УДК 517.946

І. Д. Пукальський (Чернів. ун-т)

ОДНОСТОРОННЯ НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

In spaces of classical functions with power weights, we prove the existence and uniqueness of solution of one-way nonlocal boundary-value problem for parabolic equations with an arbitrary power order of coefficient degeneracy. We find an estimate of solution of the problem in certain spaces.

У просторах класичних функцій із степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку односторонньої нелокальної крайової задачі для параболічних рівнянь з довільним степеневим порядком виродження коефіцієнтів. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах.

При дослідженні задач механіки, теорії пружності та керування виникають односторонні крайові задачі для диференціальних рівнянь. Таким задачам присвячено, зокрема, роботи [1, 2].

У даній статті встановлено існування і єдиність розв'язку односторонньої нелокальної задачі для нерівномірно параболічних рівнянь другого порядку без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів рівняння і крайової умови.

Постановка задачі і основний результат. Нехай D — обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. Розглянемо в області $Q = (0, T) \times D$ крайову задачу

$$(Lu)(t,x) =$$

$$= \left[D_t^1 - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x) D_{x_i}^1 - A_0(t,x) \right] u(t,x) = f(t,x), \quad (1)$$

$$u(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) u(t_j, x) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$Bu|_{\Gamma} = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) D_{x_k}^1 + A(t,x) \right] u(t,x)|_{\Gamma} \ge \psi(t,x),$$

$$u|_{\Gamma} \ge 0, \quad u(Bu - \psi)|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

де $\Gamma = (0,T) \times \partial D$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le T$.

Порядок особливості коефіцієнтів операторів L і B будуть характеризувати функції

$$s_2(l,t) = \inf\left\{ |t - t_0|^l, 1 \right\}, \quad s_1(r,t) = \inf\left\{ |x - z|^r, 1 \right\},$$

$$|x - z| = \inf_{y \in \partial D} \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}, \quad s(k\bar{\beta}) = s_1(k\beta_1, x) \cdot s_2(k\beta_2, t).$$

Нехай $\overline{Q} = [0,T] \times \overline{D}$, $\overline{D} = D \cup \partial D$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$ і $P_3(t^{(1)}, x^{(2)})$ — довільні точки із $\overline{Q}$, $t_0 \in [0, T)$. Означимо простори, в яких досліджується задача (1) – (3).

Позначимо через $C^{2+\alpha}(\bar{\gamma}, \bar{\beta}; r; Q)$ множину функцій $u(t,x)$, які визначені в $\overline{Q}$, мають неперервні частинні похідні при $t \ne t_0$ вигляду $D_t^k D_x^j u$, $2k + |j| \le 2$, для яких скінченна норма

$$\left| u; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; r, l; Q \right|_{2+\alpha} = \left| u; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; r, l; Q \right|_{2} + \left[u; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; r, l; Q \right]_{2+\alpha} \equiv$$

$$\equiv \sum_{2k+|j|\le 2} \inf_{(t,x)\in\overline{Q}} s_1(\mu_1 + l\gamma_1, x) s_2(\mu_2 + r\gamma_2, t) \left| D_t^k D_x^j u(t,x) \right| +$$

$$+ \sum_{2k+|j|=2} \left\{ \sup_{P_1, P_2 \in Q} \left[s_1(\mu_1 + l\gamma_1 + \alpha(\gamma_1 + \beta_1), \tilde{x}) s_2(\mu_2 + l\gamma_2 + \alpha(\gamma_2 + \beta_2), t^{(1)}) \times \right.\right.$$

$$\left. \times \left| x^{(1)} - x^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| D_t^k D_x^j u(P_1) - D_t^k D_x^j u(P_3) \right| \right] +$$

$$+ \sup_{P_2, P_3 \in Q} \left[s_1(\mu_1 + (l+\alpha)\gamma_1, x^{(2)}) s_2(\mu_2 + (r+\alpha)\gamma_2, \tilde{t}) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2} \times \right.$$

$$\left.\left. \times \left| D_t^k D_x^j u(P_2) - D_t^k D_x^j u(P_3) \right| \right] \right\},$$

$$|u|_Q \equiv \sup_{\overline{Q}} |u|,$$

$$\bar{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2\}, \quad \bar{\beta} = \{\beta_1, \beta_2\}, \quad \gamma_i \ge 0, \quad \beta_i \in (-\infty, \infty),$$

$$\mu_i = |j|(\gamma_i + \beta_i) + 2k\gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$s_1(r, \tilde{x}) = \inf\left(s_1\left(r, x^{(1)}\right), s_1\left(r, x^{(2)}\right)\right),$$

$$s_2(r, \tilde{t}) = \inf\left(s_2\left(r, t^{(1)}\right), s_2\left(r, t^{(2)}\right)\right).$$

