УДК 517.53

О. Б. Скасків (Львів. нац. ун-т),
О. М. Трусевич (Новояворів. ліцей)

СПІВВІДНОШЕННЯ ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНЬ РЯДУ ЕКСПОНЕНТ

We prove that a condition $\sum_{n=1}^{+\infty}(n\lambda_n)^{-1} < +\infty$ is necessary and sufficient for a relation $\ln F(\sigma) \sim \ln\mu(\sigma, F)$ to be true as $\sigma \to +\infty$ outside some set for every function belonging to the class $H_+(\lambda) \overset{\text{df}}{=} \bigcup_f H(\lambda, f)$. Here, $H(\lambda, f)$ is a class of series which converge for all $\sigma \geq 0$ and have a form

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\sigma\lambda_n), \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 0,$$

and $f(\sigma)$ is a positive differentiable function increasing on $[0, +\infty)$ such that $f(0) = 1$ and $\ln f(\sigma)$ is convex on $[0, +\infty)$.

Встановлюється, що умова $\sum_{n=1}^{+\infty}(n\lambda_n)^{-1} < +\infty$ є необхідною та достатньою для того, щоб співвідношення $\ln F(\sigma) \sim \ln\mu(\sigma, F)$ мало місце при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини для кожної функції з класу $H_+(\lambda) \overset{\text{df}}{=} \bigcup_f H(\lambda, f)$, де $H(\lambda, f)$ — клас збіжних при всіх $\sigma \geq 0$ рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\sigma\lambda_n), \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 0,$$

а $f(\sigma)$ — додатна, диференційовна, зростаюча на $[0, +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$, $\ln f(\sigma)$ — опукла на $[0, +\infty)$.

1. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ — послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leq n \uparrow +\infty)$, а $H(\lambda)$ — клас всіх цілих рядів Діріхле (рядів експонент) вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n). \tag{1}$$

Для функції $F \in H(\lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| \; y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) \colon n \geq 0\}$ — максимальний член ряду. Для функції $F \in H(\lambda)$ задачу про умови виконання при $\sigma \to +\infty$ співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln\mu(\sigma, F) \tag{2}$$

вперше розглянули К. Сугімура [1] та Б. Аміра [2]. Однак в найбільш загальному вигляді цю задачу розглядав М. М. Шеремета [3], який при цьому висловив припущення (доведене в [4]), що умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty \tag{3}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб співвідношення (2) виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини скінченної міри для кожної функції $F \in H(\lambda)$. В [5] твердження подібного типу встановлено стосовно виконання співвідношення (2) при $\sigma \to +\infty$ (без виняткової множини), а в [6] для збіжних при всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(\sigma\lambda_n + \beta_n \tau(\sigma)) \tag{4}$$

(тут $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, $\lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, $\{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, а $\tau(\sigma)$ — додатна неперервна двічі диференційовна на $[0; +\infty)$ функція така, що $\tau'(\sigma) \geq 1$, $\tau''(\sigma) \geq 0$ $(\sigma \geq \sigma_0)$) встановлено, що умова $\sum_{n=n_0}^{\infty} (n(\lambda_n + \beta_n))^{-1} < +\infty$ є достатньою для справедливості при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри співвідношення $\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F)$, де $\mu(\sigma, F)$ — максимальний член ряду (4). В роботі [7] доведено і необхідність цієї умови.

Зауважимо, що оскільки $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n)$ для кожної функції $F \in H(\lambda)$ і кожного $\sigma \in \mathbb{R}$, то умови виконання співвідношення (2) досить розглядати лише для рядів вигляду (1) з невід'ємними коефіцієнтами.

Нехай далі $f(\sigma)$ — додатна диференційовна зростаюча на $[0; +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$ і функція $\ln f(x)$ опукла на $[0; +\infty)$. Зауважимо, що $\ln f(x)/x \geq c > 0$, $x \geq x_0$. Через $H(\lambda, f)$ позначимо клас збіжних для всіх $\sigma \geq 0$ рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(\sigma\lambda_n), \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 0, \tag{5}$$

де послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ така, як і вище. Для $F \in H(\lambda, f)$ і $\sigma \geq 0$ визначимо максимальний член $\mu(\sigma, F) = \max\{a_n f(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$. Нехай, крім того,

$$H_+(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_f H(\lambda, f).$$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Для того щоб для кожної функції* $F \in H_+(\lambda)$ *співвідношення*

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{6}$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної міри, необхідно і досить, щоб справджувалась умова* (3).

Доведення. *Необхідність* умови (3) безпосередньо отримуємо з наведеного вище твердження з [4] при $f(x) = \exp(x)$. *Достатність* випливає з такої теореми.

