучшего приближения степени не выше* $(n-1)$ *в пространстве* L. *Если* $1 \le p \le \infty$, *то*

$$\max_{k \ge 0} \left\{ \sqrt{a_k^2(F_A) + b_k^2(F_A)} \right\} = \mathfrak{E}(K * H_2^0, A)_2 \le \mathfrak{E}(K * H_p^0, A)_p \le$$

$$\le \mathfrak{E}(K * H_1^0, A)_L = \mathfrak{E}(K * H_\infty^0, A)_C = (1/\pi) \| K - A(K) \|_L, \tag{13}$$

$$\max_{k \ge 0} \left\{ \sqrt{a_k^2(F_n) + b_k^2(F_n)} \right\} = \mathfrak{E}(K * H_2^0, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_2 \le$$

$$\le \mathfrak{E}(K * H_p^0, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_p \le \mathfrak{E}(K * H_1^0, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_L =$$

$$= \mathfrak{E}(K * H_\infty^0, U_n(\Lambda, \mathrm{M}))_C = (1/\pi) \| K(t) - U_n(\Lambda, \mathrm{M}, k, t) \|_L, \tag{14}$$

$$\max_{k \ge n} \left\{ \sqrt{a_k^2(K) + b_k^2(K)} \right\} = \mathfrak{E}_n(K * H_2^{s_1})_2 \le \mathfrak{E}_n(K * H_p^{s_2})_p \le$$

$$\le \mathfrak{E}_n(K * H_1^0)_L = \mathfrak{E}_n(K * H_\infty^{s_3})_C =$$

$$= \mathfrak{E}(K * H_\infty^{s_4}, U_n(\Lambda^*, \mathrm{M}^*))_C = (1/\pi)\, \mathfrak{E}_n(K)_L, \tag{15}$$

$$\max_{k \ge n} \left\{ \sqrt{a_k^2(K) + b_k^2(K)} \right\} = E_n(K * H_2^{s_1})_2 \le E_n(K * H_p^{s_2})_p \le$$

$$\le E_n(K * H_1^0)_L = (1/\pi)\, E_n(K)_L, \tag{16}$$

где $a_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt\, dt$, $b_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt\, dt$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — *коэффициенты Фурье функции* $f(x)$, *и* $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Доказательство. Поскольку оператор (2) является частным случаем оператора (1), то соотношения (14) следуют из (13).

Из теоремы 1 в силу непрерывности функций класса $K * H_\infty^0$ следует

$$\mathfrak{E}(K * H_2^0, A)_2 \le \mathfrak{E}(K * H_p^0, A)_p \le \mathfrak{E}(K * H_1^0, A)_L = \mathfrak{E}(K * H_\infty^0, A)_C. \qquad (17)$$

Из равенства (11) согласно обобщенному неравенству Минковского (см., например, [1, с. 300, 301]) имеем

$$\mathfrak{E}(K * H_\infty^0, A)_C = (1/\pi) \sup_{\|\varphi\|_\infty \le 1} \|(K - A(K)) * \varphi\|_C \le (1/\pi) \|(K - A(K))\|_L. \qquad (18)$$

Пусть $\varphi_*(-t) = \mathrm{sign}\,(K(t) - A(K(t)))$. Тогда функция $f_* = (1/\pi)\, K * \varphi_*$ принадлежит классу $K * H_\infty^0$ и

$$\mathfrak{E}(K * H_\infty^0, A)_C \ge \|f_* - A(f_*)\|_C = (1/\pi)\, \|(K - A(K)) * \varphi_*\|_C =$$
$$= (1/\pi)\, \Big\| \int_0^{2\pi} \varphi_*(x - t)(K(t) - A(K(t)))\, dt \Big\|_C \ge$$
$$\ge (1/\pi) \Big| \int_0^{2\pi} \varphi_*(-t)(K(t) - A(K(t)))\, dt \Big| = (1/\pi)\, \|(K - A(K))\|_L. \qquad (19)$$

Известно (см., например, [10, с. 70]), что коэффициенты Фурье функции $(1/\pi) f * \varphi$ вычисляются по формулам

$$a_k((1/\pi) f * \varphi) = a_k(f)\, a_k(\varphi) - b_k(f)\, b_k(\varphi),$$
$$b_k((1/\pi) f * \varphi) = a_k(f)\, b_k(\varphi) + b_k(f)\, a_k(\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (20)$$