$C^m(r_1, r_2; Q)$ — множина функцій $u(t,x)$, визначених в Q, для яких скінченна норма

$$\|u; r_1, r_2; Q\|_m \sum_{|j|\le[m]} \sup_{P\in\overline{Q}} s_1(r_1 + |j|, x) s_2(r_2, t) \left| D_x^j u(P) \right| +$$

$$+ \sup_{P_1, P_2 \in \overline{Q}} \sum_{|j|\le[m]} s_1(r_1 + m, \tilde{x}) s_2(r_2, t^{(1)}) \left| x^{(1)} - x^{(2)} \right|^{-\{m\}} \left| D_x^j u(P_1) - D_x^j u(P_2) \right| +$$

$$+ \sup_{P_2, P_3 \in \overline{Q}} \left[s_1(r_1, x^{(2)}) s_2\left(r_2 + \{m\}, \tilde{t}\right) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\{m/2\}} |u(P_2) - u(P_3)| \right],$$

$$m = [m] + \{m\}.$$

Нехай для задачі (1) – (3) виконані такі умови:

а) коефіцієнти $A_i(t,x) \in C^\alpha(\alpha_1, \alpha_2; Q)$, $A_0(t,x) \in C^\alpha(\delta_1, \delta_2; Q)$, $A_0(t,x) \le K$, K — const, $s\left(-2\bar{\beta}\right) A_{ij}(t,x) \in C^\alpha(Q)$, $\delta_i \ge 0$, $\alpha_i \ge 0$, $i = 0, 1$, і виконується умова рівномірної параболічності [4, с. 20] для рівняння

$$\left[D_t^1 - s\left(-2\bar{\beta}\right) \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 \right] u(t,x) = f_1(t,x); \tag{4}$$

б) коефіцієнти $q_j(x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $q_j(x) \ge 0$, $j = \overline{1, N}$, і

$$\sup_{x\in\overline{D}} \left[\sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{-\lambda t_j} \right] \le \lambda_0 < 1,$$

де λ — довільне число, що задовольняє нерівність $\lambda < \inf_{\overline{Q}}(-A_0(t,x))$;

в) вектор $\vec{b} = \{ b_1, \ldots, b_n \}$ утворює з напрямком внутрішньої нормалі до Γ в тій же точці $(t, x) \in \Gamma$ кут, що не перевищує $\pi/2$, $s(-\vec{\beta}) b_k(t, x) \in C^{1+\alpha}(Q)$, $A(t, x) \in C^{1+\alpha}(\nu_1, \nu_2; Q)$, $A(t, x) < 0$, $\nu_i \geq 0$, $i = 1, 2$, поверхня ∂D належить $C^{2+\alpha}$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1) – (3) *виконані умови а), б), в), функції*

$$f(t, x) \in C^{\alpha}\left(\vec{\gamma}, \vec{\beta}; \lambda_1, \lambda_2; Q\right), \qquad \varphi(x) \in C^{2+\alpha}\left(\vec{\gamma}_0, \vec{\beta}_0; 0, 0; D\right),$$

$$\psi(t, x) \in C^{1+\alpha}\left(\vec{\gamma}, \vec{\beta}; \eta_1, \eta_2; Q\right), \qquad \lambda_i = \frac{\delta_i}{\gamma_i}, \; \eta_i = \frac{\nu_i}{\gamma_i},$$

$$\gamma_i = \sup\left\{1 - \beta_i, \alpha_i + \beta_i, \frac{\delta_i}{2}, \nu_i\right\}, \quad i = 1, 2.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3) *у просторі* $C^{2+\alpha}\left(\vec{\gamma}, \vec{\beta}; 0, 0; Q\right)$ *і для нього виконується оцінка*

$$\left|u; \vec{\gamma}, \vec{\beta}; 0, 0; Q\right|_{2+\alpha} \leq c\left(\left|f; \vec{\gamma}, \vec{\beta}; \lambda_1, \lambda_2; Q\right|_{\alpha} + \left|\varphi; \vec{\gamma}_0, \vec{\beta}_0; 0, 0; D\right|_{2+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left|\psi; \vec{\gamma}, \vec{\beta}; \eta_1, \eta_2; Q\right|_{1+\alpha}\right).$$

С залежить від n, α, $t_1, \ldots, t_N$, T, λ_0 *і норми коефіцієнтів операторів* L *і* B; $\vec{\gamma}_0 = \{ \gamma_1, 0 \}$, $\vec{\beta}_0 = \{ \beta_1, 0 \}$.

Оцінки розв'язків односторонніх крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай

$$Q_m = \left\{(t, x) \in Q, \; s_1(1, x) \geq m_1^{-1}, \; s_2(1, t) \geq m_2^{-1}, \; m_1 > 1, \; m_2 > 1\right\}$$

є зростаючою послідовністю областей, яка при $m_i \to \infty$, $i = 1, 2$, збігається до Q, $D_m = \left\{x, x \in D, \; s_1(1, x) \geq m_1^{-1}\right\}$, $\Gamma_m = \partial D \times (0, T)$.

