УДК 517.983

О. Н. Комаренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

САМОСПРЯЖЕНІ ОПЕРАТОРИ, ПОРОДЖЕНІ ЗАДАЧАМИ ТРАНСМІСІЇ З НЕОДНОРІДНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

For transmission problems with equations of higher orders and nonhomogeneous conjugation conditions, we construct and investigate the corresponding operators in Hilbert spaces. We prove the self-adjointness of these operators for the spectral problem with a parameter in the conditions of conjugation.

Для задач трансмісії з рівняннями вищих порядків і неоднорідними умовами спряження побудовано і досліджено відповідні оператори в гільбертових просторах. Доведено їх самоспряженість для спектральної задачі з параметром в умовах спряження.

З 60-х років задача трансмісії (крайова задача з розривними коефіцієнтами) досліджувалася в багатьох роботах (див. [1 – 5] і бібліографію в них). Методами інтегральних рівнянь досліджувалися класичні розв'язки цієї задачі для рівнянь другого порядку [1]. Загальна задача трансмісії з рівняннями вищих порядків досліджувалася методами функціонального аналізу в [2 – 5]. Встановлено нетеровість задачі; доведено теореми про гомеоморфізми та локальне підвищення гладкості розв'язків. Задача трансмісії зі спектральним параметром в умовах спряження для рівняння Гельмгольца досліджувалася методом інтегральних рівнянь в [6]. Для задачі трансмісії на власні значення зі спектральним параметром у рівняннях із теорії фільтрації рідини розроблено чисельний метод її розв'язання [7]. У роботі [8] запропоновано варіаційний метод розв'язання задачі трансмісії.

Для загальної еліптичної крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами будувалися і досліджувалися відповідні оператори в гільбертових просторах квадратично сумовних функцій [9 – 13], а також у просторах узагальнених функцій [14]. Досліджувалися також подібні оператори, породжені задачею трансмісії з частково однорідними умовами спряження для оператора Лапласа [15, 16]. Проте не можна безпосередньо побудувати відповідні оператори для загальної задачі трансмісії, як у випадку еліптичної крайової задачі, через відмінність умов спряження від крайових умов.

1. Нехай $Q \subset R^n$ — обмежена область, $S = \partial Q$ — її межа. Область Q розділяється замкненою поверхнею γ, яка не дотикається до межі S, на дві підобласті Q_1 і Q_2 $(Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \gamma)$. Через Q_1 позначимо підобласть з межею $\partial Q_1 = \gamma$ („внутрішню" до γ), $Q_2 = Q \setminus \overline{Q}_1$, $\partial Q_2 = \gamma \cup S$.

Розглянемо таку задачу трансмісії:

$$L_i u_i = f_i(x_i), \quad x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$B_j u_2 = \phi_j(x_2), \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\left[\tilde{B}_j u\right] := \tilde{B}_j^1 u_1 - \tilde{B}_j^2 u_2 = \psi_j(x), \quad x \in \gamma, \quad j = 1, \ldots, 2m, \tag{3}$$

де $L_i u_i = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha^i(x) D^\alpha u_i$, $i = 1, 2$, — диференціальні вирази з комплексними коефіцієнтами в Q_i, $D_k = i\partial / \partial x_k$, $k = 1, \ldots, n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; $B_j u_2 = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{j\alpha}(x_2) D^\alpha u_2$, $j = 1, \ldots, m$, $m_j \le 2m - 1$, — граничні вирази на S; $\tilde{B}_j^i u_i = \sum_{|\alpha| \le t_j^i} b_{j\alpha}^i(x) D^\alpha u_i$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 2m$, — граничні вирази на поверхні γ.

Будемо вважати, що для задачі трансмісії (1) – (3) виконуються умови: диференціальні вирази $L_i u_i$, $i = 1, 2$, правильно еліптичні в $\overline{Q_i}$; система граничних диференціальних виразів $\{B_j u_2\}_{j=1}^m$ нормальна і накриває $L_2 u_2$ на S;

системи $\{\tilde{B}_j^i u_i\}_{j=1}^{2m}$, $i = 1, 2$, є системами Діріхле порядку $2m$, які узгоджено накривають оператори $L_i u_i$ на γ [2, 3]. Задача, яка задовольняє зазначені умови, називається регулярною еліптичною задачею трансмісії.

Далі будемо вважати також, що поверхні S, γ нескінченно гладкі і всі коефіцієнти є такими в деяких околах в R^n тих множин, де вони розглядаються. Можна вказати більш загальні умови гладкості, при яких будуть справедливими одержані нижче результати.

Нехай $L_2(Q_i)$, $L_2(\gamma)$, $L_2(S)$ — гільбертові простори комплекснозначних функцій, визначених відповідно в Q_i і на γ, S, $(\cdot,\cdot)_{Q_i}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ — скалярні добутки в них. Введемо гільбертові простори, які є ортогональними сумами зазначених вище просторів і в яких далі будуються оператори

$$L_2 = L_2(Q_1) \oplus L_2(Q_2), \qquad L_2^{(m,\,2m)} = L_2 \oplus \sum_{i=1}^{m} L_2(S_i) \oplus \sum_{j=1}^{2m} L_2(\gamma^j), \qquad S_i = S,$$

$$\gamma^j = \gamma, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, 2m, \qquad L_2^{2m} = L_2 \oplus \sum_{j=1}^{2m} L_2(\gamma^j).$$

Позначимо скалярні добутки в них відповідно через $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_{(m,\,2m)}$, $(\cdot,\cdot)_m$.

Через $W_2^k(Q_i)$, $W_2^l(\gamma)$, $W_2^l(S)$, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, $l = \ldots, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, \ldots$, $i = 1, 2$, позначаються соболєвські простори; $\|\cdot, Q_i\|_k$, $\langle\langle \cdot, \gamma\rangle\rangle_l$, $\langle\langle \cdot, S\rangle\rangle_l$ — норми в них. Для інших дійсних значень k і l так позначаються простори, які одержуються за допомогою комплексної інтерполяції соболєвських просторів [17]. Нижче використовується також простір $\tilde{W}_2^s(Q_i)$ [4], який одержуються в результаті замикання множини гладких функцій в Q_i за нормою

$$|||u_i, Q_i|||_s = \|u_i, Q_i\|_s + \sum_{j=1}^{2m} \left\langle\left\langle \frac{\partial^{j-1} u_i}{\partial \nu^{j-1}}, \partial Q_i \right\rangle\right\rangle_{s-j+1/2}, \ \nu \text{ — нормаль до } \partial Q_i. \tag{4}$$

Для розв'язків задачі трансмісії використовуються такі прямі суми просторів:

$$W_2^s = W_2^s(Q_1) + W_2^s(Q_2), \qquad \tilde{W}_2^s = \tilde{W}_2^s(Q_1) + \tilde{W}_2^s(Q_2).$$

Простір $\tilde{W}_2^s$ ізоморфний деякому підпростору з простору

$$K^s = W_2^s \dotplus \sum_{j=1}^{2m} \sum_{i=1}^{2} W_2^{s-j+1/2}(\partial Q_i).$$

Цей підпростір при $s \ge 2m$ ізоморфний простору W_2^s, а при $s < 2m$ не ізоморфний йому.

Просторами для правих частин вибираються прямі суми:

$$K_{(s,\,k_i,\,r_j)}^{(m,\,2m)} = W_2^s \dotplus \sum_{i=1}^{m} W_2^{k_i}(S_2) \dotplus \sum_{j=1}^{2m} W_2^{r_j}(\gamma), \qquad K_{(s,\,k_j)}^{(m,\,2m)} = W_2^s \dotplus \sum_{j=1}^{2m} W_2^{k_j}(\gamma),$$

де k_i, r_j — дійсні числа.

В роботі [4] наведено формулу Гріна для задачі трансмісії, порядки операторів $\tilde{B}_j^1 u_1$, $\tilde{B}_j^2 u_2$ якої рівні $\left(t_j^1 = t_j^2,\ j = 1, \ldots, 2m\right)$. Вона має вигляд

$$\sum_{i=1}^{2} (L_i u_i, v_i)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle B_j u_2, C_j^+ v_2 \right\rangle_S - \sum_{j=1}^{2m} \left\langle \left[\tilde{B}_j u\right], \tilde{B}_{2m-j+1}^{1+} v_1 \right\rangle_\gamma =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (u_i, L_i^+ v_i)_{Q_i} + \sum_{i=1}^{m} \left\langle C_j u_2, B_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{2m} \left\langle \tilde{B}_j^2 u_2, \left[\tilde{B}_{2m-j+1}^+ v\right] \right\rangle_\gamma. \tag{5}$$

За цією формулою в [4] визначено спряжену задачу і одержано умову існування розв'язку задачі (1) – (3). Але, на відміну від формули Гріна для загальної крайової задачі [13, 17 – 20], вона не симетрична і не видно як за нею побудувати оператори в гільбертових просторах, відповідні задачі трансмісії з неоднорідними умовами спряження. Ми зараз встановимо формулу Гріна в симетричному вигляді, яка подібно до випадку загальної крайової задачі дає можливість побудувати такі оператори і встановити випадки, коли вони будуть симетричними і самоспряженими.