Используя определение функции $F_A(t)$, равенства (10), равенство Парсеваля, формулы (20) и то, что $\|\varphi\|_2 \le 1$, получаем

$$\mathfrak{E}(K * H_2^0, A)_2 = \sup_{\|\varphi\|_2 \le 1} \|(1/\pi) F_A * \varphi\|_2 = (\pi((a_2^0(F_A)\, a_2^0(\varphi))/2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(F_A) + b_k^2(F_A))(a_k^2(\varphi) + b_k^2(\varphi))))^{1/2} \le$$
$$\le \max_{k \ge 0} \left\{ \sqrt{a_k^2(F_A) + b_k^2(F_A)} \right\} \|\varphi\|_2 \le \max_{k \ge 0} \left\{ \sqrt{a_k^2(F_A) + b_k^2(F_A)} \right\}. \qquad (21)$$

Так как коэффициенты Фурье суммируемой функции стремятся к нулю (см., например, [11, с. 260]), то

$$\max_{k \ge 0} \left\{ \sqrt{a_k^2(F_A) + b_k^2(F_A)} \right\} = \sqrt{a_m^2(F_A) + b_m^2(F_A)}, \qquad (22)$$

где m — фиксированное целое неотрицательное число.

Если $\varphi_m(x) = (\cos mx) / \|\cos mx\|_2$, то $\|\varphi_m\|_2 = 1$ и согласно определению класса $K * H_2^0$ функция $f_m = (1/\pi) K * \varphi_m$ принадлежит этому классу. Тогда используя соотношения (11), (21), имеем

$$\mathfrak{E}(K * H_2^0, A)_2 \ge \|f_m - A(f_m)\|_2 = (1/\pi)\, \|(K - A(K)) * \varphi_m\|_2 =$$
$$= (\pi(a_m^2(F_A) + b_m^2(F_A))\, a_m^2(\varphi_m))^{1/2} = \sqrt{a_m^2(F_A) + b_m^2(F_A)} \times$$
$$\times \|\varphi_m\|_2 = \sqrt{a_m^2(F_A) + b_m^2(F_A)}. \qquad (23)$$

Из соотношений (17) – (19), (21) – (23) следует (13). Известно, что

$$E_n(K * H_2^{s_1})_2 = \mathfrak{E}_n(K * H_2^{s_2})_2 = \mathfrak{E}(K * H_2^{s_3}, S_{n-1})_2, \qquad (24)$$

где $S_{n-1}(f, x) = (1/\pi)(D_{n-1} * f)(x)$ — оператор Фурье, $D_{n-1}(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kt$ — ядро Дирихле.

Из соотношений (14), (24) следует

$$E_n(K * H_2^{s_1})_2 = \mathfrak{E}_n(K * H_2^{s_2})_2 = \max_{k \geq n} \left\{ \sqrt{a_k^2(K) + b_k^2(K)} \right\} =$$
$$= \sqrt{a_l^2(K) + b_l^2(K)}, \tag{25}$$

где $l \geq n$.

Если $\varphi_l(x) = (\cos lx) / \| \cos lx \|_p$, то функция $f_l = (1/\pi) K * \varphi_l$ принадлежит классу $K * H_p^l \subset K * H_p^{s_2}$. Используя утверждение 3.3.3 из [1, с. 56] и формулы (20), получаем

$$\mathfrak{E}_n(K * H_p^{s_2})_p \geq E_n(K * H_p^{s_2})_p \geq E_n(f_l)_p = \| f_l \|_p = \sqrt{a_l^2(K) + b_l^2(K)}. \tag{26}$$

Из теоремы 1 следует

$$E_n(K * H_p^{s_2})_p \leq \mathfrak{E}_n(K * H_p^{s_2})_p \leq \mathfrak{E}_n(K * H_1^0)_L = \mathfrak{E}_n(K * H_\infty^0)_C. \tag{27}$$

Известно (см., например, [1, с. 78, 79]), что

$$E_n(K * H_1^0)_L = \mathfrak{E}_n(K * H_\infty^{s_3})_C = \mathfrak{E}(K * H_\infty^{s_4}, U_n(\Lambda^*, \mathrm{M}^*))_C = (1/\pi) E_n(K)_L. \tag{28}$$

Из соотношений (25) — (28) следует (15), (16). Следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\psi(k)$ *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{k \to \infty} \psi(k) = 0, \Delta_2 \psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \geq 0, \tag{29}$$

$$\Delta_3 \psi(k) = \psi(k) - 3\psi(k+1) + 3\psi(k+2) - \psi(k+3) \geq 0,$$

и

$$\psi(n) - \psi(an) = o(\psi(n)) \tag{30}$$

для каждого фиксированного $a \geq 3$.