Розглянемо односторонню нелокальну задачу для параболічного рівняння

$$L u_m \equiv$$

$$\equiv \left\{D_t^1 - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(t, x) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 - \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x) D_{x_i}^1 - a_0(t, x)\right\} u_m = f_m(t, x), \quad (5)$$

$$u_m(0, x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) u_m(t_j, x) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$B u_m = \left[\sum_{k=1}^{n} h_k(t, x) D_{x_k}^1 + b_0(t, x)\right] u\big|_{\Gamma} \geq \psi_m(t, x),$$

$$u_m\big|_{\Gamma} \geq 0, \qquad u_m(B u_m - \psi_m)\big|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

Тут $a_{ij}(t, x) = A_{ij}^{(1)}(t, x)$, $a_i(t, x) = A_i^{(1)}(t, x)$, $a_0(t, x) = A_0^{(1)}(t, x)$, $b_0(t, x) = A^{(1)}(t, x)$, $f_m(t, x) = f^{(1)}(t, x)$, $\psi_m(t, x) = \psi^{(1)}(t, x)$, $h_k(t, x) = b_k^{(1)}(t, x)$, якщо $(t, x) \in (0, T) \times D_m$. Для $(t, x) \in Q \setminus [(0, T) \times D_m]$ коефіцієнти $h_k(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $a_i(t, x)$, $a_0(t, x)$, $b_0(t, x)$, $f_m(t, x)$, $\psi_m(t, x)$ є розв'язками зовнішньої задачі Діріхле

$$D_t u = \Delta u, \quad u(0,x) = 0, \quad u\big|_\Gamma = g(t,x),$$

де, наприклад, для $a_{ij}(t,x)$, $g(t,x) \equiv A_{ij}^{(1)}(t,x)\big|_\Gamma$,

$$A_{ij}^{(1)}(t,x) = \inf\left(A_{ij}(t,x), A_{ij}\left(m_2^{-1}, x\right)\right), \quad t_0 \in \left[0, m_2^{-1}\right],$$

$$A_{ij}^{(1)}(t,x) = \inf\left(A_{ij}(t,x), \frac{m_2(t_0-t)+1}{2} A_{ij}\left(t_0 - m_2^{-1}, x\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m_2(t-t_0)+1}{2} A_{ij}\left(t_0 + m_2^{-1}, x\right) \right), \quad t_0 \geq m_2^{-1}.$$

В задачі (5) – (7) виконаємо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t}$, де λ задовольняє умову б). Одержимо

$$L_1 v_m = (L - \lambda) v_m = f_m(t,x) e^{\lambda t}, \tag{8}$$

$$v_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{-\lambda t_j} v_m(t_j, x) = \varphi(x), \tag{9}$$

$$v_m\big|_\Gamma \geq 0, \quad B v_m\big|_\Gamma \geq \psi(t,x)e^{\lambda t}, \quad v_m(Bv_m - \psi_m e^{\lambda t})\big|_\Gamma = 0. \tag{10}$$

Знайдемо оцінку розв'язку задачі (8) – (10). Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $v_m(t,x)$ *— класичний розв'язок задачі* (8) – (10) *в області* Q *і виконані умови* а), б), в), *то для* $v_m(t,x)$ *виконується оцінка*

$$|v_m| \leq \left| b_0^{-1} \psi_m e^{\lambda t} \right|_\Gamma + \left| \varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} q_j e^{-\lambda t_j}\right)^{-1} \right|_D + \left| f_m e^{\lambda t} (-a_0 - \lambda)^{-1} \right|_Q. \tag{11}$$

Доведення. Можливі три випадки: $v_m(t,x)$ не додатний в Q, або найбільше додатне значення $v_m(t,x)$ досягається на $\Gamma_T = \Gamma \cup D$, або це найбільше значення досягається в точці $P_1 \in Q$.

У першому випадку $\max_{\overline{Q}} v_m(t,x) \leq 0$, у другому $0 < \max_{\overline{Q}} v_m(t,x) = \max_{\Gamma_T} v_m(t,x)$. Якщо $\max_{\Gamma_T} v_m(t,x) = \max_D v_m(t,x) \equiv v_m(0, x^{(2)})$, то з умови (9) маємо

$$\varphi(x^{(2)}) \geq v_m(0, x^{(2)}) \left[1 - \sum_{j=1}^{n} q_j(x^{(2)}) e^{\lambda t_j} \right].$$

Тому

$$v_m(0, x^{(2)}) \geq \left| \varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{n} q_j(x^{(2)}) e^{\lambda t_j} \right)^{-1} \right|_D.$$

Якщо $\max_{\Gamma_T} v_m(t,x) \equiv \max_\Gamma v_m(t,x) = v_m(P_4) > 0$, то, враховуючи умову (10), одержуємо

$$(Bv_m - \psi_m e^{\lambda t})\big|_{P_4} = 0. \tag{12}$$

Оскільки вектор $\vec{b}$ задовольняє умову в), то $\sum_{k=1}^{n} h_k(P_4) D_{x_k} v_m(P_4) \leq 0$ і $b_0(P_4) < 0$. З рівності (12) знаходимо

$$v_m(P_4) \leq \left| b_0^{-1} \psi_m e^{\lambda t} \right|_\Gamma.$$

У третьому випадку $\max_{\overline{Q}} v_m(t,x) = v_m(P_1)$, причому в точці P_1 виконуються співвідношення

$$D_t v_m \ge 0, \quad D_{x_i} v_m = 0, \quad -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1) D^1_{x_i} D^1_{x_j} v_m > 0$$

і рівняння (8). Тому в точці P_1 має місце нерівність

$$v_m(P_1) \le \left| f_m e^{\lambda t}(-a_0 - \lambda)^{-1} \right|_Q.$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого недодатного значення функції $v_m(t, x)$, одержуємо

$$v_m(t,x) \ge \min\left\{ 0, \min_D \left(\varphi(x) \left[1 + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{\lambda t} \right]^{-1} \right), \right.$$

$$\left. \min_\Gamma \left[b_0^{-1} \psi_m(t,x) e^{\lambda t} \right], \min\left[(-a_0 - \lambda)^{-1} f e^{\lambda t} \right] \right\}.$$

Таким чином, для розв'язку задачі (8) – (10) виконується нерівність (11).

Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\left| v_m; \bar\gamma, \bar\beta; l, r; Q \right|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як $\left| u; \bar\gamma, \bar\beta; l, r; Q \right|_{2+\alpha}$, тільки замість функцій $s_1(r, x)$, $s_2(r, t)$ розглядаємо $d_1(r, x) = \sup\left\{ s_1(r, x), m_1^{-1} \right\}$, $d_2(r, x) = \sup\left\{ s_2(r, t), m_2^{-1} \right\}$.

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми* 2. *Тоді для розв'язку задачі* (8) – (10) *має місце оцінка*

$$\left| v_m; \bar\gamma, \bar\beta; 0, 0; Q \right|_{2+\alpha} \le c\Big(\left| f_m; \bar\gamma, \bar\beta; 2, 2; Q \right|_\alpha + \left| \varphi; \bar\gamma_0, \bar\beta_0; 0, 0; D \right|_{2+\alpha} +$$

$$+ \left| \psi_m; \bar\gamma, \bar\beta; 1, 1; Q \right|_{1+\alpha} + \left| v_m \right|_Q \Big). \tag{13}$$

Стала c *не залежить від* m_1, m_2.

Доведення. Використовуючи визначення норми і інтерполяційні нерівності [5, с. 176], одержуємо

$$\left| v_m; \bar\gamma, \bar\beta; 0, 0; Q \right|_{2+\alpha} \le (1 + \varepsilon^\alpha) \left[v_m; \bar\gamma, \bar\beta; 0, 0; Q \right]_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \left| v_m \right|_Q.$$

Тому досить оцінити напівнорму $\left[v_m; \bar\gamma, \bar\beta; 0, 0; Q \right]_{2+\alpha}$.

Із визначення напівнорми випливає існування в $\overline{Q}$ точок P_1, P_2 і P_3, для яких виконується одна з нерівностей

$$e\left[v_m; \bar\gamma, \bar\beta; 0, 0; Q \right]_{2+\alpha} \le E_1 \equiv d_1(\mu_1 + \alpha(\gamma_1 + \beta_1), \tilde x) \left| x^{(1)} - x^{(2)} \right|^{-\alpha} \times$$

$$\times\, d_2\left(\mu_2 + \alpha(\gamma_2 + \beta_2), t^{(1)} \right) \left| D_t^k D_x^j v_m(P_1) - D_t^k D_x^j v_m(P_3) \right|, \tag{14}$$

$$e\left[v_m; \bar\gamma, \bar\beta; 0, 0; Q \right]_{2+\alpha} \le E_2 \equiv d_1\left(\mu_1 + \alpha\gamma_1, x^{(2)} \right) d_2\left(\mu_2 + \alpha\gamma_2, \tilde t \right) \times$$

$$\times \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2} \left| D_t^k D_x^j v_m(P_2) - D_t^k D_x^j v_m(P_3) \right|, \tag{15}$$

$$|j| + 2k = 2, \qquad e \in \left(\frac{1+\lambda_0}{2}, 1 \right).$$

Якщо $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \ge Z(2\bar\gamma)\rho^2 / 16 \equiv T_1$, $Z(k\bar\gamma) = d_1(k\gamma_1, \tilde x) d_2(k\gamma_2, \tilde t)$, ρ — довільна стала, $\rho \in (0, 1)$, то, використовуючи інтерполяційні нерівності, одержуємо

$$E_2 \le \rho^{\alpha}\left[v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; Q\right]_{2+\alpha} + c(\rho)|v_m|_Q.$$

Вибираючи $\rho = (2^{-1}\lambda_0)^{1/\alpha}$ з нерівності (15), знаходимо

$$\left|v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; Q\right|_{2+\alpha} \le c|v_m|_Q.$$

Аналогічно одержується оцінка у випадку

$$\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right| \ge Z\left(2\left(\bar{\gamma} + \bar{\beta}\right)\right)\rho / 4 \equiv T_2.$$

Розглянемо випадок, коли $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le T_1$, або $\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right| \le T_2$. Нехай $\left|x^{(1)} - y\right| \ge 2T_2$, $y \in \partial D$. Запишемо задачу (8), (9) у вигляді

$$\left[D_t^1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_4) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1\right] v_m \equiv \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(t,x) - a_{ij}(P_4)\right) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) D_{x_i}^1 + a_0(t,x) + \lambda\right] v_m + f_m e^{\lambda t} \equiv f_2(t,x), \tag{16}$$

$$v_m(0,x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{-\lambda t_j} v_m(t_j, x) \equiv \varphi_2(x). \tag{17}$$

Нехай $V_1 \in Q$, V_1 — куб з центром P_4, $V_k = \left\{(t,x), \left|t - \tilde{t}\right| \le 16k^2 T_1, \left|x_i - \tilde{x}_i\right| \le 4kT_2, i = \overline{1,n}, t \ge 0\right\}$.