2. Введемо для операторів в умовах спряження (3) нові позначення і подамо ці умови в такому вигляді:

$$\left(B_j u\right) := B_j^1 u_1 + B_j^2 u_2 = \psi_j(x), \quad \left[C_j u\right] := C_j^1 u_1 - C_j^2 u_2 = \psi_{m+j}(x),$$
$$x \in \gamma, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

де $\left(B_j u\right) = \left[\tilde{B}_j u\right]$, $\left[C_j u\right] = \left[\tilde{B}_{m+j} u\right]$, $j = 1, \ldots, m$, і через $B_j^i u_i$, $C_j^i u_i$ позначаються оператори

$$B_j^1 u_1 = \tilde{B}_j^1 u_1, \quad B_j^2 u_2 = -\tilde{B}_j^2 u_2, \quad C_j^1 u_j = \tilde{B}_{m+j}^1 u_1, \quad C_j^2 u_2 = \tilde{B}_{m+j}^2 u_2, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Запишемо формулу Гріна для загальної еліптичної крайової задачі [17] окремо в кожній із підобластей Q_i, $i = 1, 2$, з операторами $\{L_i u_i,\ B_j u_2,\ C_j u_2,\ B_j^i u_i,\ C_j^i u_i, j = 1, \ldots, m\}$, потім додамо їх праві частини і ліві і після нескладних перетворень одержимо симетричну формулу Гріна для задачі трансмісії (1), (2), (6):

$$\sum_{i=1}^{2} (L_i u_i, v_i)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle B_j u, C_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m} \left(\left\langle \left(B_j u\right), C_j^{1+} v_1 \right\rangle_\gamma + \left\langle \left[C_j u\right], B_j^{2+} v_2 \right\rangle_\gamma \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \left(u_i, L_i^+ v_i\right)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle C_j u_2, B_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m} \left(\left\langle C_j^1 u_1, \left(B_j^+ v\right) \right\rangle_\gamma + \left\langle B_j^2 u_2, \left[C_j^+ v\right] \right\rangle_\gamma \right),$$
$$u_i, v_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Можна показати, що формально спряжені оператори $B_j^{i+} v_i$, $C_j^{i+} v_i$ виражаються через оператори $\tilde{B}_j^{i+} v_i$ з формули (5) таким чином:

$$B_j^{1+} v_1 = \tilde{B}_{m-j+1}^{1+} v_1, \quad C_j^{1+} v_1 = -\tilde{B}_{2m-j+1}^{1+} v_1, \quad B_j^{2+} v_2 = -\tilde{B}_{m-j+1}^{2+} v_2,$$
$$C_j^{2+} v_2 = -\tilde{B}_{2m-j+1}^{2+} v_2, \quad j = 1, \ldots, m,$$

а також $\left(B_j^+ v\right) = \left[\tilde{B}_{m-j+1}^+ v\right]$, $\left[C_j^+ v\right] = -\left[\tilde{B}_{2m-j+1}^+ v\right]$, $j = 1, \ldots, m$. Зауважимо, що формально спряжені оператори $L_i^+ v_i$, $B_j^+ v_2$, $C_j^+ v_2$, $B_j^{i+} v_i$, $C_j^{i+} v_i$ визначаються за формулою Гріна для еліптичних крайових задач [17] одного й того ж вигляду в кожній з областей Q_1, Q_2 а оператори $\left\{\tilde{B}_j^{i+} v_i\right\}$ визначаються за різними формулами Гріна.

Задача трансмісії (1), (2), (6) визначає відображення

$$u = (u_1; u_2) \mapsto \left(L_1 u_1, L_2 u_2, \left\{B_j u_2\right\}_{j=1}^m, \left\{\left(B_j u\right)\right\}_{j=1}^m, \left\{\left[C_j u\right]\right\}_{j=1}^m\right),$$
$$u_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Для кожного $s \in R$ замикання $\Lambda = \Lambda_s$ цього відображення неперервно діє в парі просторів $\tilde{W}_2^{2m+s} \xrightarrow{\Lambda_s} K_{(s, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$, де $k_i = 2m + s - m_i - 1/2$, $i = 1, \ldots, m$, $r_j = 2m + s - t_j - 1/2$, $t_j = \max(t_j^1, t_j^2)$, $j = 1, \ldots, 2m$. Оператор Λ_s є нетеровим і має скінченне ядро N_s і коядро N_s^* [3, 5]. Згідно з прийнятими вище умовами гладкості елементи ядра N_s будуть гладкими і ці ядра не залежать від s, $N_s = N \;\; \forall s$.

За формулою Гріна (7) визначається спряжена задача, яка має вигляд

$$L_i^+ v_i = f_i(x_i), \quad x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

$$B_j^+ v_2 = \phi_j(x_2), \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

$$(B_j^+ v) := B_j^{1+} v_1 + B_j^{2+} v_2 = \psi_j(x), \quad [C_j^+ v] := C_j^{1+} v_1 - C_j^{2+} v_2 = \psi_{m+j}(x),$$
$$x \in \gamma, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

Для цієї задачі оператор Λ_s^+ будується так само, як оператор Λ_s. Він одержується в результаті замикання відображення

$$v = (v_1; v_2) \mapsto \left(L_1^+ v_1, L_2^+ v_2, \left\{ B_j^+ v_2 \right\}_{j=1}^m, \left\{ \left(B_j^+ v \right) \right\}_{j=1}^m, \left\{ \left[C_j^+ v \right] \right\}_{j=1}^m \right), \quad v_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Оператор Λ_s^+ неперервно відображає весь простір $\tilde{W}_2^{2m+s}$ у простір $K_{(s, k_i', r_j')}^{(m, 2m)}$, $k_i' = 2m + s - m_i' - 1/2$, $i = 1, \ldots, m$, $r_j' = 2m + s - t_j' - 1/2$, $t_j' = \max(t_j^{1'}, t_j^{2'})$, $j = 1, \ldots, 2m$, де m_j' — порядки операторів $B_j^+ v_2$ на S; $t_j^{i'}$, $t_{m+j}^{i'}$ — відповідно порядки операторів $B_j^{i+} v_i$, $C_j^{i+} v_i$, $j = 1, \ldots, m$, на γ. Оператор Λ_s^+ має властивості, аналогічні властивостям оператора Λ_s; позначимо його ядро через N^+.

З формули Гріна (7) випливає наступна умова існування розв'язку рівняння $\Lambda_s u = F$ з правою частиною $F = (f_1, f_2, \{\phi_j\}_{j=1}^m, \{\psi_j\}_{j=1}^{2m}) \in K_{(s, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$:

$$\sum_{i=1}^{2} (f_i, v_i)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle \phi_j, C_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m} \left(\left\langle \psi_j, C_j^{1+} v_1 \right\rangle_\gamma + \left\langle \psi_{m+j}, B_j^{2+} v_2 \right\rangle_\gamma \right) = 0,$$
$$v = (v_1, v_2) \in N^+. \tag{13}$$

Ця умова скорочено записується у вигляді $[F, N^+] = 0$.

Елементи $\tilde{u} \in \tilde{W}_2^{2m+s}$ однозначно розкладаються на дві складові $\tilde{u} = u' + u''$, де

$$u' \in N, \quad (u'', v) = \left(u_1'' \big|_{Q_1}, v_1 \right)_{Q_1} + \left(u_2'' \big|_{Q_2}, v_2 \right)_{Q_2} = 0, \quad v = (v_1, v_2) \in N.$$

Підпростір всіх таких векторів $u'' \in \tilde{W}_2^{2m+s}$ позначається через $\tilde{H}_{2m+s}$, а підпростір векторів u'', для яких $(u'', v) = 0$, $v \in N^+$, позначається через $\tilde{H}_{2m+s}^+$. Через $Q^+ K_{(s, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$ позначається підпростір векторів $F \in K_{(s, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$, для яких $[F, N^+] = 0$, а через $QK_{(s, k_i', r_j')}^{(m, 2m)}$ — підпростір векторів $F' \in K_{(s, k_i', r_j')}^{(m, 2m)}$, для яких $[F', N] = 0$. Нехай $\tilde{\Lambda}_s$, $\tilde{\Lambda}_s^+$ — звуження відповідно операторів Λ_s, Λ_s^+ на підпростори $\tilde{H}_{2m+s}$, $\tilde{H}_{2m+s}^+$.

Теорема 1 (про гомеоморфізми, див. [4, 5]). *Оператор* $\tilde{\Lambda}_s$ *встановлює гомеоморфізм* $\tilde{H}_{2m+s} \xrightarrow{\tilde{\Lambda}_s} Q^+ K_{(s, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$, *подібний гомеоморфізм встановлює й оператор* $\tilde{\Lambda}_s^+$, *а саме:* $\tilde{H}_{2m+s}^+ \xrightarrow{\tilde{\Lambda}_s} Q K_{(s, k_i', r_j')}^{(m, 2m)}$.

Означення 1. *Розв'язок операторного рівняння* $\Lambda_s \tilde{u} = F$, $F \in K_{(s, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$ *називається s-сильним узагальненим розв'язком задачі трансмісії* (1), (2), (6).

Означення 2. *Елемент* $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \tilde{W}_2^{2m+s}$ (*s — довільне дійсне число*) *називається слабким узагальненим розв'язком задачі трансмісії* (1), (2), (6), *якщо виконується співвідношення*

$$\sum_{i=1}^{2}(f_i, v_i)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m}\left\langle \phi_j, C_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m}\left(\left\langle \psi_j, C_j^{1+} v_1 \right\rangle_\gamma + \left\langle \psi_{m+j}, B_j^{2+} v_2 \right\rangle_\gamma\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left(\tilde{u}_i, L_i^+ v_i\right)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m}\left\langle C_j \tilde{u}_2, B_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m}\left(\left\langle C_j^1 \tilde{u}_1, \left(B_j^+ v\right)\right\rangle_\gamma + \left\langle B_j^2 \tilde{u}_2, \left[C_j^+ v\right]\right\rangle_\gamma\right),$$

$$u_i, v_i \in C^\infty(\overline{Q_i}), \quad i = 1, 2. \tag{14}$$

Очевидно, сильний розв'язок $\tilde{u}$ задачі трансмісії буде також слабким розв'язком. Із наведеної нижче леми випливає, що слабкий розв'язок буде сильним. Через H_s позначається підпростір елементів $u \in W_2^s$, для яких $(u, v) = 0$, $v \in N$. Позначимо через P_1 проектор на підпростір H_s.

