УДК 517.53

М. В. Заболоцький (Львів. нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ НУЛЬОВОГО РОДУ

Under fairly general condition on the behavior of the Borel measure, we find unimprovable asymptotic formulas for its logarithmic potential.

При досить загальній умові на поведінку борелівської міри знайдено непокращувані асимптотичні формули її логарифмічного потенціалу.

Нехай μ — невід'ємна борелівська міра на площині, $n(t) = n(t,\mu) = \mu(\{x: |x|<t\})$ і $\int_1^{+\infty} dn(t)/t < +\infty$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}^2$ визначено функцію

$$p(x) = p(x;\mu) = \int\limits_{|a|<+\infty} \ln\left|1-\frac{x}{a}\right| d\mu(a),$$

яку називають логарифмічним потенціалом нульового роду.

Позначимо

$$I(x) = I(x;\mu) = \int\limits_{|a-x|\le|x|} \ln\frac{|x|}{|a-x|}\, d\mu(a),$$

$$N(r) = N(r,\mu) = \int\limits_1^r \frac{n(t)}{t}\,dt = \int\limits_{|a|\le r} \ln\frac{r}{|a|}\, d\mu(a).$$

Теорема 1. *Нехай неспадна додатна на* $[0,+\infty)$ *функція* $w(r)$ *така, що для деякого* $A\in(1,2)$ *і всіх досить великих* r

$$w(2r) \le Aw(r). \tag{1}$$

Тоді якщо

$$n(r) = O(w(r)), \quad r\to\infty, \tag{2}$$

то при $r=|x|$

$$p(x) = -I(x) + N(r) + O(w(r)), \quad r\to+\infty.$$

Доведення. Запишемо

$$p(x) = \left\{\int\limits_{|a|\le 2r} + \int\limits_{|a|>2r}\right\} \ln\frac{|a-x|}{|a|}\, d\mu(a) = I_1 + I_2.$$

Для I_1 маємо

$$I_1 = -I(x) + N(2r) +$$

$$+ \int\limits_{|a|\le 2r}\left(\ln\frac{|a-x|}{|a|} - \ln\frac{2r}{|a|}\right)d\mu(a) - \int\limits_{|a-x|\le r} \ln\frac{|a-x|}{r}\, d\mu(a) =$$

$$= -I(x) + N(2r) + \int\limits_{|a|\le 2r} \ln\frac{|a-x|}{2r}\, d\mu(a) - \int\limits_{|a-x|\le r} \ln\frac{|a-x|}{r}\, d\mu(a) =$$

$$= -I(x) + N(2r) + \int\limits_{D(x,a)} \ln\frac{|a-x|}{r}\, d\mu(a) - n(2r)\ln 2,$$

де $D(x, a) = \{a: |x-a| > r, \ |a| \le 2r\}$. Враховуючи нерівності $N(r) \le N(2r) \le \le N(r) + n(2r)\ln 2$,

$$0 \le \int_{D(x,a)} \ln \frac{|a-x|}{r}\, d\mu(a) \le n(2r)\ln 3$$

і умови (1) та (2), одержуємо

$$I_1 = -I(x) + N(r) + O(w(r)), \quad r \to +\infty.$$

Оцінимо I_2. Маємо

$$I_2 \le \int_{2r}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{r}{t}\right) dn(t) \le r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2}\, dt,$$

$$I_2 \ge \int_{2r}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{r}{t}\right) dn(t) \ge -2r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2}\, dt.$$

Оскільки

$$r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2}\, dt = O(r) \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{2^n r}^{2^{n+1} r} \frac{w(t)}{t^2}\, dt \le$$

$$\le O(r) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w\left(2^{n+1} r\right)}{2^{n+1} r} \le O(w(r)) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{A}{2}\right)^{n+1} = O(w(r)), \quad r \to +\infty,$$

то $I_2 = O(w(r))$, $r \to \infty$, і ми отримуємо твердження теореми 1.