Теорема 2. *Якщо* $F \in H(\lambda, f)$ *і виконується умова*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n \ln f(\lambda_n)} < +\infty, \tag{7}$$

то співвідношення (6) *справджується при* $\sigma \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної міри.*

Доведення. Нехай спочатку $|\{n : a_n \neq 0\}| = +\infty$. При фіксованому σ розглянемо випадкову величину X з розподілом імовірностей

$$\mathrm{P}\left\{X = \lambda_n \frac{f'(\lambda_n\sigma)}{f(\lambda_n\sigma)}\right\} = \frac{a_n f(\sigma\lambda_n)}{F(\sigma)}.$$

Позначимо $g(\sigma) = \ln F(\sigma)$, $g_1(\sigma) = \ln f(\sigma)$. Оскільки $f'(x)/f(x) \geq c > 0$, $x \geq x_0$, та $f(b\sigma) = o(F(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, для кожного $b > 0$, то $F' \in H(\lambda, f')$ і $g'(\sigma) \to \to +\infty$, $\sigma \to +\infty$. Зауважимо тепер, що математичне сподівання

$$\mathrm{M}X = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \frac{f'(\lambda_n \sigma)}{f(\lambda_n \sigma)} \frac{a_n f(\sigma\lambda_n)}{F(\sigma)} = g'(\sigma).$$

Тому за нерівністю Маркова $\mathrm{P}\{X > a\} < \mathrm{M}X/a$, $a > 0$, вибираючи $a = c g'(\sigma)$, $c > 1$, отримуємо

$$\sum_{n \in N_1} a_n f(\sigma\lambda_n) = \mathrm{P}\{X > a\} \cdot F(\sigma) < \frac{1}{a} \mathrm{M}X \cdot F(\sigma) = \frac{1}{a} g'(\sigma) F(\sigma) = \frac{F(\sigma)}{c},$$

де $N_1 = \{n: \lambda_n g_1'(\lambda_n \sigma) > c g'(\sigma)\}$. Звідси

$$F(\sigma) \le \frac{c}{c-1} \sum_{\lambda_n g_1'(\lambda_n \sigma) \le c g'(\sigma)} a_n f(\sigma\lambda_n).$$

Зауважимо тепер, що оскільки $g_1'(x)$ неспадна, то $g_1(x) = \int_0^x f'(t)/f(t)\,dt \le \le x f'(x)/f(x)$. Крім того, з опуклості $g_1(x)$ та умови $g_1(0) = 0$ маємо $g_1(ut) \ge \ge t g_1(u)$, $u \ge 0$, $t \ge 1$. Тому при $\sigma \ge 1$

$$F(\sigma) \le \frac{c}{c-1} \sum_{g_1(\lambda_n \sigma)/\sigma \le c g'(\sigma)} a_n f(\sigma\lambda_n) \le \frac{c}{c-1} \sum_{g_1(\lambda_n) \le c g'(\sigma)} a_n f(\sigma\lambda_n). \qquad (8)$$

Нехай тепер $n(t) = \sum_{g_1(\lambda_n) \le t} 1$ — лічильна функція послідовності $(g_1(\lambda_n))$, де $g_1(x) = \ln f(x)$. Оскільки $1/n \ge \ln(n+1) - \ln n$, то з умови (7) випливає $\int_0^{+\infty} \ln n(t)/t^2\,dt < +\infty$. Звідси безпосередньо отримуємо, що існує додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функція $\psi(t)$ така, що

$$\ln n(t) = o\left(\psi^{-1}(t)\right) \ (t \to +\infty), \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty. \qquad (9)$$

Нехай $\psi_1(t) = \psi(t)/c$, тоді для міри множини $E = \{\sigma \ge 1: g_1'(\sigma) \ge \psi_1(g_1(\sigma))\}$ маємо (див. також [8], лема 6.15, [7])

$$\operatorname{meas} E = \int_E d\sigma \le \int_E \frac{g_1'(\sigma)\,d\sigma}{\psi_1(g_1(\sigma))} \le \int_{g_1(E)} \frac{dt}{\psi_1(t)} \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

тобто при $\sigma \notin E$ виконується нерівність $g_1'(\sigma) \le \psi(g(\sigma))/c$. Застосовуючи останню нерівність до нерівності (8) та враховуючи перше співвідношення з (9) при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E$, знаходимо

$$F(\sigma) \le \frac{c}{c-1} \mu(\sigma, F) n(\psi(g(\sigma))) = \frac{c}{c-1} \mu(\sigma, F) \exp(o(\ln F(\sigma))).$$

Звідси відразу отримуємо справедливість співвідношення (6) при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри. Теорему 2 доведено.