Доведемо тепер лему, яка використовується також для дослідження гладкості елементів із областей визначення розглядуваних нижче операторів.

Лема 1. *Нехай для деякого вектора* $F = (f_1, f_2, \phi_1, \ldots, \phi_m, \psi_1, \ldots, \psi_{2m}) \in K_{(s, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$, $s \in R$, $r_i = 2m + s - m_i - 1/2$, $i = 1, \ldots, m$, $k_j = 2m + s - t_j - 1/2$, $j = 1, \ldots, 2m$, *і вектора* $U = (u_1^0, u_2^0, \hat{u}_1^1, \ldots, \hat{u}_m^1, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{2m}) \in K_{(s_0, k_i^0, r_j^0)}^{(m, 2m)}$, *де* s_0, k_i^0, $i = 1, \ldots, m$, r_j^0, $j = 1, \ldots, 2m$, — *деякі дійсні числа, виконується співвідношення*

$$\sum_{i=1}^{2}(f_i, v_i)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m}\left\langle \phi_j, C_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m}\left(\left\langle \psi_j, C_j^{1+} v_1 \right\rangle_\gamma + \left\langle \psi_{m+j}, B_j^{2+} v_2 \right\rangle_\gamma\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left(u_i^0, L_i^+ v_i\right)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m}\left\langle \hat{u}_j^1, B_j^+ v_2 \right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m}\left(\left\langle \hat{u}_j, \left(B_j^+ v\right)\right\rangle_\gamma + \left\langle \hat{u}_{m+j}, \left[C_j^+ v\right]\right\rangle_\gamma\right), \tag{15}$$

$$v_i \in C^\infty(\overline{Q_i}), \quad i = 1, 2.$$

Тоді існує сильний розв'язок $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \tilde{W}_2^{2m+s}$ *задачі трансмісії* (1), (2), (6) $(\Lambda_s \tilde{u} = F)$, *для якого*

$$\tilde{u}_1|_{Q_1} = u_1^0, \quad \tilde{u}_2|_{Q_2} = u_2^0, \quad C_j \tilde{u}_2|_S = \hat{u}_j^1,$$

$$C_j^1 \tilde{u}_1|_\gamma = \hat{u}_1, \quad B_j^2 \tilde{u}_2|_\gamma = \hat{u}_{m+j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Доведення. На підставі співвідношення (15) для вектора F виконується умова існування розв'язку $[F, N^+] = 0$ рівняння $\Lambda_s \tilde{u} = F$. Розглянемо розв'язок цього рівняння вигляду $\tilde{u} = \tilde{\Lambda}_s^{-1} F + w$, $w = u^0 - P_1 u^0$, $u^0 = (u_1^0; u_2^0)$, $w \in N$, і покажемо, що $(\tilde{u}_1|_{Q_1} - u_1^0; \tilde{u}_2|_{Q_2} - u_2^0) \equiv 0$. За визначенням для нього справджується рівність $\sum_{i=1}^{2}\left(\tilde{u}_i|_{Q_i} - u_i^0, v_i\right)_{Q_i} = 0$, $v \in N$. Цей розв'язок $\tilde{u}$ буде також слабким, і для нього виконується співвідношення (14). Із цього співвідношення і з (15) випливає рівність

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\tilde{u}_i - u_i^0, L_i^+ v_i\right)_{Q_i} + \sum_{i=1}^{m}\left\langle C_j \tilde{u}_2 - \hat{u}_j^1, B_j^+ v_2 \right\rangle_S +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\left(\left\langle C_j^1 \tilde{u}_1 - \hat{u}_j, (B_j^+ v_2)\right\rangle_\gamma + \left\langle B_j^2 \tilde{u}_2 - \hat{u}_{m+j}, [C_j^+ v]\right\rangle_\gamma\right) = 0, \quad v_i \in C^\infty(\overline{Q_i}), \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

$\left(\tilde{u}_i|_{Q_i} - u_i^0\right) \in W_2^{s_1}(Q_i)$, $i = 1, 2$, $s_1 = \min(s + 2m, s_0)$. Покладемо в попередньому співвідношенні замість $v = (v_1, v_2)$ розв'язки $\tilde{v}$ задачі $\Lambda_{-s_1}\tilde{v} = G = (g_1, g_2, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$, $g = (g_1; g_2) \in W_2^{-s_1}$, $[G, N] = 0$. Тоді одержимо рівність $\sum_{i=1}^{2}\left(\tilde{u}_i|_{Q_i} - u_i^0, g_i\right)_{Q_i} = 0 \ \ \forall g \in W_2^{-s_1}$, $(G, N) = 0$. З цієї рівності і наведеної вище випливає, що $\tilde{u}_i|_{Q_i} - u_i^0 = 0$, $i = 1, 2$. Враховуючи це, з (16) одержуємо рівність

$$\sum_{i=1}^{m}\left\langle C_j\tilde{u}_2 - \hat{u}_j^1, B_j^+ v_2\right\rangle_S + \sum_{j=1}^{m}\left(\left\langle C_j^1\tilde{u}_1 - \hat{u}_j, \left(B_j^+ v\right)\right\rangle_\gamma + \left\langle B_j^2\tilde{u}_2 - \hat{u}_{m+j}, \left[C_j^+ v\right]\right\rangle_\gamma\right) = 0,$$
$$v_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \qquad i = 1, 2.$$

Звідси випливає, що $C_j\tilde{u}_2|_S = \hat{u}_j^1$, $C_j^1\tilde{u}_1|_\gamma = \hat{u}_j$, $B_j^2\tilde{u}_2|_\gamma = \hat{u}_{m+j}$, $j = 1, \ldots, m$. Лему доведено.

3. Одержана формула Гріна (7) наводить на думку побудувати оператор Ω_1 для задачі трансмісії (1), (2), (6) з неоднорідними умовами спряження за допомогою відображення

$$\left(u_1|_{Q_1}, u_2|_{Q_2}, \left\{C_j u_2|_S\right\}_{j=1}^m, \left\{C_j^1 u_1|_\gamma\right\}_{j=1}^m, \left\{B_j^2 u_2|_\gamma\right\}_{j=1}^m\right) \to$$
$$\to \left(L_1u_1, L_2u_2, \left\{B_j u_2\right\}_{j=1}^m, \left\{\left(B_j u\right)\right\}_{j=1}^m, \left\{\left[C_j u\right]\right\}_{j=1}^m\right), \tag{17}$$
$$u_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \qquad i = 1, 2.$$

Оператор Ω_1 одержується в результаті замикання цього відображення в просторі $L_2^{(m, 2m)}$. Як випливає з формули Гріна (7), у випадку, коли ця задача формально самоспряжена, тобто виконуються співвідношення

$$L_i u_i = L_i^+ u_i, \quad B_j u_2 = B_j^+ u_2, \quad B_j^i u_i = B_j^{i+} u_i, \quad C_j^i u_i = C_j^{i+} u_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{18}$$

такий багатокомпонентний оператор буде симетричним.

У подальшому для спрощення викладок будемо вважати крайові умови на S однорідними. Спочатку розглянемо задачу з частково однорідними умовами спряження

$$L_i u_i = f_i(x_i), \quad x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2(x_2) = 0, \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{19}$$
$$\left(B_j u\right) = \psi_j(x), \quad [C_j u] = 0, \quad x \in \gamma, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{20}$$

Цій задачі відповідає відображення

$$U = \left(u_1, u_2, C_1^1 u_1, \ldots, C_m^1 u_1\right) \xrightarrow{A_0} \left(L_1u_1, L_2u_2, (B_1 u), \ldots, (B_m u)\right),$$
$$u_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2|_S = 0, \quad [C_j u]|_\gamma = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Позначимо через A замикання цього відображення в гільбертовому просторі L_2^m. Область визначення $D(A)$ оператора A щільна в L_2^m. Спряжена задача відносно формули Гріна (7) до задачі (19), (20) має вигляд

$$L_i^+ v_i = g_i(x_i), \quad x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \quad B_j^+ v_2(x_2), \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{22}$$
$$\left(B_j^+ v\right) = \psi'_j(x), \quad \left[C_j^+ v\right] = 0, \quad x \in \gamma, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{23}$$

Аналогічно оператору A визначається оператор A^+ для спряженої задачі. Він діє на гладких векторах за законом

$$V = \left(v_1, v_2, C_1^{1+} v_1, \ldots, C_m^{1+}\right) \xrightarrow{A^+} \left(L_1^+ v_1, L_2^+ v_2, \left(B_1^+ v\right), \ldots, \left(B_m^+ v\right)\right),$$
$$v_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2, \quad B_j^+ v_2|_S = 0, \quad \left[C_j^+ v\right]|_\gamma = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{24}$$

З формули Гріна (7) випливає співвідношення

$$(AU, V)_m = (U, A^+V)_m, \quad U \in D(A), \quad V \in D(A^+).$$

Далі застосовуючи лему 1, визначаємо гладкість векторів із областей визначення $D(A)$, $D(A^*)$ відповідно оператора A і спряженого до нього оператора A^*.