***Зауваження* 1.** На прикладі міри μ, зосередженої на додатній півосі OX_1, для якої $n(t) = w(t) = t\left(\ln^2 t\right)^{-1}$, $t \ge e$, видно, що в умові (1) теореми 1 обмеження на сталу A істотне.

Дійсно, тоді для записаної в декартових координатах точки $x = (-r, 0)$ маємо

$$I_2 = \int_{2r}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{r}{t}\right) dn(t) = r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)\, dt}{t(t+r)} - n(2r) \ln\frac{3}{2} \ge$$

$$\ge \frac{2}{3} r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)\, dt}{t^2} - n(2r)\ln\frac{3}{2} \ge \frac{2}{3}\frac{r}{\ln(2r)} - \frac{2r}{\ln^2(2r)} \ln\frac{3}{2} \ge \frac{1}{3}\frac{r}{\ln r},$$

$$r \ge \left(\frac{3}{2}\right)^6,$$

а отже, $I_2 \ne O(w(r))$, $r \to \infty$.

Нехай E — довільна борелівська множина, $E \subset \mathbb{R}^2$. Позначимо через $\operatorname{cap} E$ логарифмічну ємність множини E [1, с. 209]. Відносною ємністю множини E будемо називати величину

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{cap}(E \cap U(r))}{\operatorname{cap} U(r)}, \quad U(r) = \{x: |x| < r\}.$$

Справедлива наступна лема.

Лема [2, с. 1295]. *Нехай для борелівської множини* $E \subset \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{cap}\left\{E \cap U(2^n) \setminus U(2^{n-1})\right\} / \operatorname{cap} U(2^n) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Тоді множина E *має нульову відносну ємність.*

У наступній теоремі міститься оцінка величини $I(x)$ зовні множини нульової відносної ємності.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *з довільною сталою* $A > 1$. *Тоді для довільної функції* ψ, $\psi(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$, *існує множина* E *нульової відносної ємності така, що*

$$I(x) = o(\psi(r)w(r)), \quad x \to \infty, \quad x \notin E, \quad r = |x|. \tag{3}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що функція $\psi(r)$, $r \in [0, +\infty)$, є зростаючою. Покладемо для $\alpha > 0$

$$E_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : I(x; \mu) \ge \alpha\psi(r)w(r)\right\}.$$

Покажемо, що при $n \to +\infty$

$$\operatorname{cap}\left[E_\alpha \cap U(2^n) \setminus U(2^{n-1})\right] / \operatorname{cap} U(2^n) \to 0. \tag{4}$$

Дійсно, якщо це не так, то для деякого $\gamma > 0$ і послідовності (n_k), $n_k \to +\infty$, $r \to +\infty$,

$$\operatorname{cap}\left[E_\alpha \cap U\left(2^{n_k}\right) \setminus U\left(2^{n_k - 1}\right)\right] \ge 2\gamma \operatorname{cap} U\left(2^{n_k}\right).$$

Виберемо компакт $L_{n_k} \subset E_\alpha \cap U\left(2^{n_k}\right) \setminus U\left(2^{n_k-1}\right)$ так, щоб $\operatorname{cap} L_{n_k} \ge$ $\ge \gamma \operatorname{cap} U\left(2^{n_k}\right)$.

Нехай ν_{n_k} — рівноваговий розподіл одиничної міри на L_{n_k}. Тоді

$$\int\limits_{L_{n_k}} I(x; \mu)\, d\nu_{n_k}(x) \ge \alpha\psi\left(2^{n_k-1}\right) w\left(2^{n_k-1}\right). \tag{5}$$