Виконаємо в задачі (16), (17) заміну $v_m(t,x) \equiv w_m(t,x)$, $x_i = Z(\bar{\beta}) y_i$, $i = \overline{1,n}$. Одержимо

$$L_2 w_m \equiv \left[D_t^1 - Z\left(-2\bar{\beta}\right) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_4) D_{y_i} D_{y_j}\right] w_m \equiv f_2\left(t, Z\left(\bar{\beta}\right) y\right), \tag{18}$$

$$w_m(0,z) = \varphi_2\left(Z\left(\bar{\beta}\right) y\right). \tag{19}$$

Позначимо $y_i^{(1)} \equiv Z\left(-\bar{\beta}\right)\tilde{x}_i$, $H_k = \left\{(t,y), \left|t - \tilde{t}\right| \le 16k^2 T_1, \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le 4kZ(\bar{\gamma}), i = \overline{1,n}\right\}$ і розглянемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in H_{1/4}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1; \\ 0, & (t,y) \in H_{3/4}, \quad \left|D_t^k D_y^j \eta(t,y)\right| \le c_{kj} Z(-(2k + |j|)\bar{\gamma}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,y) = w_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє задачу Коші

$$L_2 W_m = Z\left(-2\bar{\beta}\right) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_4)\left[D_{y_i}^1 w D_{y_j}^1 \eta + D_{y_j}^1 w_m D_{y_i}^1 \eta\right] +$$

$$+ w_m\left[\sum_{i,j=1}^{n} Z\left(-2\bar{\beta}\right) a_{ij}(P_4) D_{y_i}^1 D_{y_j}^1 \eta - D_t \eta\right] + f_2 \eta \equiv f_3(t,y), \tag{20}$$

$$W_m(0,y) = \varphi_2(0,y)\eta(0,y) = \varphi_3(y). \tag{21}$$

Використовуючи теорему 5.1 [4, с. 364], для довільних точок M_1 і $M_2 \in H_{1/4}$ одержуємо нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\left| D_t^k D_y^j w_m(M_1) - D_t^k D_y^j w_m(M_2)\right| \le$$

$$\le c\left(| f_3 |_{C^{\alpha}(H_{3/4})} + |\varphi_3|_{C^{2+\alpha}\left(H_{3/4}\cap(t=0)\right)}\right), \quad 2k + |j| = 2, \tag{22}$$

де $d(M_1, M_2)$ — параболічна віддаль між M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, y)$, маємо

$$| f_3 |_{C^{\alpha}(H_{3/4})} \le cZ(-(2+\alpha)\bar{\gamma})\left(\left| f_2; \bar{\gamma}, 0; 2, 2; H_{3/4}\right|_{\alpha} +\right.$$

$$\left. + \left| w_m; \bar{\gamma}, 0; 0, 0; H_{3/4}\right|_2 + | w_m |_{H_{3/4}}\right), \tag{23}$$

$$|\varphi_3|_{C^{2+\alpha}\left(H_{3/4}\cap(t=0)\right)} \le cZ(-(2+\alpha)\bar{\gamma})\left|\varphi_2; \bar{\gamma}, 0; 0, 0; H_{3/4}\cap(t=0)\right|_{2+\alpha}.$$

Із визначення простору $C^{2+\alpha}\left(\bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; Q\right)$ випливають нерівності

$$c_1\left| w_m; \bar{\gamma}, 0; 0, 0; H_{3/4}\right|_{2+\alpha} \le$$

$$\le \left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4}\right|_{2+\alpha} \le c_2\left| w_m; \bar{\gamma}, 0; 0, 0; H_{3/4}\right|_{2+\alpha}.$$

Підставляючи (23) в (22) і повертаючись до змінних (t, x), знаходимо

$$E_i \le c\left(\left| f_2; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 2, 2; H_{3/4}\right|_{\alpha} + \left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4}\right|_2 + | v_m |_{V_{3/4}} +\right.$$

$$\left. + \left|\varphi_2; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4}\cap(t=0)\right|_{2+\alpha}\right), \quad i = 1, 2. \tag{24}$$