Теорема 2. *Для кожного вектора* $U = (u_1, u_2, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in D(A) \subset L_2^m$, $Au = F_1$, $F_1 = (f_1, f_2, \psi_1, \ldots, \psi_m) \in L_2^m$, *існує розв'язок* $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in W_2^{2m+s_0}$ *рівняння* $\Lambda_{s_0}\tilde{u} = F \equiv (f_1, f_2, 0, \ldots, 0, \psi_1, \ldots, \psi_m, 0, \ldots, 0)$, $2m + s_0 = m_0 + 1/2$, $m_0 = \min_{1 \le j \le m} t_j$, $t_j = \max(t_j^1, t_j^2)$ (t_j^i — *порядок операторів* $B_j^i u_i$) *такий, що* $u_j = \tilde{u}_i|_{Q_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{u}_j = C_j^1 \tilde{u}_1|_\gamma$, $j = 1, \ldots, m$, *а також* $\tilde{u}_1|_{Q_1} \in W_{2,\text{лок.}}^{2m}(Q_1)$, $\tilde{u}_2|_{Q_2} \in W_{2,\text{лок.}}^{2m}(Q_2 \cup S)$.

Доведення. Як неважко бачити, для всіх векторів $F_1 = L_2^m$ відповідні їм вектори F належать простору $K_{(s_0, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$, $k_i = 2m + s_0 - m_i - 1/2$, $r_j = 2m + s_0 - t_j - 1/2$, $t_j = \max(t_j^1, t_j^2)$, $j = 1, \ldots, 2m$, і в той же час не всі такі вектори F належать простору більш гладких векторів $K_{(s, k_i^1, r_j^1)}^{(m, 2m)}$, $s > s_0$, такого типу.

Для довільного вектора $U \in D(A)$ в результаті граничного переходу у формулі Гріна (7) отримаємо співвідношення

$$\sum_{i=1}^{2} (f_i, v_i)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle \psi_j, C_j^{1+} v_i \right\rangle_\gamma = \sum_{i=1}^{2} (u_i^0, L_i^+ v_i)_{Q_i} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle \hat{u}_j, (B_j^+ v) \right\rangle_\gamma,$$

$$v_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2, \quad B_j^+ v_2|_S = 0, \quad [C_j^+ v]|_\gamma = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Використовуючи це співвідношення і враховуючи, що $F \in K_{(s_0, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$, як і в лемі 1, доводимо існування розв'язку, зазначеного в теоремі. Локальна гладкість цього розв'язку впритул до границі випливає з теореми про підвищення гладкості розв'язків [4]. Теорему доведено.

Твердження, подібне теоремі 2, справедливе також для векторів із області визначення $D(A^*)$ спряженого оператора A^*.

Теорема 3. *Для кожного вектора* $V = (v_1, v_2, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m) \in D(A^*) \subset L_2^m$, $A^* v = G_1$, $G_1 = (g_1, g_2, \psi_1', \ldots, \psi_m') \in L_2^m$, *існує розв'язок* $\tilde{v} = (\tilde{v}_1; \tilde{v}_2) \in W_2^{2m+t_0}$ *рівняння* $\Lambda_{t_0}^+ \tilde{v} = G$, $G = (g_1, g_2, 0, \ldots, 0, \psi_1', \ldots, \psi_m', 0, \ldots, 0)$, $2m + t_0 = m_0' + 1/2$, $m_0' = \min_{1 \le j \le m} t_j'$, $t_j' = \max(t_j^{1'}, t_j^{2'})$ ($t_j^{i'}$ — *порядок операторів* $B_j^{i+} v_i$), *для якого* $v_i = \tilde{v}_i|_{Q_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{v}_j = C_j^{1+} \tilde{v}_1$, $j = 1, \ldots, m$, *а також* $\tilde{v}_1|_{Q_1} \in W_{2,\text{лок.}}^{2m}(Q_1)$, $\tilde{v}_2|_{Q_2} \in W_{2,\text{лок.}}^{2m}(Q_2 \cup S)$.

Ця теорема доводиться аналогічно теоремі 2, лише замість оператора Λ_{s_0} потрібно взяти оператор $\Lambda_{t_0}^+$.

У теоремі 2 наводиться необхідна умова для того, щоб вектор $U = (u_1, u_2, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m)$ із L_2^m належав $D(A)$. Встановимо зараз випадки, коли ця умова буде також достатньою.

Теорема 4. *Нехай для регулярної еліптичної задачі трансмісії* (1), (2), (6) *виконується одна з таких умов:*

а) *порядки операторів в умовах спряження такі, що* $\min_{1 \le j \le m} t_j \ge m$, $t_j = \max(t_j^1, t_j^2)$, $j = 1, \ldots, m$, $\min_{1 \le j \le m} p_j \le m - 1$, $p_j = \max(t_{m+j}^1, t_{m+j}^2)$, $j = 1, \ldots, m$;

b) *системи операторів* $\left\{C_j^i u_i\right\}_{j=1}^m$, $i = 1, 2$, *накривають відповідно оператори* $L_i u_i$ *на* γ *і для порядків цих операторів виконується рівність*

$$\min_{1\le j\le m} t_{m+j}^1 = \min_{1\le j\le m} t_{m+j}^2 = m.$$

Тоді область визначення $D(A)$ *оператора* A *складається з усіх векторів* $U = (u_1, u_2, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in L_2^m$, *для яких існують розв'язки* $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2) \in \tilde{W}_2^{m+1/2}$ *рівняння* $\Lambda_{-m+1/2}\tilde{u} = F$ *при деяких* $F = (f_1, f_2, 0, \ldots, 0, \psi_1, \ldots, \psi_m, 0, \ldots, 0) \in L_2^{(m, 2m)}$ *такі, що* $u_i = \tilde{u}_i|_{Q_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{u}_j = C_j^1\tilde{u}_1|_\gamma$, $j = 1, \ldots, m$, *причому* $AU = F_1 = (f_1, f_2, \psi_1, \ldots, \psi_m)$.

Доведення. Розглянемо випадок a). З теореми 2 випливає, що для довільного вектора $U \in D(A)$ існує зазначений в теоремі 4 розв'язок.

Доведемо тепер, що довільний вектор $U \in L_2^m$, для якого існує зазначений розв'язок $\tilde{u}$, належить $D(A)$ і $AU = F_1$. Розкладемо такий розв'язок на дві складові $\tilde{u} = u' + \tilde{u}''$, $u' \in N$, $\tilde{u}'' \in \tilde{H}_{m+1/2}$, $(\tilde{u}'', N) = 0$. Нехай $\left\{F_1^n\right\}_{n=1}^\infty$ — послідовність гладких векторів $F_1^n = \left(f_1^n, f_2^n, \psi_1^n, \ldots, \psi_m^n\right)$, $f_i^n \in C^\infty(\overline{Q}_i)$, $i = 1, 2$, $\psi_j^n \in C^\infty(\gamma)$, $j = 1, \ldots, m$, які збігаються до F_1 в L_2^m і задовольняють умову існування розв'язку $[F^n, N] = 0$, $F^n = (f_1^n, f_2^n, 0, \ldots, 0, \psi_1^n, \ldots, \psi_m^n, 0, \ldots, 0)$. Послідовність $\left\{F^n\right\}_{n=1}^\infty$ збігається до F також в $K_{(-m+1/2, k_i, r_j)}^{(m, 2m)}$. Тому згідно з теоремою 1 про гомеоморфізми відповідні розв'язки $\tilde{u}^{n''} \in H_{m+1/2}$ $(\Lambda_{(-m+1/2)}\tilde{u}^{n''} = F^n)$ збігаються до $\tilde{u}''$, а $\tilde{u}^n = (\tilde{u}^{n''} + u') \to \tilde{u}$ в $\tilde{W}_2^{m+1/2}$. На підставі теореми про підвищення гладкості розв'язків [4] $\tilde{u}^n = (\tilde{u}_1^n; \tilde{u}_2^n) \in C^\infty(Q_i)$ і вектор $U^n = \left(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n, C_1^1\tilde{u}_1^n, \ldots, C_m^1\tilde{u}_1^n\right) \in D(A)$. Згідно з умовою a) для всіх j один із операторів $C_j^i\tilde{u}_i^n$, наприклад $C_j^2\tilde{u}_2^n$, має порядок $t_{m+j}^2 \le m-1$ і внаслідок теореми вкладення Соболева $C_j^2\tilde{u}_2^n \to C_j^2\tilde{u}_2$ в $L_2(\gamma)$, а разом з ним, з урахуванням $[C_j u] = 0$, збігається й другий член $C_j^1\tilde{u}_1^n \to C_j^1\tilde{u}_1$. Таким чином, $U^n \to U$, $F_1^n \to F_1$ в L_2^m, тобто $U \in D(A)$, $AU = F_1$.