З іншого боку, маємо

$$\int\limits_{L_{n_k}} I(x; \mu)\, d\nu_{n_k}(x) = \int\limits_{L_{n_k}} d\nu_{n_k}(x) \int\limits_{|x-a| \le r} \ln \frac{r}{|x-a|}\, d\mu(a) \le$$

$$\le \int\limits_{|a| \le 2^{n_k+1}} d\mu(a) \int\limits_{L_{n_k}} \ln \frac{4 \cdot 2^{n_k}}{|x-a|}\, d\nu_{n_k}(x) \le \left(\ln\left(4 \cdot 2^{n_k}\right) + \ln\left(\operatorname{cap} L_{n_k}\right)^{-1}\right) n\left(2^{n_k+1}\right) \le$$

$$\le \left(\ln 2^{n_k+2} \cdot \gamma^{-1} \cdot 2^{-n_k}\right) n\left(2^{n_k+1}\right) = \ln\left(4\gamma^{-1}\right) n\left(2^{n_k+1}\right) = O\left(w\left(2^{n_k-1}\right)\right), \quad k \to +\infty,$$

що суперечить (5), Отже, (4) доведено.

Виберемо тепер монотонно спадну до нуля послідовність чисел α_j. З (4) випливає, що існує зростаюча послідовність натуральних чисел k_j така, що для $k \ge k_j$

$$\operatorname{cap}\left[E_{\alpha_j} \cap U\left(2^k\right) \setminus U\left(2^{k-1}\right)\right] \le \alpha_j \operatorname{cap} U\left(2^k\right). \tag{6}$$

Покладемо

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \left\{E_{\alpha_j} \setminus U\left(2^{k_j}\right)\right\}.$$

Зауважимо, що при $x \to \infty$, $x \notin E$, виконується $I(x; \mu) = o(\psi(r)w(r))$. Далі для k, $k_j < k \le k_{j+1}$, маємо

$$E \cap U\left(2^k\right) \setminus U\left(2^{k-1}\right) = E_{\alpha_j} \cap U\left(2^k\right) \setminus U\left(2^{k-1}\right).$$

З (6) випливає, що множина E задовольняє умову леми і тому E має нульову відносну ємність. Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. Покажемо, що за умов теореми 2 твердження (3) не можна замінити на таке:

$$I(x) = O(w(r)), \quad r = |x| \to +\infty, \quad x \notin E,$$

де E — множина нульової відносної ємності. Для цього досить побудувати приклад логарифмічного потенціалу нульового роду, для якого $n(r) = O(w(r))$, $N(r) = O(w(r))$, $w(r) = r^{\rho}$, $0 < \rho < 1$, а множина $\{x\colon p(x) \le -Aw(r)\}$, де A — довільна додатна стала, не є C^0-множиною (а значить, не є множиною нульової відносної ємності). Тоді, згідно з теоремою 1, отримуємо $I(x) \ne O(w(r))$, $r = |x| \to +\infty$, $x \notin E$. Нагадаємо, що множину G називають C^0-множиною, якщо її можна покрити системою кругів $c(x_k, r_k) = \{x\colon |x - x_k| < r_k\}$ такою, що $\sum_{|x_k|<r} r_k = o(r)$, $r \to +\infty$.

Нехай (r_k) — монотонно зростаюча послідовність така, що $r_1 = 1$,

$$\sum_{i=1}^{k-1} r_i^{\rho} = o\left(r_k^{\rho}/\ln r_k\right), \quad k \to +\infty,$$

а

$$p(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^{\rho} \ln\left|1 - \frac{x}{r_k}\right|.$$

Тоді для r, $r_n < r \le r_{n+1}$, отримуємо

$$n(r) = (1 + o(1)) r_n^{\rho} = O(w(r)), \qquad N(r) = O(w(r)), \quad r \to +\infty.$$

Нехай $x \in \{a\colon |a - r_n| < \varepsilon r_n\} = c(r_k, \varepsilon r_k)$, $0 < \varepsilon < 1$. Маємо

$$p(x) \le r_n^{\rho} \ln\varepsilon + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k^{\rho} \frac{|x|}{r_k} + \ln|x| \sum_{k=1}^{n-1} r_k^{\rho} \le$$

$$\le r_n^{\rho} \ln\varepsilon + (1+\varepsilon) r^{\rho} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{r_n^{1-\rho}}{r_k^{1-\rho}} + \ln r \sum_{k=1}^{n-1} r_k^{\rho} = r_n^{\rho} \ln\varepsilon + o\left(r_n^{\rho}\right) =$$

$$= (1 + o(1)) \frac{\ln\varepsilon}{1 - \varepsilon^{\rho}} r^{\rho}, \quad r \to +\infty.$$

