УДК 517.5

В. Н. Коновалов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОРЯДКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ МОГУТ ОТЛИЧАТЬСЯ В СТЕПЕННОЙ ШКАЛЕ

We present a class of functions for which trigonometric widths decrease to zero in power scale slower than the Kolmogorov widths.

Наведено клас функцій, для якого тригонометричні поперечники повільніше, ніж колмогоровські, спадають до нуля у степеневій шкалі.

Известно, что для классов Соболева, Гельдера — Никольского и Бесова поведение, в смысле слабой асимптотики, поперечников по Колмогорову совпадает с поведением тригонометрических поперечников, а поведение линейных поперечников — с поведением линейных тригонометрических поперечников во всех случаях, когда установлены точные порядки этих поперечников. Как следует из определений, линейные тригонометрические поперечники не меньше тригонометрических, а поперечники по Колмогорову не превышают линейных. Но существуют ли классы функций, для которых тригонометрические поперечники могут быть существенно больше (т. е. слабее) колмогоровских поперечников? В данной статье дается положительный ответ на этот вопрос. Более того, показано, что тригонометрические поперечники могут быть слабее (т. е. медленнее убывают) не только колмогоровских, но и линейных поперечников. Отсюда сразу же следует, что линейные тригонометрические поперечники бывают слабее линейных.

Приведем определения, которые будут использоваться при формулировке и доказательстве основного результата. Пусть X — вещественное линейное пространство векторов x с нормой $\|x\|_X$, а W — произвольное непустое подмножество из X. Пусть L^n — произвольное подпространство в X размерности $\dim L^n \le n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а $M^n = M^n(z) := z + L^n$ — сдвиг L^n на произвольный вектор $z \in X$. Величина

$$E\left(x, M^n\right)_X \ := \ \inf_{y \in M^n} \|x - y\|_X$$

называется наилучшим приближением элемента $x \in X$ множеством M^n, а величина

$$E\left(W, M^n\right)_X \ := \ \sup_{x \in W} E\left(x, M^n\right)_X$$

— наилучшим приближением множества W множеством M^n.

Если $\mathcal{M}^n := \{M^n\}$ — совокупность всех M^n размерности не выше $n \in \mathbb{Z}_+$, то величина

$$d_n(W)_X \ := \ \inf_{M^n \in \mathcal{M}^n} E\left(W, M^n\right)_X$$

называется n-поперечником по Колмогорову множества W в пространстве X.

Если совокупность $\Lambda\left(X, L^n\right)$ всех линейных отображений Λ пространства X в подпространства L^n размерности не выше $n \in \mathbb{Z}_+$, то величина

$$E\left(W, N^n\right)_X^{\text{lin}} \ := \ \inf_{\Lambda \in \Lambda(X, L^n)} \ \sup_{x \in W} \|x - \Lambda x\|_X$$

называется наилучшим линейным приближением множества W подпространством L^n, а величина

$$d_n(W)_X^{\text{lin}} := \inf_{L^n \subset X} E\big(W, L^n\big)_X^{\text{lin}}$$

— линейным n-поперечником множества W в пространстве X.

Пусть теперь $X = X(\mathbb{T})$ — произвольное вещественное линейное нормированное пространство 2π-периодических функций $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$ — период, а $W = W(\mathbb{T})$ — какой-нибудь класс функций из $X(\mathbb{T})$. Через $\mathcal{T}^n := \{T^n\}$ обозначим совокупность всех подпространств $T^n := \operatorname{span}\{e^{ik_\nu t},\ k_\nu \in \mathbb{Z}_+,\ \nu = 1, \ldots, n\}$ тригонометрических полиномов, каждое из которых порождается какой-либо системой $\{e^{ik_\nu t}\}_{\nu=1}^{n}$ из $n \in \mathbb{N}$ гармоник $e^{ik_\nu t}, t \in \mathbb{R}$. Здесь i — мнимая единица.

Величина

$$d_n^T(W)_X := \inf_{T^n \in \mathcal{T}^n} E\big(W, T^n\big)_X$$

называется тригонометрическим n-поперечником класса W в пространстве X, а величина

$$d_n^T(W)_X^{\text{lin}} := \inf_{T^n \in \mathcal{T}^n} E\big(W, T^n\big)_X^{\text{lin}}$$

— линейным n-поперечником класса W в пространстве X.