У випадку b) із теореми 2 випливає тільки те, що для довільного $U \in D(A)$ існує розв'язок $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2) \in \tilde{W}_2^{s_0+2m}$, $(2m+s_0) \le m + 1/2$. Покажемо, що $\tilde{u} \in \tilde{W}_2^{m+1/2}$. Так, компоненти $\tilde{u}_i$, $i = 1, 2$, є розв'язками відповідно таких регулярних еліптичних задач:

$$L_1 u = f_1 \quad \text{в} \quad Q_1, \quad C_j^1 u_1 = \hat{u}_j \quad \text{на} \quad \gamma, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{25}$$

$$L_2 u = f_2 \quad \text{в} \quad Q_2, \quad B_j u_2 = 0 \quad \text{на} \quad S, \quad C_j^2 u_2 = \hat{u}_j \quad \text{на} \quad \gamma, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{26}$$

де вектор правих частин першої задачі $(f_1, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in L_2^m$, а другої $(f_2, 0, \ldots, 0, \hat{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m) \in L_2^{2m}$. Зрозуміло, що ці вектори належать також відповідно просторам

$$K_1 = W_2^{s_1} \dotplus \sum_{j=1}^m W_2^{k_j^1}(\gamma), \qquad K_2 = W_2^{s_1} \dotplus \sum_{j=1}^m W_2^{r_i}(S) \dotplus \sum_{j=1}^m W_2^{k_j^2}(\gamma),$$

де $s_1 = -m + 1/2$, $k_j^1 = 2m + s_1 - t_{m+j}^1 - 1/2$, $r_i = 2m + s_1 - m_i - 1/2$, $k_j^2 = 2m + s_1 - t_{m+j}^2 - 1/2$. Враховуючи це, застосовуємо до задач (25), (26) теорему про гомеоморфізми [4]. Тоді маємо $\tilde{u}_i \in \tilde{W}_2^{m+1/2}(Q_i)$, $i = 1, 2$, тобто $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2) \in \tilde{W}_2^{m+1/2}$.

Нехай тепер у випадку b) $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2)$ — довільний такий розв'язок, зазначений в теоремі. Покажемо, що відповідний вектор $U = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, C_1^1\tilde{u}_1, \ldots C_m^1\tilde{u}_1) \in D(A)$, $AU = F_1$. Функції $\tilde{u}_i$, $i = 1, 2$, — розв'язки відповідно задач (25), (26) при правих частинах $G_i = \left(f_i, C_1^1\tilde{u}_1, \ldots, C_m^1\tilde{u}_1\right)$. Розглянемо дві послідовності гладких векторів $\{G_i^n\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, $G_i^n = \left(f_i^n, g_1^n, \ldots, g_m^n\right)$, $f_i^n \in C^{\infty}(\overline{Q}_i)$, $g_i^n \in C^{\infty}(\gamma)$, які задовольняють умови існування розв'язків відповідно задач (25), (26), $\left[G_i^n, N_i^+\right] = 0$, $i = 1, 2$; N_i^+ — ядра цих задач, і які збігаються в L_2^m відповідно до векторів G_i, $i = 1, 2$. На підставі теореми про гомеоморфізми для еліптичних задач [4] існують гладкі розв'язки $u_i^n \in C^{\infty}(\overline{Q}_i)$, $i = 1, 2$, задач (25), (26) з правими частинами G_i^n. Ці розв'язки збігаються до $\tilde{u}_i$ в $\tilde{W}_2^{m+1/2}(Q_i)$. Оскільки праві частини $G_i^n \to G_i$, $i = 1, 2$, відповідно в K_1, K_2, розв'язки $u_i^n \to \tilde{u}_i$ в $\tilde{W}_2^{m+1/2}(Q_i)$. Згідно з умовою b) теореми порядки операторів $B_j^i u_i$ будуть $t_j^i \leq m - 1$, і тому на підставі теорем вкладення Соболєва $B_j^i u_i^n \to B_j^i \tilde{u}_i$ в $L_2(\gamma)$. Таким чином, відповідний розв'язкам u_i^n, $i = 1, 2$, вектор $U^n = (u_1^n, u_2^n, C_1^1 u_1^n, C_m^1 u_1^n) \to U = \left(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, C_1^1\tilde{u}_1, C_m^1\tilde{u}_1\right)$, а вектор $AU^n = (f_1^n, f_2^n, (B_1 u^n), \ldots, (B_m u^n)) \to F_1$ в L_2^m. Теорему доведено.

Твердження, аналогічне теоремі 4, справедливе також для спряженого оператора A^*.

Теорема 5. *Нехай для операторів спряженої задачі* (22), (23) *виконуються умови, аналогічні умовам теореми* 4. *Тоді область визначення* $D(A^*)$ *спряженого оператора* A^* *складається з усіх векторів* $V = (v_1, v_2, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m) \in L_2^m$, *для яких існує розв'язок* $\tilde{v} = (\tilde{v}_1; \tilde{v}_2) \in \tilde{W}_2^{m+1/2}$ *рівняння* $\Lambda_{-m+1/2}^{+}\tilde{v} = G$, $G = (g_1, g_2, 0, \ldots, 0, \psi_1', \ldots, \psi_m', 0, \ldots, 0) \in L_2^{(m, 2m)}$ *такий, що* $v_i = \tilde{v}_i|_{Q_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{v}_j = C_j^{1+}\hat{v}_1$, $j = 1, \ldots, m$, *при цьому* $A^* v = G_1$, $G_1 = (g_1, g_2, \psi_1', \ldots, \psi_m')$; *а також* $A^* = A^+$.

Доведення. Для довільного вектора $V \in D(A^*)$ існування відповідного розв'язку $\tilde{u} \in \tilde{W}_2^{m+1/2}$ випливає з теореми 3.

Нехай тепер $\tilde{v}$ — довільний такий розв'язок. Покажемо, що відповідний вектор $V = \left(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, C_1^{1+}\tilde{v}_1, \ldots, C_m^{1+}\tilde{v}_1\right) \in D(A^*)$. Для цього, як і в теоремі 4 для випадків a) і b), побудуємо послідовність гладких розв'язків $\left\{\tilde{v}^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, які збігаються до $\tilde{v}$ в $\tilde{W}_2^{m+1/2}$ і для яких відповідні вектори $V^n \in \in D(A^*)$, $V^n \to \to V$, $G_1^n \to G_1$ у просторі L_2^m. Таким чином, $V \in D(A^+)$, $A^* \subseteq A^+$. Теорему доведено.

Тепер можна встановити випадки, коли оператор A буде самоспряженим. Як випливає з формули Гріна (7), коли всі оператори задачі трансмісії формально самоспряжені (18), оператор A буде симетричним $((AU, V)_m = (U, AV)_m$, U, $V \in D(A))$.

Справедливе наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай регулярна еліптична задача трансмісії* (19), (20) *формально самоспряжена* (18) *і виконується одна з умов a) чи b) теореми* 4.

Тоді оператор A (21) *буде самоспряженим.*

Доведення. У зазначених у лемі випадках задача (19), (20) співпадає зі спряженою задачею (22), (23) і $A = A^+$. На підставі теореми 5 $A^* = A^+$ і, отже, $A^* = A$, що й потрібно було довести.

Задача трансмісії з спектральним параметром у рівняннях і умовах спряження

$$L_i u_i = \lambda u_i(x_i), \quad x_i \in Q_i; \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2(x_2) = 0, \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \dots, m, \tag{27}$$

$$(B_j u) = \lambda C_j^1 u_1(x), \quad [C_j u] = 0, \quad x \in \gamma, \quad j = 1, \dots, m. \tag{28}$$

записується у вигляді операторного рівняння $AU = \lambda U$. У випадку, коли виконується умова а) теореми 4, самоспряжений оператор A має дискретний спектр. Це випливає з теореми 1 про гомеоморфізми і теореми Соболєва про повну неперервність операторів вкладення.

Розглянемо тепер випадок задачі трансмісії, коли неоднорідними будуть половина умов спряження лише на частині поверхні $\gamma_1 \subset \gamma$:

$$L_i u_i = f_i(x_i), \quad x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2 = 0, \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \dots, m, \tag{29}$$

$$(B_j u) = \psi_j(x) \ \text{ на } \ \gamma_1 \subset \gamma, \quad (B_j u) = 0 \ \text{ на } \ \gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1, \quad j = 1, \dots, m, \tag{30}$$

$$[C_j u] = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{31}$$

Введемо гільбертовий простір $L^m_{2,\gamma_1} = L_2(Q_1) \oplus L_2(Q_2) \oplus \sum_{j=1}^m L_2(\gamma_1^j)$, $\gamma_1^j = \gamma_1, j = 1, \dots, m$. Позначимо через A_1, A_2 замикання в L^m_{2,γ_1} відповідно наступних відображень, які визначаються цією задачею:

$$U = \left(u_1, u_2, C_1^1 u_1|_{\gamma_1}, \dots, C_m^1 u_1|_{\gamma_1}\right) \xrightarrow{A_1} \left(L_1 u_1, L_2 u_2, (B_1 u)|_{\gamma_1}, \dots, (B_m u)|_{\gamma_1}\right),$$

$$U = \left(u_1, u_2, (B_1 u)|_{\gamma_1}, \dots, (B_m u)|_{\gamma_1}\right) \xrightarrow{A_2} \left(L_1 u_1, L_2 u_2, -C_1^1 u_1|_{\gamma_1}, \dots, -C_m^1 u_1|_{\gamma_1}\right),$$

$$u_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2|_S = 0, \quad (B_j u)|_{\gamma_2} = 0, \quad [C_j u]|_\gamma = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Для операторів A_1, A_2 справедливе наступне твердження.

Наслідок 2. *Для регулярної еліптичної задачі трансмісії* (29)–(31), *яка формально самоспряжена* (18) *і виконується умова а) теореми* 4, *відповідні оператори* A_1, A_2 *також будуть самоспряженими.*

Це твердження доводиться так само, як наслідок 1 у випадку а) теореми 4.