Тогда при $1 \leq p \leq \infty$ *и* $n \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$\psi(n) \leq E_n(D_{\psi, 0} * H_p^{s_1})_p \leq (4/\pi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi((2k+1)n)}{2k+1} = \psi(n) + o(\psi(n)), \tag{31}$$

где $a \geq 3$ *— фиксированное натуральное число.*

Доказательство. Согласно следствию

$$\psi(n) = E_n(D_{\psi, 0} * H_2^{s_1})_2 \leq E_n(D_{\psi, 0} * H_p^{s_2})_p \leq (1/\pi) e_n(D_{\psi, 0})_L. \tag{32}$$

Известно (см., например, [12, с. 257]), что

$$(1/\pi) e_n(D_{\psi, 0})_L = (4/\pi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi((2k+1)n)}{2k+1}. \tag{33}$$

Используя то, что $1 - 1/3 + 1/5 - \ldots + (-1)^{n+1}/(2n+1) + \ldots = (\pi/4)$ (см., например, [13, с. 21]), получаем

$$(4/\pi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi((2k+1)n)}{2k+1} = \psi(n) + (4/\pi)((1/3)(\psi(n) - \psi(3n)) -$$
$$- (1/5)(\psi(n) - \psi(5n)) + \ldots + (-1)^{k+1}/(2k+1)(\psi(n) -$$
$$- \psi((2k+1)n)) + \ldots) = \psi(n) + v(n). \tag{34}$$

Так как последовательность $\psi(k)$ удовлетворяет условиям (29), то существует невозрастающая, выпуклая вниз на промежутке $[1, +\infty)$ функция $\psi(u)$ такая, что $\psi(u) = \psi(k)$ при $u = k$. Покажем, что при $x \geq b \geq 3$ непрерывная функция $g_n(x) = (1/x)(\psi(n) - \psi(nx))$ не возрастает. Каждая невозрастающая, выпуклая вниз функция имеет (см., например, [1, с. 180]) неположительную и неубывающую правостороннюю производную $\psi'(u) = \psi'(u+0)$. Поскольку неубывающая функция имеет почти всюду неотрицательную производную (см., например, [11, с. 199]), то почти всюду $\psi''(u) = \psi''(u+0) \geq 0$ при $u \geq 1$. Тогда почти всюду при $x \geq 3$

$$g_n'(x) = (1/x^2)(-nx\psi'(nx) - \psi(n) + \psi(nx)) = (1/x^2)h_n(x), \tag{35}$$

$$h_n'(x) = -n^2 x\psi''(nx) \leq 0. \tag{36}$$

В силу того что $g_n(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g_n(x) = 0$ и функция $g_n(x)$ непрерывна, найдется промежуток $[b, c]$, где $b \geq 3$, на котором эта функция не возрастает, т.е. $g_n'(x) \leq 0$ при $3 \leq b \leq x \leq c$. Тогда из равенства (35) следует, что $h_n(x) \leq 0$ при $3 \leq b \leq x \leq c$. Из соотношения (36) вытекает, что функция $h_n(x)$ не возрастает. Следовательно, при $x \geq b \geq 3$ $h_n(x) \leq 0$ и функция $g_n(x)$ не возрастает.

Поскольку функция $g_n(x)$ при $x \geq b \geq 3$ не возрастает и $g_n(x) \geq 0$, то из равенства (34) следует

$$\nu(n) \leq C \max_{3 \leq 2k+1 \leq b} \{(1/2k+1)(\psi(n) - \psi((2k+1)n)\}, \tag{37}$$

где C — константа, не зависящая от n.

Из равенства (37) получаем

$$\nu(n) = O(\psi(n) - \psi(a\,n)), \tag{38}$$

где $a \geq 3$ — фиксированное натуральное число. Из соотношений (32) – (34), (38) следует (31). Теорема доказана.

Отметим, что условиям теоремы 2 удовлетворяют, например, последовательности $\psi(k) = \ln^{\alpha}(k+1)$, где $\alpha < 0$. Невозрастание и неубывание величины $\mathfrak{E}(K * H_p^0, A)_p$ соответственно при $1 \leq p \leq 2$ и $2 \leq p \leq \infty$ и равенства (6) остаются справедливыми для соответствующих классов сверток, заданных на всей вещественной оси, и для классов функций многих переменных, 2π-периодических по каждой из них.

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин - т математики; № 10).
3. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
4. *Стечкин С. Б., Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1967. – **88**. – С. 20 – 29.
5. *Задерей П. В.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами в среднем // Методы теории приближения и их прил. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 43 – 48.
6. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 1. – С. 15 – 26.
7. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. – Киев, 1984. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин - т математики; № 15).
8. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 339 с.
9. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 616 с.
11. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
12. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Получено 01. 03. 91