Нехай $R_1(\tau^{(1)}, \xi^{(1)})$, $R_2(\tau^{(2)}, \xi^{(2)})$ і $R_3(\tau^{(1)}, \xi^{(2)})$ — довільні точки із $V_{3/4}$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, оцінимо напівнорму кожного доданка функції $f_2(t, x)$. Наприклад, для $\left[a_i D_{x_i} v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 2, 2; V_{3/4}\right]_{\alpha} \equiv F_1$ маємо

$$F_1 \le \sup_{R_1, R_3 \in V_{3/4}} \left\{\left[Z_1\left((1+\alpha)\left(\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)\right)\left|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}\right|^{-\alpha}\left| D_{\xi_i}^1 v_m(R_1) - D_{\xi_i}^1 v_m(R_3)\right|\right] \times\right.$$

$$\times \left[Z_1\left(\bar{\gamma}-\bar{\beta}\right)| a_i(R_1)|\right] + \left[a_i(R_1) - a_i(R_3)\left|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}\right|^{-\alpha} \times\right.$$

$$\left.\left.\times Z_1\left(\bar{\gamma}-\bar{\beta}\right) Z_1(\alpha)\left(\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)\right)\right]\left| D_{\xi_i}^1 v_m(R_3)\right| Z_1\left(\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)\Big\} +$$

$$+ \sup_{R_2, R_3 \in V_{3/4}} \left\{\left[Z_1\left(\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right) Z_1(\alpha\bar{\gamma})\left|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left| D_{\xi_i}^1 v_m(R_2) - D_{\xi_i}^1 v_m(R_3)\right|\right] \times\right.$$

$$\times \left[Z_1\left(\bar{\gamma}-\bar{\beta}\right)| a_i(R_2)|\right] + \left[Z_1\left(\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)\left| D_{\xi_i}^1 v_m(R_3)\right|\right] \times$$

$$\left.\times \left[Z_1\left(\bar{\gamma}-\bar{\beta}\right) Z_1(\alpha\bar{\gamma})| a_i(R_2) - a_i(R_3)|\left|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\right]\right\} \le$$

$$\le c\left(\left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4}\right|_2 + | v_m |_{V_{3/4}}\right),$$

де $Z_1(k\bar{\beta}) \equiv d_1(k\beta_1, \bar{\xi}) d_2(k\beta_2, \bar{\tau})$.

Аналогічно одержуються оцінки інших доданків функцій $f_2(t, x)$ та $\varphi_2(x)$:

$$\left|\varphi_2; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4}\cap(t=0)\right|_{2+\alpha} \le c\left|\varphi; \bar{\gamma}_0, \bar{\beta}_0; 0, 0; V_{3/4}\cap(t=0)\right|_{2+\alpha} +$$

$$+ (\lambda_0 + \varepsilon)\left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4}\right|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)| v_m |_{V_{3/4}}, \tag{25}$$

$$\left| f_2; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4} \right|_{\alpha} \le \varepsilon_1^{\alpha} \left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4} \right|_{2+\alpha} +$$
$$+ c\left(\left| f_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 2, 2; V_{3/4} \right|_{\alpha} + |v_m|_{V_{3/4}} \right), \tag{26}$$

де $\varepsilon_1 = n^2\rho^2 + \varepsilon^{\alpha}$, ρ, ε — довільні числа, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1)$.

Підставляючи (25), (26) в нерівність (24), одержуємо

$$E_i \le c\left(\left| f_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 2, 2; V_{3/4} \right|_{\alpha} + \left| \varphi; \bar{\gamma}_0, \bar{\beta}_0; 0, 0; V_{3/4} \cap (t=0) \right|_{2+\alpha} + |v_m|_{V_{3/4}} \right) +$$
$$+ \left(\varepsilon_1^{\alpha} + \lambda_0 + \varepsilon \right) \left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; V_{3/4} \right|_{2+\alpha}. \tag{27}$$

Нехай $\left| x^{(1)} - y \right| < 2T_2$, $y \in \partial D$. Розглянемо кулю $K(r, P)$ радіуса r, $r > 4T_2$, з центром в деякій точці $P \in \Gamma$, яка містить точки P_1, P_2 і P_3. Використовуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K(r, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = g(y)$ [6, с. 126], в результаті якого область $\Pi = Q \cap K(r, P)$ переходить в область Π_1, для точок якої $y_n \ge 0$, $t \ge 0$. Якщо покласти $v_m(t, x) \equiv \xi_m(t, y)$, $P_i \equiv B_i$, $i = 1, 2, 3$, $d_1(k\bar{\gamma}, \tilde{x}) d_2(k\bar{\gamma}, \tilde{t}) \equiv d_1(k\bar{\gamma}, y^{(1)}) d_2(k\bar{\gamma}, t^{(1)}) \equiv Z_2(k\bar{\gamma})$, і коефіцієнти операторів задачі (8) – (10) при цьому перетворенні позначити через $k_{ij}(t, y)$, $k_i(t, y)$, $k_0(t, y)$, $l_k(t, y)$, $l_0(t, y)$, то $\xi_m(t, y)$ буде задовольняти на межі $y_n = 0$ умову

$$\xi_m(t, y) \left(\sum_{i=1}^{n} l_i(t, y) \frac{\partial \xi_m}{\partial y_i} + l_0(t, y)\xi_m - \psi_m(t, g(y)) e^{\lambda t} \right) \Bigg|_{y_n = 0} = 0.$$

Можливі два випадки: або існує точка $B_1'\left(t, y_1^{(1)}, \ldots, y_{n-1}^{(1)}, 0\right) \equiv B_1'(t, y')$, в якій виконується умова

$$\left[\sum_{i=1}^{n} l_i(B_1') \frac{\partial \xi_m}{\partial y_i} + l_0(B_1')\xi_m - \psi_m(t, g(y')) e^{\lambda t} \right] \Bigg|_{y_n = 0} = 0,$$

або такої точки не існує, тоді з крайової умови (10) маємо $\xi_m(B_1') = 0$ для всіх точок, що належать межі області Π_1, де $y_n = 0$.