Аналогічне твердження справедливе також для наступної задачі, подібної (29)–(31), частину умов спряження якої замінено крайовими умовами

$$L_i u_i = f_i(x_i), \quad x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2 = 0, \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \dots, m, \tag{32}$$

$$(B_j u) = \psi_j(x) \ \text{ на } \ \gamma_1 \subset \gamma, \quad (B_j u) = 0 \ \text{ на } \ \gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1, \quad j = 1, \dots, m, \tag{33}$$

$$\begin{gathered} [C_j u] = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{на} \quad \gamma_1, \\ C_j^i u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{на} \quad \gamma_2. \end{gathered} \tag{34}$$

4. Загальною задачею трансмісії (1), (2), (6) при однорідних крайових умовах на S визначається відображення з меншим числом компонент, ніж в (17), а саме:

$$\begin{gathered} \left(u_1|_{Q_1}, u_2|_{Q_2}, \left\{C_j^1 u_1|_\gamma\right\}_{j=1}^m, \left\{B_j^2 u_2|_\gamma\right\}_{j=1}^m\right) \to \\ \to \left(L_1 u_1, L_2 u_2, \left\{(B_j u)_\gamma\right\}_{j=1}^m, \left\{[C_j u]|_\gamma\right\}_{j=1}^m\right), \\ u_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2|_S, \quad j = 1, \dots, m. \end{gathered} \tag{35}$$

Позначимо через Ω оператор, який одержується в результаті замикання цього відображення в L_2^{2m}. Область визначення $D(\Omega)$ щільна в L_2^{2m}. Використовуючи лему 1, як у теоремі 2, доводиться наступне твердження.

Теорема 6. *Для векторів* $U = (u_1, u_2, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{2m}) \in D(\Omega)$ $(\Omega U = F_1,$ $F_1 = (f_1, f_2, \psi_1, \ldots, \psi_{2m}))$ *існують розв'язки* $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2) \in \tilde{W}_2^{t_0+1/2}$ *задачі трансмісії* (1), (2), (6) ($\Lambda_{(t_0-2m+1/2)}\tilde{u} = F$, $F = (f_1, f_2, 0, \ldots, 0, \psi_1, \ldots, \psi_{2m})$, $t_0 = \min_{1 \le j \le 2m} t_j$, $t_j = \max\left(t_j^1, t_j^2\right)$, t_j^i — *порядок операторів* $B_j^i u_i$), *для яких* $u_i = \tilde{u}_i|_{Q_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{u}_j = C_j^1 \tilde{u}_1$, $\hat{u}_{m+j} = B_j^2 \tilde{u}_2$, $j = 1, \ldots, m$, *а також* $\tilde{u}_1|_{Q_1} \in W^{2m}_{2,\,\text{лок.}}(Q_1)$, $\tilde{u}_2|_{Q_2} \in W^{2m}_{2,\,\text{лок.}}(Q_2 \cup S)$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай для задачі трансмісії* (1), (2), (6) $(\phi_j = 0,\ j = 1, \ldots, m)$, *яка є формально самоспряженою* (18), *виконується умова* $t_0 = = \min_{1 \le j \le 2m} t_j = m$. *Тоді оператор* Ω *є самоспряженим.*

Ця теорема доводиться подібно до наслідку 1 у випадку а), при цьому використовуються лема 1 і теорема 6.

Виділимо з кожної системи $\left\{\tilde{B}_j^i\right\}_{j=1}^{2m}$, $i = 1, 2$, всі підсистеми m операторів $\left\{\tilde{B}_{j_k}^i\right\}_{k=1}^{m}$, $i = 1, 2$, які накривають відповідно оператори $L_i u_i$, $i = 1, 2$, на γ. Перенумеруємо такі підсистеми за допомогою індексу n і позначимо через q_n^i найменший із порядків операторів n-ї такої підсистеми. Позначимо $q_i = = \max_n q_n^i$, $0 \le q_i \le m$. Зазначені в теоремі 6 розв'язки $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2)$, відповідні векторам $U \in D(\Omega)$, у випадках, коли $t_0 < m$, можуть бути більш гладкими. Так, справедлива наступна лема.

Лема 2. *У випадках, коли* $q_i > t_0$, *зазначені в теоремі* 6 *розв'язки* $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2) \in \tilde{W}_2^{t_0+1/2}$, *які відповідають векторам* $U \in D(\Omega)$, *мають компоненти* $\tilde{u}_i \in \tilde{W}_2^{(q_i+1/2)}(Q_i)$.

Для доведення достатньо буде зауважити, що компоненти $\tilde{u}_i$ будуть розв'язками в областях Q_i регулярних еліптичних задач, у яких найменший порядок операторів $\tilde{B}_{j_k}^i u_i$, $k = 1, \ldots, m$, на γ дорівнює q_i, а праві частини $f_i \in \in L_2(\Omega_i)$, $\psi_i \in L_2(\gamma)$. При цьому твердження леми випливає з теореми про підвищення гладкості розв'язків [4].

Теорема 8. *Нехай в регулярній еліптичній задачі трансмісії* (1), (2), (6) $(\phi_j = = 0,\ j = 1, \ldots, m)$ *для введених вище порядків* q_i *виконується умова* $q_1 = q_2 = = m$. *Тоді область визначення* $D(\Omega)$ *оператора* Ω *складається з усіх векторів* $U = (u_1, u_2, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{2m}) \in L_2^{2m}$, *для яких існують розв'язки* $\tilde{u} = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2) \in \in \tilde{W}_2^{m+1/2}$ *рівняння* $\Lambda_{(-m+1/2)}\tilde{u} = F$, $F = (f_1, f_2, 0, \ldots, 0, \psi_1, \ldots, \psi_{2m})$, *такі, що* $u_i = \tilde{u}_i|_{Q_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{u}_j = C_j^1 \tilde{u}_1$, $\hat{u}_{m+j} = B_j^2 \tilde{u}_2$, $j = 1, \ldots, m$, *а також* $\tilde{u}_1|_{Q_1} \in \tilde{W}^{2m}_{2,\,\text{лок.}}(Q_1)$, $\tilde{u}_2|_{Q_2} \in \tilde{W}^{2m}_{2,\,\text{лок.}}(Q_2 \cup S)$; *при цьому* $\Omega U = F_1$, $F_1 = = (f_1, f_2, \psi_1, \ldots, \psi_{2m})$.

Ця теорема доводиться аналогічно теоремі 4, пункт b), шляхом побудови гладких розв'язків $\tilde{u}_i^n$, $i = 1, 2$, які збігаються до $\tilde{u}_i$ в просторі $\tilde{W}_2^{m+1/2}(Q_i)$ і для яких відповідні $U^n \to U$ в L_2^{2m}.

***Наслідок* 3.** *Нехай для задачі трансмісії* (1), (2), (6) *виконуються умови теореми* 8, *а також умова формальної самоспряженості* (18). *Тоді оператор* Ω *самоспряжений.*

Цей наслідок доводиться аналогічно до наслідку 1, з використанням теореми 8 і подібного твердження для оператора Ω^*.

У вигляді операторного рівняння $\Omega U = \lambda U$ записується задача на власні значення з параметром у рівняннях та умовах спряження

$$L_i u_i = \lambda u_i(x), \quad x \in Q_i, \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2(x_2) = 0, \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{36}$$

$$(B_j u) = \lambda C_j^1 u_1(x), \qquad \left[C_j u \right] = \lambda B_j^2 u_2(x), \qquad x \in \gamma, \quad j = 1, \ldots, 2m. \tag{37}$$

Розглянемо випадок задачі трансмісії, коли на одній частині $\gamma_1 \subset \gamma$ поверхні спряження всі умови спряження неоднорідні, а на іншій $\gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1$ всі вони однорідні:

$$L_i u_i = f_i(x_i), \quad x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2(x_2) = 0, \quad x_2 \in S, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{38}$$

$$(B_j u) = \psi_j(x), \qquad \left[C_j u \right] = \psi_{m+j}(x), \qquad x \in \gamma_1, \quad j = 1, \ldots, 2m, \tag{39}$$

$$(B_j u) = \left[C_j u \right] = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \text{ на } \gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1. \tag{40}$$

Цій задачі відповідає оператор Ω_2, який отримується в результаті замикання в L_2^{2m} відображення

$$\left(u_1 \big|_{Q_1}, u_2 \big|_{Q_2}, \left\{ C_j^1 u_1 \big|_{\gamma_1} \right\}_{j=1}^m, \left\{ B_j^2 u_2 \big|_{\gamma_1} \right\}_{j=1}^m \right) \to$$
$$\to \left(L_1 u_1, L_2 u_2, \left\{ (B_j u_2)_{\gamma_1} \right\}_{j=1}^m, \left\{ (C_j u)_{\gamma_1} \right\}_{j=1}^m \right), \tag{41}$$

$$u_i \in C^\infty(\overline{Q}_i), \quad i = 1, 2, \quad B_j u_2 \big|_S = 0; \quad (B_j u) \big|_{\gamma_2} = \left[C_j u \right] \big|_{\gamma_2} = 0, \; j = 1, \ldots, m.$$

Для оператора Ω_2 справедливе наступне твердження.

Теорема 9. *Якщо оператори задачі* (38) – (40) *задовольняють умови теореми* 7, *то оператор* Ω_2 *самоспряжений.*

Доведення. Згідно з лемою 1 векторам $U \in D(\Omega_2)$ відповідають розв'язки $\tilde{u}$ задачі (38) – (40), що належать $\tilde{W}_2^{m+1/2}$. Подібно до теореми 4 у випадку а) доводиться, що, навпаки, для довільного такого розв'язку відповідний вектор $U \in D(\Omega_2)$. Далі, як в наслідку 1, встановлюється самоспряженість оператора Ω_2. Теорему доведено.