Очевидно, что $d_n^T(W)_X^{\text{lin}} \ge d_n^T(W)_X$, $d_n(W)_X^{\text{lin}} \ge d_n(W)_X$, $d_n^T(W)_X^{\text{lin}} \ge d_n(W)_X^{\text{lin}}$ и $d_n^T(W)_X \ge d_n(W)_X$. Поперечники $d_n(W)_X$ были введены А. Н. Колмогоровым [1], $d_n(W)_X^{\text{lin}}$ — В. М. Тихомировым [2], $d_n^T(W)_X$ и $d_n^T(W)_X^{\text{lin}}$ — Р. С. Исмагиловым [3].

Через $\breve{W}_1^1(\mathbb{T})$ обозначим класс выпуклых на периоде $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ и локально абсолютно непрерывных функций $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с полунормой $\|x'\|_{L_1(\mathbb{T})} \le 1$.

Основным результатом статьи является следующее утверждение, демонстрирующее различие в поведении тригонометрических и колмогоровских поперечников класса $\breve{W}_1^1(\mathbb{T})$ в метрике $L_q(\mathbb{T})$, $1 \le q < \infty$.

Теорема. *Если* $1 \le q < \infty$, *то существуют постоянные* $\hat{c} = \hat{c}(q) > 0$ *и* $\check{c} = \check{c}(q) > 0$ *такие, что*

$$d_n^T\big(\breve{W}_1^1\big)_{L_n}^{\text{lin}} \ \ge\ d_n^T\big(\breve{W}_1^1\big)_{L_q} \ \ge\ \hat{c}n^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$d_n\big(\breve{W}_1^1\big)_{L_q} \ \le\ d_n\big(\breve{W}_1^1\big)_{L_q} \ \le\ \check{c}n^{-1-1/q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

При доказательстве этой теоремы будет использовано известное (см., например, [4, с. 34], теорема 2.3.3) соотношение двойственности в теории приближений.

Лемма. *Пусть* X — *вещественное линейное нормированное пространство,* X^* — *пространство, сопряженное с* X, L — *подпространство в* X, $L_\perp^*$ — *множество всех функционалов* $f \in X^*$ *таких, что* $f(y) = 0$ *для* $y \in L$. *Тогда для любого* $x \in X$

$$E(x, L)_X = \sup_{f \in L_{\perp}^*, \|f\|_{X^*} \le 1} f(x).$$

Доказательство теоремы. Известно (см., например, [5, с. 193]), что $L_q^*(\mathbb{T}) = L_{q'}(\mathbb{T})$, $1 \le q < \infty$, где $1/q + 1/q' = 1$. При этом любой функционал $f \in L_q^*(\mathbb{T})$ задается равенством

$$f(x) = \int_{\mathbb{T}} x(t) y(t)\, dt, \quad x \in L_q(\mathbb{T}),$$

где $y \in L_{q'}(\mathbb{T})$, а $\|f\|_{L_q^*(\mathbb{T})} = \|y\|_{L_{q'}(\mathbb{T})}$.

Зафиксируем произвольное подпространство T^n, порождаемое системой гармоник $\left\{e^{ik_\nu t}\right\}_{\nu=1}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, найдется четное число $\tilde{n}$ такое, что $2n \le \tilde{n} \le 4n$, и при этом $\tilde{n} \ne k_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Положив

$$x_{\tilde{n}}(t) := \begin{cases} \dfrac{\tilde{n}}{\pi}\left(-t - \pi + \dfrac{\pi}{2\tilde{n}}\right), & t \in \left[-\pi, -\pi + \dfrac{\pi}{2\tilde{n}}\right]; \\ 0, & t \in \left[-\pi + \dfrac{\pi}{2\tilde{n}}, \pi - \dfrac{\pi}{2\tilde{n}}\right]; \\ \dfrac{\tilde{n}}{\pi}\left(t - \pi + \dfrac{\pi}{2\tilde{n}}\right), & t \in \left[\pi - \dfrac{\pi}{2\tilde{n}}, \pi\right], \end{cases}$$

продолжим $x_{\tilde{n}}$ с периодом 2π на $\mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что $x_{\tilde{n}} \in \breve{W}_1^1(\mathbb{T})$. Положим также

$$y_{\tilde{n}}(t) := \cos \tilde{n} t \left\| \cos \tilde{n} \cdot \right\|_{L_{q'}(\mathbb{T})}^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\tilde{n} \ne k_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, то, очевидно, $y_{\tilde{n}} \perp T^n$. При этом $\left\| y_{\tilde{n}} \right\|_{L_{q'}(\mathbb{T})} = 1$. Тогда из приведенной выше леммы следует неравенство

$$E\left(x_{\tilde{n}}, T^n\right)_{L_q(\mathbb{T})} \ge \int_{\mathbb{T}} x_{\tilde{n}}(t) y_{\tilde{n}}(t)\, dt.$$