Якщо має місце перший випадок, то виконавши заміну $\xi_m(t, y) = w_m(t, z)$, де $y_i = Z_2(\bar{\beta}) z_i$, $i = \overline{1, n}$, одержимо, що $w_m(t, z)$ буде розв'язком задачі

$$\left[D_t^1 - Z_2(-2\bar{\beta}) \sum_{i,j=1}^{l} k_{ij}(B_1) D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 \right] w_m \equiv Z_2(-2\bar{\beta}) \sum_{i,j=1}^{n} \left[k_{ij}\left(t, Z_2(\bar{\beta})z\right) - k_{ij}(B_1) \right] \times$$
$$\times D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 w_m + Z_2(-\bar{\beta}) \sum_{j=1}^{n} k_i\left(t, Z_2(\bar{\beta})z\right) D_{z_i}^1 w_m + \left(k_0\left(t, Z_2(\bar{\beta})z\right) + \lambda \right) w_m +$$
$$+ f_m\left(t, g\left(Z_2(\bar{\beta})z\right)\right) \equiv F_m(t, z), \tag{28}$$

$$w_m(0, Z) = \varphi_2\left(g\left(Z_2(\bar{\beta})z\right)\right) \equiv \varphi_4(z), \tag{29}$$

$$Z_2(-\bar{\beta}) \sum_{i=1}^{n} l(B_1') D_{z_i} w_m \Big|_{z_n = 0} = \Bigg\{ Z_2(-\bar{\beta}) \sum_{i,j=1}^{n} \left[l_i\left(t, Z_2(\bar{\beta})z\right) - l(B_1') \right] D_{z_i} w_m +$$
$$+ l_0\left(t, Z_2(\bar{\beta})z\right) w_m + \psi_m\left(t, g\left(Z_2(\bar{\beta})z\right)\right) e^{\lambda t} \Bigg\} \Bigg|_{z_n = 0} = G_m(t, z'). \tag{30}$$

Позначимо $z_i^{(1)} = Z_2(-\bar{\beta}) y_i^{(1)}$, $N_r = \{(t, z) : 0 \le \left| t - t^{(1)} \right| \le \rho^2 r^2 Z_2(-2\bar{\gamma})$,

$\left|z_i - z_i^{(1)}\right| \le \rho r Z_2(\bar{\gamma}),\ i = \overline{1,n},\ z_n \ge 0\}$ і розглянемо тричі диференційовну функцію $\eta_1(t,z)$,

$$\eta_1(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in N_{1/4}, \quad 0 \le \eta(t,z) \le 1; \\ 0, & (t,z) \notin H_{3/4}, \quad \left|D_t^k D_z^j \eta(t,z)\right| \le c_{kj} Z(-(2k+|j|)\bar{\gamma}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z) \equiv \eta_1(t,z) w_m(t,z)$ задовольняє крайову задачу

$$\left[D_t^1 - Z_2(-2\bar{\beta}) \sum_{i,j=1}^{l} k_{ij}(B_1') D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 \right] W_m \equiv Z_2(-2\bar{\beta}) \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(B_1') \times$$

$$\times \left[D_{z_i}^1 w_m D_{z_j}^1 \eta_1 + D_{z_j}^1 w_m D_{z_i}^1 \eta_1 \right] + w_m \left[Z_2(-2\bar{\beta}) \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(B_1') D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 \eta_1 - D_t^1 \eta_1 \right] +$$

$$+ F_m \eta_1 \equiv F_m^{(2)}(t,z), \tag{31}$$

$$W_m(0,z) \equiv \varphi_4(z) \eta_1(0,z) \equiv \varphi_5(z), \tag{32}$$

$$Z_2(-\bar{\beta}) \sum_{i=1}^{n} l(B_1') D_{z_i}^1 W_m \Big|_{z_n=0} = \left(G_m \eta_1 + Z_2(-\bar{\beta}) \sum_{i=1}^{n} l_i(B_1') D_{z_i}^1 \eta_1 \right) \Bigg|_{z_n=0} \equiv$$

$$\equiv G_m^{(2)}(t,z'). \tag{33}$$

Коефіцієнти рівняння (31) та крайової задачі (33) обмежені. Тому, використовуючи теорему 6.1 [4, с. 368], для довільних точок $M_1, M_2 \in N_{1/4}$ при $2k + |j| = 2$ маємо

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2) \left| D_t^k D_z^j w_m(M_1) - D_t^k D_z^j w_m(M_2) \right| \le c \left(\left| F_m^{(2)} \right|_{C^\alpha(N_{3/4})} + \right.$$

$$\left. + |\varphi_5|_{C^{2+\alpha}(N_{3/4} \cap (t=0))} + \left| G_m^{(2)} \right|_{C^{1+\alpha}(N_{3/4} \cap (z_n=0))} \right).$$

Міркуючи, як і при доведенні нерівності (27), знаходимо

$$E_i \le c \left(\left| f_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 2, 2; \Pi \right|_\alpha + \left| \varphi; \bar{\gamma}_0, \bar{\beta}_0; 0, 0; \Pi \cap (t=0) \right|_{2+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left| \psi_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 1, 1; \Pi \cap \Gamma \right|_{2+\alpha} + |v_m|_\Pi \right) + \left(\varepsilon_1^\alpha + \lambda_0 + \varepsilon \right) \left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; \Pi \right|_{2+\alpha}. \tag{34}$$

Якщо має місце другий випадок, тобто $w_m(t,z') = 0$, то, повторюючи наведені вище міркування, одержуємо, що $w_m(t,z)$ задовольняє рівняння (31), початкову умову (32) і крайову умову $w_m(t,z') = 0$.