Цей випадок задачі трансмісії цікаво порівняти з задачею (29) – (31), де умови спряження частково неоднорідні на γ_1.

5. Розглянемо оператори, що породжуються задачами трансмісії з однорідними рівняннями в областях Q_i і з неоднорідними умовами спряження на γ. Нехай у задачі (19), (20) праві частини рівнянь $f_1 = f_2 = 0$. Введемо ортогональну суму

$$\hat{L}_2^m = \oplus \sum_{j=1}^m L_2(\gamma^j), \qquad \gamma^j = \gamma, \quad j = 1, \ldots, m,$$

гільбертових просторів $L_2(\gamma)$ функцій, визначених на поверхні γ. Простір $\hat{L}_2^m$ можна розглядати які підпростір в L_2^m. Будемо позначати його елементи через $\hat{U}$, $\hat{V}$; довільному вектору $U = (u_1, u_2, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m)$ із простору L_2^m відповідає вектор $\hat{U} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in \hat{L}_2^m$, який є його слідом на γ. Позначимо через M множину всіх векторів $U = (u_1^0, u_2^0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in D(A)$, для яких відповідні вектори $AU = (f_1, f_2, \psi_1, \ldots, \psi_{2m})$ мають перші дві компоненти, що дорівнюють нулю $(f_1 = 0, \; f_2 = 0)$. Згідно з теоремою 2, перші дві компоненти таких векторів U будуть гладкими розв'язками $(u_i^0 \in C^\infty(Q_i), \; i = 1, 2)$ рівнянь $L_i u_i^0 = 0$.

Далі будемо вважати, що виконується умова E: кожний вектор $U \in M$, слід якого дорівнює нулю $\hat{U} \equiv (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) = 0$, також дорівнює нулю: $U \equiv 0$. Позначимо через $\hat{M}$ множину слідів $\hat{U}$ на γ всіх векторів $U \in M$. За допомогою оператора A на множині $\hat{M}$ визначається оператор B у просторі $\hat{L}_2^m$, який діє за законом

$$\hat{L}_2^m \ni \hat{U} \xrightarrow{B} \widehat{AU} = (\psi_1, \ldots, \psi_m). \tag{42}$$

З теореми 2 випливає, що для довільного вектора $\hat{U} \in D(B)$ існує сильний розв'язок $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ задачі трансмісії (19), (20) $(f_1 = f_2 = 0)$, для якого $\hat{u}_j = C_j^1 \tilde{u}_1$, $j = 1, \ldots, m$.

Наслідок 4. *Якщо виконуються умови наслідку* 1, *при яких оператор A самоспряжений в L_2^m і виконується умова E, а область значень $R(B)$ щільна в $\hat{L}_2^m$, то оператор B самоспряжений.*

Це твердження доводиться аналогічно до доведення наслідку 1.

Теорема 10. *Нехай оператор A самоспряжений і для нього існує неперервний обернений оператор A^{-1}, визначений на всьому просторі L_2^m. Тоді оператор B також самоспряжений і для нього існує неперервний обернений B^{-1}, визначений на всьому просторі L_2^m.*

Доведення. Легко бачити, що B — симетричний оператор і для нього існує неперервний обернений оператор B^{-1}, визначений на всьому просторі $\hat{L}_2^m$, оскільки таким є оператор A в L_2^m і виконуються рівності

$$(B\hat{U}, \hat{V})_{\hat{L}_2^m} = (AU, V)_{L_2^m} = (U, AV)_{L_2^m} = (\hat{U}, B\hat{V})_{\hat{L}_2^m} \qquad \forall \hat{U}, \hat{V} \in D(B).$$

Оператор B^{-1} також симетричний. З урахуванням зазначеного вище відносно оператора B^{-1} він буде самоспряженим. Тому оператор B, як обернений до обмеженого самоспряженого, також самоспряжений. Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли A^{-1} не існує. Вважаємо, що для оператора A виконується прийнята умова E. Позначимо через $\hat{N}$ множину слідів на γ всіх векторів $U \in N \subset M$ (N — ядро оператора A). Нехай $\hat{A}$ — звуження оператора A на підпростір $M_1 = L_2^m \ominus N$. Оператор $\hat{A}$ буде самоспряженим у підпросторі M_1. Позначимо також через $\hat{B}$ звуження оператора B на підпростір $\hat{M}_1 = \hat{L}_2^m \ominus \hat{N}$.

Теорема 11. *Нехай для задачі трансмісії виконуються умови наслідку* 1, *при яких оператор A буде самоспряженим і його ядро $N \neq \varnothing$. Нехай також його звуження A на підпростір M_1 має неперервний обернений оператор A^{-1}, визначений на всьому M_1. Тоді оператор B також буде самоспряженим в L_2^m, а його звуження $\hat{B}$ на $\hat{M}_1$ матиме неперервний обернений оператор $\hat{B}^{-1}$, визначений на всьому підпросторі $\hat{M}_1$.*

Задачами трансмісії вигляду (29) – (31), (32) – (34), (38) – (40) з однорідними рівняннями $(f_1 = f_2 = 0)$ і неоднорідними умовами спряження на частині поверхні $\gamma_1 \subset \gamma$ також породжуються оператори типу оператора B. Введемо для цих задач ортогональну суму

$$\hat{L}_{2,\gamma_1}^m = \oplus \sum_{j=1}^m L_2(\gamma_1^j), \qquad \gamma_1^j = \gamma_1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

гільбертових просторів $L_2(\gamma_1)$ функцій, визначених на частині поверхні γ_1.

Для задачі (29) – (31) позначимо через M_i, $i = 1, 2$, відповідно множини векторів $U = \left(u_1^0, u_2^0, \hat{u}_1\big|_{\gamma_1}, \ldots, \hat{u}_m\big|_{\gamma_1}\right)$ областей визначення $D(A_i)$ операторів A_i, $i = 1, 2$, для яких перші дві компоненти векторів $A_i U$, $i = 1, 2$, рівні нулю ($f_1 = f_2 = 0$). Позначимо через $\hat{M}_i$ множини слідів $\hat{U} = \left(\hat{u}_1\big|_{\gamma_1}, \ldots, \hat{u}_m\big|_{\gamma_1}\right)$ на γ_1 всіх векторів $U \in M_i$, $i = 1, 2$. Нехай для векторів $U \in M_i$ виконується умова E_1, подібна наведеній вище умові E, а саме: якщо для вектора $U \in M_i$ його слід $\hat{U} = 0$, то також $u_1^0 = u_2^0 = 0$, тобто $U \equiv 0$. Введемо в просторі $\hat{L}^m_{2,\gamma_1}$ оператори B_1, B_2, які діють відповідно за законами

$$\hat{L}^m_{2,\gamma_1} \supset \hat{M}_i \ni \hat{U} \xrightarrow{B_i} \widehat{A_i U} = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \hat{L}^m_{2,\gamma_1}, \qquad i = 1, 2. \tag{43}$$

У випадку, коли умова E_1 виконується одночасно для векторів множин M_1 і M_2, оператор $B_2 = -B_1^{-1}$.

Якщо для задачі трансмісії (29) – (31) з однорідними рівняннями виконуються умови наслідку 2, то породжені нею в просторі $\hat{L}^m_{2,\gamma_1}$ оператори B_1, B_2 будуть самоспряженими. Для операторів B_i, $i = 1, 2$, справедливе також твердження, аналогічне теоремі 10.

Подібно будуються оператори типу B, які діють на поверхні спряження γ, а також на частині поверхні $\gamma_1 \subset \gamma$, в інших, розглянутих вище, випадках задачі трансмісії.

Наведемо приклади самоспряжених операторів, породжених задачами трансмісії для рівнянь другого порядку з неоднорідними умовами спряження. Розглянемо задачу трансмісії з неоднорідними умовами спряження на всій поверхні γ:

$$L_k u_k(x) := -\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + c_k(x)u_k = f_k(x), \quad x \in Q_k, \quad k = 1, 2, \tag{44}$$

$$(B_1 u) \equiv \frac{\partial u_1}{\partial \mu} - \frac{\partial u_2}{\partial \mu} = \psi_1(x), \qquad [C_1 u] \equiv u_1 - u_2 = \psi_2(x), \qquad x \in \gamma, \tag{45}$$

$$u_2(x_2) = 0, \qquad x_2 \in S, \tag{46}$$

де $L_k u_k$ — формально самоспряжені еліптичні вирази з дійсними гладкими коефіцієнтами, визначеними в $\overline{Q}_k$;

$$a_{ij}^k = a_{ji}^k, \qquad \frac{\partial u_k}{\partial \mu} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)$$

— похідна за конормаллю; $\overline{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до границі γ області Q_1.

Цій задачі відповідає оператор Ω_0 в гільбертовому просторі $L_2 = L_2(Q_1) \oplus L_2(Q_2) \oplus L_2(\gamma) \oplus L_2(\gamma)$, який діє за законом

$$\left(u_1\big|_{Q_1}, u_2\big|_{Q_2}, u\big|_{\gamma}, -\frac{\partial u_2}{\partial \mu}\Big|_{\gamma}\right) \xrightarrow{\Omega_0} \left(L_1 u_1\big|_{Q_1}, L_2 u_2\big|_{Q_2}, (B_1 u)_\gamma, [C_1 u]_\gamma\right),$$

$$u_i \in C^\infty(Q_i), \qquad i = 1, 2, \qquad u_2 = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{47}$$

Неважко впевнитися, що цей оператор симетричний і на підставі наслідку 3 є самоспряженим за суттю, тобто оператор $\Omega = \overline{\Omega}_0$ самоспряжений.