Учитывая определения функций $x_{\tilde{n}}$ и $y_{\tilde{n}}$, имеем

$$\int_{\mathbb{T}} x_{\tilde{n}}(t) y_{\tilde{n}}(t)\, dt = \frac{2}{\pi \tilde{n}} \left\| \cos \tilde{n} \cdot \right\|_{L_{q'}(\mathbb{T})}^{-1}.$$

А так как $\left\| \cos \tilde{n} \cdot \right\|_{L_{q'}(\mathbb{T})} \le (2\pi)^{1/q'}$, то

$$E\left(x_{\tilde{n}}, T^n\right)_{L_q(\mathbb{T})} \ge 2^{1/q} \pi^{-2+1/q} \tilde{n}^{-1} \ge (2\pi)^{-2+1/q} n^{-1}.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора T^n, следуют неравенства (1).

Докажем теперь неравенства (2). При $n = 1$ неравенства (2) очевидны, так как для одномерного подпространства $L^1 := \operatorname{span}\{1\}$ всех констант будут выполняться неравенства $E\left(\breve{W}_1^1, L^1\right)_{L_q} \le E\left(\breve{W}_1^1, L^1\right)_{L_q}^{\mathrm{lin}} \le c$, где $c = c(q) > 0$. Поэтому далее будем считать, что $n > 1$. Зафиксировав произвольное $q: 1 \le q < \infty$, разобьем период $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ точками

$$t_{ni}^{(q)} := \begin{cases} \pi\left(1-\left(\dfrac{n-i}{n}\right)^{q+1}\right), & i=0,1,\dots,n; \\ -\pi\left(1-\left(\dfrac{n+i}{n}\right)^{q+1}\right), & i=-1,\dots,-n, \end{cases} \tag{3}$$

на отрезки $I_{ni}^{(q)} := \left[t_{n,i-1}^{(q)}, t_{ni}^{(q)}\right]$, $i = 1, \dots, n$, и $I_{ni}^{(q)} := \left[t_{n,i}^{(q)}, t_{n,i+1}^{(q)}\right]$, $i = -1, \dots, -n$. Нетрудно проверить, что существуют постоянные $c_1 = c_1(q) > 0$ и $c_2 = c_2(q) > 0$ такие, что длины $\left|I_{ni}^{(q)}\right|$ отрезков $I_{ni}^{(q)}$ удовлетворяют неравенствам

$$c_1 n^{-q-1}(n-|i|+1)^q \le \left|I_{ni}^{(q)}\right| \le c_2 n^{-q-1}(n-|i|+1)^q, \quad i = \pm 1, \dots, \pm n. \tag{4}$$

Для каждой функции $x \in \breve{W}_1^1(\mathbb{T})$ через $\sigma_{q,n}(x;\cdot)$ будем обозначать $2n$-звенную ломаную, интерполирующую x в точках $t_{ni}^{(q)}$. Оценим сверху уклонение в метрике $L_q(\mathbb{T})$ этой ломаной от x. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $x'(t) \ge 0$, если $t \in [0, \pi]$, и $x'(t) \le 0$, если $t \in [-\pi, 0]$. В силу монотонности производной x' получаем

$$\left\|x(\cdot)-\sigma_{q,n}(x;\cdot)\right\|_{L_q\left(I_{ni}^{(q)}\right)} \le \left|I_{ni}^{(q)}\right|^{1+1/q} \omega\left(x'; I_{ni}^{(q)}\right), \quad i = \pm 1, \dots, \pm(n-1),$$

где

$$\omega\left(x'; I_{ni}^{(q)}\right) := \sup_{t\in I_{ni}^{(q)}} x'(t) - \inf_{t\in I_{ni}^{(q)}} x'(t), \quad i = \pm 1, \dots, \pm(n-1),$$

— величина колебания производной x' на отрезке $I_{ni}^{(q)}$. Если же $i = \pm n$, то

$$\left\|x(\cdot)-\sigma_{q,n}(x;\cdot)\right\|_{L_q\left(I_{n,\pm n}^{(q)}\right)} \le \left|I_{n,\pm n}^{(q)}\right|^{1/q} \left\|x'\right\|_{L_1\left(I_{n,\pm n}^{(q)}\right)}.$$