Множина $G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} c(r_k, \varepsilon r_k)$ не є C^0-множиною і для $\varepsilon = \exp(-A-1)$, $x \in G$, отримуємо

$$p(x) \le -Aw(r), \quad r \ge r_0.$$

Теорема 3. *Нехай $h(r)$ — додатна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[1, +\infty)$ функція, тобто $h(2r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$. Якщо*

$$n(r) = o(h(r)), \quad r \to +\infty, \tag{7}$$

то при $|x| = r$

$$p(x) = -I(x) + N(r) + o(h(r)), \quad x \to \infty,$$

$$I(x) = o(h(r)), \quad x \to \infty, \quad x \notin E,$$

де E — множина нульової відносної ємності.

Доведення. Покладемо $\delta(r) = \sup\{n(t)/h(t)\colon t \ge r\}$, $w(r) = h(r)\delta(r)$. Тоді $n(r) \le w(r)$, $w(2r) \le (1 + o(1)) w(r)$, $r \to +\infty$. Оскільки на підставі (7) $\delta(r) \downarrow 0$, $r \to +\infty$, то з теореми 1 отримуємо

$$p(x) = -I(x) + N(r) + O(\delta(r)h(r)) = -I(x) + N(r) + o(h(r)), \quad x \to \infty.$$

Далі, нехай в теоремі 2 $\psi(r) = 1/\delta(r)$. Тоді

$$I(x) = o\left(\frac{1}{\delta(r)} w(r)\right) = o(h(r)), \quad r \to \infty, \quad x \notin E.$$

Теорему 3 доведено.

Нехай u — δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^2$ функція, тобто функцію u можна зобразити у вигляді $u = u_1 - u_2$, де u_1, u_2 — субгармонійні в $\mathbb{R}^2$ функції. Позначимо через μ_1, μ_2 міри Рісса функцій u_1 і u_2. Ми припускаємо, що носії цих мір зосереджені на множинах, що не перетинаються. На підставі відомої теореми Хана [3, с. 350] це не зменшує загальності, але дає можливість дещо спростити викладки. Не зменшуючи загальності, будемо припускати також, що порядок функцій u_1 та u_2 не перевищує порядку функції u, функції u_1 та u_2 гармонійні в околі точки нуль, $u_1(0) = u_2(0) = 0$.

Будемо говорити, що функція u має нульовий рід, якщо її неванліннівська характеристика

$$T(r, u) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|x|=r} u^+(x)\, d\sigma(x) + N(r, u_2)$$

задовольняє умову $T(r, u) = o(r)$, $r \to +\infty$, де $N(r, u_2) = N(r, \mu_2)$. З відомої теореми Адамара про зображення субгармонійних в $\mathbb{R}^2$ функцій одержуємо (див., наприклад, [4, с. 174])

$$u(x) = p(x; \mu_1) - p(x; \mu_2),$$

за умови, що u — δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^2$ функція нульового роду.

З цього зображення та з теорем 1 та 2 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай $u = u_1 - u_2$ — δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^2$ функція нульового роду, міри Рісса μ_1 та μ_2 задовольняють умови* (1) *та* (2). *Тоді для довільної функції $\psi(r)$, $\psi(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$,*

$$u(x) = N(r, u_1) - N(r, u_2) + o(\psi(r) w(r)), \quad |x| = r \to \infty, \quad x \notin E,$$

де E — множина нульової відносної ємності, $N(r, u_j) = N(r, \mu_j)$, $j = 1, 2$.