Для задачі (44) – (46) з однорідними рівняннями ($f_1 = f_2 = 0$) виконується умова, подібна умові E, і тому можна побудувати оператор типу B, який діє на всій поверхні γ і є самоспряженим.

Можна задати неоднорідні умови спряження (45) на частині поверхні $\gamma_1 \subset \gamma$ а на іншій частині $\gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1$ задати однорідні умови, а саме: крайові умови $\partial u_1 / \partial\mu = \partial u_2 / \partial\mu = 0$ і умову спряження $[Cu] = 0$. У такому випадку відповідний оператор визначається за допомогою відображення в просторі $L_2(Q_1) \oplus \oplus L_2(Q_2) \oplus L_2(\gamma_1) \oplus L_2(\gamma_1)$

$$\left(u_1\Big|_{Q_1}, u_2\Big|_{Q_2}, u\Big|_{\gamma_1}, -\frac{\partial u_2}{\partial\mu}\Big|_{\gamma_1}\right) \xrightarrow{\Omega_0} \left(L_1 u_1\Big|_{Q_1}, L_2 u_2\Big|_{Q_2}, (B_1 u)_{\gamma_1}, [C_1 u]_{\gamma_1}\right), \quad (48)$$

$$u_i \in C^\infty(Q_i), \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial\mu}\Big|_{\gamma_2} = \frac{\partial u_2}{\partial\mu}\Big|_{\gamma_2} = 0, \quad [Cu]_{\gamma_2} = 0, \quad u_2(x_2) = 0, \quad x_2 \in S.$$

Цей оператор буде в суттєвому самоспряженим.

Для другого прикладу розглянемо задачу трансмісії з умовами спряження, повністю неоднорідними на одній частині поверхні $\gamma_1 \subset \gamma$ і однорідними на другій частині $\gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1$:

$$L_k u_k(x) := -\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + c_k(x)u_k = f_k(x), \quad x \in Q_k, \quad k = 1, 2, \quad (49)$$

$$(B_1 u) \equiv \frac{\partial u_1}{\partial\mu_1} + p^2 u_1 + pq u_2 = \psi_1(x), \quad x \in \gamma_1, \quad (50)$$

$$[C_1 u] \equiv pq u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial\mu_2} + q^2 u_2 = \psi_2(x), \quad x \in \gamma_1, \quad (51)$$

$$(B_1 u) \equiv [C_1 u] = 0 \text{ на } \gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1, \quad u_2(x_2) = 0, \quad x_2 \in S, \quad (52)$$

де функції $c_1(x_1) > 0$, $c_2(x_2) \geq 0$; $p(x)$, $q(x)$ — гладкі функції, $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$.

У цій задачі поверхня спряження γ може дотикатися до граничної поверхні S і на частині поверхні γ_2 можна задати також замість умови спряження (52) однорідні умови $u_1\big|_{\gamma_2} = u_2\big|_{\gamma_2} = 0$.

Задача (49) – (52) є регулярною еліптичною задачею трансмісії. Введемо для неї ваговий гільбертовий простір $L_{2,\rho} = L_2(Q_1) \oplus L_2(Q_2) \oplus L_{2,\rho}(\gamma_1) \oplus L_{2,\rho}(\gamma_1)$, $L_{2,\rho}(\gamma_1)$ — ваговий гільбертовий простір функцій, визначених на γ_1, із скалярним добутком

$$\langle \rho u, v \rangle_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} \rho u v\, ds, \quad \rho(x) = \frac{1}{|pq|}.$$

Задачі (49) – (52) відповідає оператор Ω_2 (41), який одержується в результаті замикання в $L_{2,\rho}$ такого відображення:

при $pq > 0$

$$\left(u_1\big|_{Q_1}, u_2\big|_{Q_2}, pq u_1\big|_{\gamma_1}, pq u_2\big|_{\gamma_1}\right) \xrightarrow{\Omega_2} \left(L_1 u_1\big|_{Q_1}, L_2 u_2\big|_{Q_2}, (B_1 u)_{\gamma_1}, [C_1 u]_{\gamma_1}\right),$$

при $pq < 0$

$$\left(u_1\big|_{Q_1}, u_2\big|_{Q_2}, -pq u_1\big|_{\gamma_1}, pq u_2\big|_{\gamma_1}\right) \xrightarrow{\Omega_2} \left(L_1 u_1\big|_{Q_1}, L_2 u_2\big|_{Q_2}, (B_1 u)_{\gamma_1}, -[C_1 u]_{\gamma_1}\right),$$

$$u_i \in C^\infty(Q_i), \quad u_2\big|_S = 0, \quad (B_1 u)_{\gamma_2} = [C_1 u]_{\gamma_2} = 0.$$

Оператор Ω_2 є самоспряженим додатно визначеним оператором з дискретним спектром. Для цієї задачі також виконується зазначена вище умова E_1 і, як B_1, будується оператор B_{γ_1} на частині поверхні γ_1, який має такі ж властивості.

У суттєвому самоспряженим у просторі $L_{2,\rho}(\gamma_1)$ буде також оператор, який діє за законом:

при $pq > 0$

$$\left(u_1\Big|_{Q_1}, u_2\Big|_{Q_2}, \left(\frac{\partial u_1}{\partial \mu_1} + p^2 u_1\right)_{\gamma_1}, -\left(\frac{\partial u_2}{\partial \mu_2} + q^2 u_2\right)_{\gamma_1}\right) \to$$

$$\to \left(L_1 u_1\Big|_{Q_1}, L_2 u_2\Big|_{Q_2}, -[C_1 u]_{\gamma_1}, (B_1 u)_{\gamma_1}\right),$$

при $pq < 0$

$$\left(u_1\Big|_{Q_1}, u_2\Big|_{Q_2}, \left(\frac{\partial u_1}{\partial \mu_1} + p^2 u_1\right)_{\gamma_1}, \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mu_2} + q^2 u_2\right)_{\gamma_1}\right) \to$$

$$\to \left(L_1 u_1\Big|_{Q_1}, L_2 u_2\Big|_{Q_2}, [C_1 u]_{\gamma_1}, (B_1 u)_{\gamma_1}\right),$$

$$u_i \in C^\infty(Q_i), \quad u_2\Big|_S = 0, \quad (B_1 u)_{\gamma_2} = [C_1 u]_{\gamma_2} = 0.$$

За допомогою встановленої формули Гріна (7) для розглянутих вище задач трансмісії з неоднорідними умовами спряження досліджується відповідна матриця-функція Гріна, а для побудованих операторів розвивається спектральна теорія самоспряжених операторів, викладена в [17].

1. *Ильин В. И.* О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1961. – **137**, № 1. – С. 28–31.
2. *Schechter M.* A generalization of the problem of transmission // Ann. Soc. norma. super. Pisa. – 1960. – **14**. – P. 207–236.
3. *Шефтель З. Г.* Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 3. – С. 636–668.
4. *Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 122–129.
5. *Ройтберг Б. Я.* Задачи трансмиссии в областях с негладкими границами // Допов. НАН України. – 1996. – № 3. – С. 15–20.
6. *Агранович М. С., Менникен Р.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 1. – С. 29–68.
7. *Дейнека В. С., Сергієнко І. В., Скопецький В. В.* Задачі на власні значення з розривними власними функціями та їх чисельні розв'язки // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1317–1323.
8. *Комаренко О. Н., Троценко В. А.* Варіаційний метод розв'язання задач трансмісії з головною умовою спряження // Там же. – 1999. – **51**, № 6. – С. 762–775.
9. *Odnoff J.* Operator generated by differential problems with eigenvalue parameter in equation and boundary condition // Medd. Lunds univ. math. semin. – 1959. – **14**. – P. 35–69.
10. *Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф.* К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 740–748.
11. *Ercolano J., Schechter M.* Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems // Communs Pure and Appl. Math. – 1965. – **18**, № 1, 2. – С. 83–105.
12. *Барковский В. В., Ройтберг Я. А.* О минимальном и максимальном операторах, соответствующих общей эллиптической задаче с неоднородными граничными условиями // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 2. – С. 91–97.
13. *Барковский В. В.* Самосопряженность операторов, порожденных общими эллиптическим выражением и неоднородными граничными условиями, заданными на части границы ограниченной области // Там же. – 1970. – **22**, № 4. – С. 527–531.
14. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Там же. – 1967. – **19**, № 5. – С. 3–32.
15. *Нижник Л. П., Тараборкин Л. А.* О самосопряженных операторах, порожденных неоднородными эллиптическими задачами с разрывными граничными условиями и условиями сопряжения // Там же. – 1991. – **43**, № 3. – С. 374–381.
16. *Нижник Л. П., Тараборкин Л. А.* Эволюционная задача для гармонических функций в области с тонким включением // Допов. НАН України. – 1994. – № 1. – С. 13–16.
17. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
18. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
19. *Ройтберг І. Я., Ройтберг Я. А.* Формула Грина для общих эллиптических граничных задач для систем структуры Дуглиса–Ниренберга // Докл. РАН. – 1998. – **359**, № 6. – С. 739–743.
20. *Roitberg Ya.* Boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. – 288 p.

Одержано 24.01.2001