Следовательно,

$$\left\|x(\cdot)-\sigma_{q,n}(x;\cdot)\right\|_{L_q(\mathbb{T})} \le \left(\left|I_{n,-n}^{(q)}\right| + \sum_{i=\pm 1}^{\pm(n-1)} \left(\left|I_{ni}^{(q)}\right|^{1+1/q} \omega\left(x'; I_{ni}^{(q)}\right)\right)^q + \left|I_{nn}^{(q)}\right|\right)^{1/q}. \tag{5}$$

Оценим теперь снизу норму $\left\|x'\right\|_{L_1(\mathbb{T})}$. Учитывая монотонность x', получаем

$$\left\|x'\right\|_{L_1(\mathbb{T})} \ge \sum_{i=-1}^{-n+1} \left|I_{n,i-1}^{(q)}\right| \left(\sum_{j=-1}^{i} \omega\left(x'; I_{nj}^{(q)}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left|I_{n,i+1}^{(q)}\right| \left(\sum_{j=1}^{i} \omega\left(x'; I_{nj}^{(q)}\right)\right).$$

А так как $\left\|x'\right\|_{L_1(\mathbb{T})} \le 1$, то из последнего неравенства следует

$$\sum_{i=-1}^{-n+1} \left(\sum_{j=i}^{-n+1} \left|I_{n,j-1}^{(q)}\right|\right) \omega\left(x'; I_{ni}^{(q)}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n-1} \left|I_{n,j+1}^{(q)}\right|\right) \omega\left(x'; I_{ni}^{(q)}\right) \le 1. \tag{6}$$

Полагая

$$a_i := \left|I_{ni}^{(q)}\right|^{1+1/q}, \quad i = \pm 1, \dots, \pm(n-1), \qquad a_{\pm n} := \left|I_{n,\pm n}^{(q)}\right|, \tag{7}$$

$$b_i := \sum_{j=i}^{-n+1} \left|I_{n,j-1}^{(q)}\right|, \quad i = -1, \dots, -n+1, \qquad b_i := \sum_{j=i}^{n-1} \left|I_{n,j+1}^{(q)}\right|, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{8}$$

рассматриваем следующую экстремальную задачу:

$$g(\tau) := \left(a_{-n} + \sum_{i=\pm 1}^{\pm(n-1)} (a_i |\tau_i|)^q + a_n \right)^{1/q} \to \sup, \tag{9}$$

$$\sum_{i=\pm 1}^{\pm(n-1)} b_i |\tau_i| \le 1, \quad \tau := \left(\tau_{-n+1}, \ldots, \tau_{-1}, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^{2(n-1)}. \tag{10}$$

В силу неравенства (6) максимум правой части неравенства (5) не может превышать максимального значения задачи (9), (10). Поскольку функция $g(\cdot)$ из (9) является выпуклой, то ее максимум $g(\tau_{\max})$ достигается в одной из вершин многогранника (10). Следовательно,

$$g(\tau_{\max}) = \max_{i=\pm 1, \ldots, \pm(n-1)} \left(a_{-n} + \left(a_i b_i^{-1}\right)^q + a_n \right)^{1/q}.$$

А так как из (8) и (3) следует, что $b_i = \pi \left(\dfrac{n - |i|}{n} \right)^{q+1}$, $i = \pm 1, \ldots, \pm(n-1)$, то в силу (7) и (4) получаем неравенства $g(\tau_{\max}) \le c n^{-1-1/q}$, где $c = c(q) > 0$. Но тогда

$$\left\| x(\cdot) - \sigma_{q,n}(x; \cdot) \right\|_{L_q(\mathbb{T})} \le c n^{-1-1/q}, \quad x \in \breve{W}_1^1(\mathbb{T}).$$

Метод приближения интерполяционными ломаными является линейным. Поэтому из последнего неравенства следуют неравенства (2). Теорема доказана.

Замечание. Идея редукции задачи об оценке приближения ломаными к оценке решения конечномерной экстремальной задачи была предложена В. М. Тихомировым при обсуждении результатов статьи с автором и, в частности, возможных путей доказательства неравенств (2). В связи с этим хочу выразить глубокую признательность В. М. Тихомирову за ценный совет.

1. *Kolmogoroff A. N.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Finktionenklasse // Math. Ann. – 1936. – **37**. – P. 107 – 110.
2. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 3 (93). – С. 81 – 120.
3. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Там же. – 1974. – **29**, вып. 3 (177). – С. 161 – 178.
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 320 с.

Получено 07.02.2001