2. Поняття максимального члена ряду (5) вперше ввів і вивчив деякі його властивості Б. В. Винницький [9]. Власне, у статті [9] розглянуто регулярно збіжні ряди (означення регулярно збіжного ряду див. також в [10, с. 375]) вигляду

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi(z\beta_n), \tag{10}$$

де $\{\beta_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$, $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \infty$, $d_n \neq 0$, $\varphi(z)$ — ціла функція, $\varphi(0) = 1$. Нехай $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$. Регулярну збіжність в $\mathbb{C}$ ряду (10) у наступному наслідку визначимо як збіжність ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} |d_n| M_\varphi(r|\beta_n|)$ для всіх $r \geq 0$. З теореми 2 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай F — ціла функція, зображувана регулярно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом*(10). *Якщо $f(x) = \ln M_\varphi(x)$ — опукла функція і виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n f(|\beta_n|)} < +\infty, \tag{11}$$

то

$$\ln M_F(r) \leq (1 + o(1)) \ln E_F(r) \tag{12}$$

при $r \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри, де

$$E_F(r) = \max\left\{|d_n| M_\varphi(r|\beta_n|) : n \geq 0\right\}.$$

Зауважимо, що з опуклості $f(x)$ випливає опуклість на $[0; +\infty)$ $\ln E_F(r)$, тому для кожного $\varepsilon > 0$, всіх $r \geq r_0$ існує неспадна правостороння похідна $\Lambda(r) = d\ln E_F(r)/dr$, звідки

$$\ln E_F((1+\varepsilon)r) - \ln E_F(r) = \int_r^{(1+\varepsilon)r} \Lambda(t)\,dt \geq \varepsilon r \Lambda(r) \geq \varepsilon \ln E_F(r),$$

тобто

$$(1+\varepsilon) \ln E_F(r) \leq \ln E_F((1+\varepsilon)r).$$

Застосовуючи тепер теорему 3 з [9], у якій встановлено нерівність

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\forall r > 0) : E_F(r) \leq K(\varepsilon) M_F((1+\varepsilon)r),$$

а також нерівність (12), отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 2.** *Нехай F — ціла функція, зображувана регулярно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом* (10). *Якщо $f(x) = \ln M_\varphi(x)$ — опукла функція і виконується умова* (11), *то*

$$M_F(r) = E_F((1 + o(1))r), \quad r \to +\infty.$$

3. Розглянемо тепер цілі функції вигляду (10) з послідовністю $\beta_n \equiv \lambda_n \uparrow \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і цілою функцією φ такою, що $M_\varphi(r, D) = \sup\{|\varphi(z)| : z \in D_r\} < +\infty$ для кожного $r \geq 0$, де $\{D_r\}$ — сім'я областей, що є вичерпанням $\mathbb{C}$, тобто $\bigcup_{r\geq 0} D_r = \mathbb{C}$ $(\forall t < r) : D_t \subset D_r$. З теореми 2 знову отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 3.** *Якщо $f(x) = M_\varphi(x, D)$, $\ln f(x)$ — опукла функція і виконується умова* (7), *то співвідношення*

$$\ln M_F(r, D) \leq (1 + o(1)) \ln E_F(r, D) \tag{13}$$

справджується при $r \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри, де $E_F(r, D) = \max\left\{|d_n| M_\varphi(r\lambda_n, D) : n \geq 1\right\}$.

У випадку, коли $D_r = \{z\colon \operatorname{Re} z < r\}$, а φ — обмежена у півплощинах D_r ціла функція, відомо, що [11] $\ln M_F(r, D)$ — опукла функція і, отже, у цьому випадку вимога опуклості $f(x)$ у наслідку 3 виконується завжди.

Наслідок 4. *Нехай φ — ціла функція, обмежена у півплощинах $D_r = \{z\colon \operatorname{Re} z < r\}$ і $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. Якщо для $f(x) = \ln M_\varphi(x, D)$ виконується* (7), *то співвідношення*

$$\ln \sup\{|F(r+iy)|\colon y \in \mathbb{R}\} \le (1+o(1)) \ln E_F(r, D)$$

справджується при $r \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.

1. *Sugimura K.* Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletschen Reihen // Math. Z. – 1929. – **29**. – S. 264 – 277.
2. *Amira B.* Maximalbetrag und Maximalglied Dirichletscher Reihen // Math. Z. – 1930. – **31**. – S. 594 – 600.
3. *Шеремета М. Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле // Мат. сб. – 1979. – **110**, № 1. – С. 102 – 116.
4. *Скаскив О. Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 1. – С. 41 – 47.
5. *Шеремета М. Н.* О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Там же. – 1990. – **47**, № 6. – С. 119 – 123.
6. *Скаскiв О. Б., Трусевич О. М.* Теореми типу Бореля для регулярно збіжних функціональних рядів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 60 – 63.
7. *Скаскiв О. Б., Трусевич О. М.* Про теореми типу Бореля для рядів, подібних до рядів Тейлора – Діріхле // Мат. студії. – 2000. – **13**, № 1. – С. 79 – 82.
8. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. – London etc.: Acad. Press, 1989. – Vol. 2. – XXI + 591 p.
9. *Винницкий Б. В.* О росте целых функций, представленных рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 537 – 540.
10. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. – М.: Наука, 1971. – 520 с.
11. *Стрелиц И. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 468 с.

Одержано 05.12.2000