Позначимо через $\delta SH(0)$ $(SH(0))$ сім'ю δ-субгармонійних (субгармонійних) в $\mathbb{R}^2$ функцій нульового порядку. Нехай $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(0)$, $n(r, u_j) = n(r, \mu_j)$, $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок u такий, що $W(r) = r^{\lambda(r)} \uparrow +\infty$, $r \to +\infty$. Тоді [5]

$$n(r, u_j) = o(W(r)), \quad r \to +\infty, \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

Оскільки функція $W(r) = r^{\lambda(r)}$ є повільно зростаючою, то з (8) та теореми 3 отримуємо асимптотичні формули для функцій класу $\delta SH(0)$ (див. теореми 2 та 4 в [5]).

Наслідок 2. *Нехай $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(0)$, $W(r) = r^{\lambda(r)} \uparrow +\infty$, $r \to +\infty$, $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок u. Тоді*

$$u(x) = I(x, u_2) - I(x, u_1) + N(r, u_1) - N(r, u_2) + o(W(r)), \quad |x| = r \to \infty, \tag{9}$$

$$u(x) = N(r, u_1) - N(r, u_2) + o(W(r)), \quad r = |x| \to \infty, \quad x \notin E, \tag{10}$$

де E — множина нульової відносної ємності.

Для цілих функцій f нульового порядку результат, близький до (9), можна отримати з (8) та теорем М. Картрайт [6, с. 83 – 86], яка довела, що при $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, θ — дійсне)

$$\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| - N(2R) - \ln|f(0)| < 4r\int_{r}^{+\infty}\frac{n(t)}{t^2}\,dt, \quad r \le R,$$

і для довільних $\xi > 0$ і $\eta > 0$ існує $K = K(\xi, \eta) > 0$ таке, що при $\xi R \le r < R$, $z \notin F$, виконується

$$\ln|f(z)| - N(2R) - \ln|f(0)| > -2KR\int_{2R}^{+\infty}\frac{n(t)}{t^2}\,dt,$$

де F — множина кругів, сума радіусів яких не перевищує ηR.

***Наслідок* 3.** *Нехай $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(0)$. Тоді існує множина E нульової відносної ємності така, що для будь-якої сталої K та довільних $x_1, x_2 \notin E$ таких, що $0 < K^{-1} < |x_1|/|x_2| < K < +\infty$, виконується*

$$u(x_1) - u(x_2) = o(W(r)), \quad r = |x_1| \to +\infty.$$

Справедливість цього наслідку випливає з (10) і рівності

$$N(Kr, u_j) = N(r, u_j) + o(W(r)), \quad r = \to +\infty.$$

Цей результат істотно доповнює результат А. П. Гришина [7], який показав, що зовні C^0-множини E

$$\frac{u(x + hx) - u(x)}{W(x)} \rightrightarrows 0, \quad h \to 0, \quad x \notin E, \quad x + hx \notin E,$$

де $\rightrightarrows$ означає рівномірну збіжність.

Співвідношення (8) можна уточнити, використовуючи одну властивість повільно зростаючих функцій, доведену в [8] (лема 3), а саме, якщо $h(r)$ — диференційовна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[1, +\infty]$ функція, $\Delta(r) = \Delta(r; h) = \sup\left\{\dfrac{th'(t)}{h(t)} : t \ge r\right\}$, то $h\left(r\exp\dfrac{1}{\Delta(r)}\right) \le e\,h(r)$. Відомо, що функція $\Delta(r) \to 0$ при $r = \to +\infty$.

Теорема 4. *Нехай $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(0)$, $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок u, $W(r) = r^{\lambda(r)} \uparrow +\infty$, $r \to +\infty$. Тоді*

$$n(r, u_j) = o(\Delta(r)W(r)), \quad r \to +\infty, \tag{11}$$

де $\Delta(r) = \Delta(r; W)$.

Доведення. Очевидно, що теорему досить довести для субгармонійної функції $v \in SH(0)$. Припустимо, що твердження теореми 4 не має місця, тобто існують функція $\psi(r)$, $\psi(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$, і послідовність (r_k), $r_k \to +\infty$, $k \to +\infty$, такі, що

$$n(r_k, v) \ge \psi(r_k)\Delta(r_k)W(r_k), \quad k \to +\infty.$$

Тоді $N(r, v) \ge \psi(r_k)W(r_k)\Delta(r_k)\ln(r/r_k)$ для $r \ge r_k$. Поклавши $r_k' = r_k\exp(1/\Delta(r_k))$, одержимо

$$N\left(r_k', v\right) \ge \psi(r_k)W(r_k), \quad k \to +\infty. \tag{12}$$

З іншого боку [8] (лема 3) маємо (K — додатна стала)

$$N\left(r_k', v\right) \le (K + o(1))W\left(r_k'\right) \le (K + o(1))eW(r_k),$$

що суперечить (12). Теорему доведено.

***Зауваження* 3.** З прикладу міри μ, для якої $n(t, \mu) = \ln^p t$, $p > 0$, $t \ge e$ видно, що оцінка (11) є точною. Дійсно, тоді $N(r, \mu) = \dfrac{\ln^{p+1} t}{p+1} = W(t)$, $\Delta(t) = \dfrac{p+1}{\ln t}$, а $n(t, \mu) = \ln^p t = \Delta(t) W(t)$.

З (11) та теореми 1 отримуємо асимптотичні формули для функцій класу $\delta SH(0)$, які уточнюють співвідношення (9) та (10).

Теорема 5. *Нехай* $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(0)$, $W(r) = r^{\lambda(r)} \uparrow +\infty$, $r \to +\infty$, $\lambda(r)$ *— нульовий уточнений порядок* u. *Тоді*

$$u(x) = I(x, u_2) - I(x, u_1) + N(r, u_1) - N(r, u_2) + O(\Delta(r) W(r)), \quad r = |x| \to \infty, \tag{13}$$

$$u(x) = N(r, u_1) - N(r, u_2) + o\left(\Delta^\gamma(r) W(r)\right), \quad r = |x| \to \infty, \quad x \notin E,$$

де E *— множина нульової відносної ємності,* $0 < \gamma < 1$.

***Наслідок* 4.** *Нехай* $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(0)$. *Тоді*

$$T(r, u) = N_0(r, u) + o\left(\Delta^\gamma(r) W(r)\right), \quad r \to +\infty, \tag{14}$$

де $N_0(r, u) = \max\{N(r, u_1), N(r, u_2)\}$, $0 < \gamma < 1$.

Доведення. Інтегруючи рівність (13) вздовж кола $\left\{x \in \mathbb{R}^2; |x| = r\right\}$ і враховуючи формулу Йенсена [4, с. 145, 146], отримуємо

$$\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|x|=r} I(x, u_j) d\sigma(x) = o\left(\Delta^\gamma(r) W(r)\right), \quad r \to +\infty, \tag{15}$$

де $d\sigma(x)$ — елемент довжини на $\{x : |x| = r\}$.

Далі, з (13) маємо

$$-I(x, u_1) + o\left(\Delta^\gamma(r) W(r)\right) \le u^+ - \{N(r, u_1) - N(r, u_2)\}^+ \le$$

$$\le I(x, u_2) + o\left(\Delta^\gamma(r) W(r)\right), \quad r \to +\infty.$$

Враховуючи (15) та означення функції $T(r, u)$, з останньої нерівності отримуємо (14). Наслідок 4 доведено.

1. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
2. *Фаворос С. Ю.* О множествах понижения для субгармонических функций регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 6. – С. 1294 – 1302.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
4. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
5. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 227 – 236.
6. *Cartwright M. L.* Integral functions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956. – 135 p.
7. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1969. – Вып. 8. – С. 126 – 135.
8. *Братищев А. В., Коробейник Ю. В.* О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 1. – С. 44 – 65.

Одержано 21.03.2000,
після доопрацювання — 28.02.2001