Тоді, використовуючи теорему 6.1 [4, с. 368], отримуємо в цьому випадку для E_i нерівності (27). Враховуючи нерівності (14), (15), (27), (34), одержуємо оцінку (13).

Встановимо існування розв'язку задачі (8) – (10). Справедлива така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконані умови теореми* 1, *то існує єдиний розв'язок задачі* (8) – (10), *для якого справедлива оцінка*

$$\left| v_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; Q \right|_{2+\alpha} \le c \left(\left| f; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; \lambda_1, \lambda_2; Q \right|_\alpha + \left| \varphi; \bar{\gamma}_0, \bar{\beta}_0; 0, 0; D \right|_{2+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left| \psi; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; \eta_1, \eta_2; Q \right|_{1+\alpha} \right). \tag{35}$$

Стала c *не залежить від* m.

Доведення. В задачі (8) – (10) виконаємо заміну $v_m(t,x) = w_m(t,x) e^{Rt}$, де R — додатна стала, яку виберемо нижче, і розв'язок її будемо шукати методом „штрафу" [1].

Для цього розглянемо крайову задачу

$$(L_1+R)w_{m,\varepsilon} = f_m(t,x)e^{(\lambda-R)t},$$
$$w_{m,\varepsilon}(0,x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-(\lambda-R)t_j} w_{m,\varepsilon}(t,x), \tag{36}$$
$$Bw_{m,\varepsilon}|_\Gamma = \psi_m(t,x)e^{(\lambda-R)t} + \frac{1}{\varepsilon^\rho}\sup(-w_{m,\varepsilon},0), \quad 0<\rho<\frac{1}{2}.$$

Враховуючи, що при кожному фіксованому m_i для компонент функції Гріна $\left(G_1^{(m)}, G_2^{(m)}\right)$ [7] крайової задачі

$$(L_1+R)w_m = f_m(t,x)e^{(\lambda-R)t}, \quad w_m(0,x) = \psi(x),$$
$$Bw_m|_\Gamma = \psi_m(t,x)e^{(\lambda-R)t} \tag{37}$$

виконується оцінка

$$\left|G_i^{(m)}\right| \le c_m(t-\tau)^{-n/2}\exp\left\{-R(t-r)-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \quad i=1,2,$$

поставимо у відповідність задачі (36) інтегральне рівняння

$$w_{m,\varepsilon}(t,x) = w_m^{(0)}(t,x) - \sum_{j=1}^{N}\int_D q_j(y)e^{-(\lambda-R)t_j}G_1^{(m)}(t,x,0,y)w_{m,\varepsilon}(t_j,y)\,dy +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^\rho}\int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_2^{(m)}(t,x,\tau,y)\sup\left(-w_{m,\varepsilon}(\tau,y),0\right)d_yS, \tag{38}$$

де $w_m^{(0)}(t,x)$ — розв'язок крайової задачі (37).

Враховуючи теорему 2 для $w_m^{(0)}(t,x)$, одержуємо оцінку

$$\left|w_m^{(0)}\right| \le c\left(\left|f_m;\bar\gamma,\bar\beta;\lambda_1,\lambda_2;Q\right|_0 + \left|\varphi;\bar\gamma_0,\bar\beta_0;0,0;D\right|_0 + \left|\psi;\bar\gamma,\bar\beta;\eta_1,\eta_2;Q\right|_0\right). \tag{39}$$

Розв'язок рівняння (38) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$w_{m,\varepsilon}^{(k)}(t,x) = w_m^{(0)}(t,x) - \sum_{j=1}^{N}\int_D q_j(y)e^{-(\lambda-R)t_j}G_1^{(m)}(t,x,0,y)w_{m,\varepsilon}^{(k-1)}(t_j,y)\,dy +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^\rho}\int_0^t d\tau\int_{\partial D} G_2^{(m)}(t,x,\tau,y)\sup\left(-w_{m,\varepsilon}^{(k-1)}(\tau,y),0\right)d_yS, \quad k=1,2,\ldots.$$

Оцінимо різниці між послідовними наближеннями. При $k=1$ маємо

$$\left|w_{m,\varepsilon}^{(1)}(t,x) - w_{m,\varepsilon}^{(0)}(t,x)\right| \le \lambda_0\left|w_m^{(0)}\right|_Q +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^\rho}cc_m\left[\int_0^{t-\varepsilon_1} e^{-R(t-\tau)}(t-\tau)^{-1/2}d\tau + \int_{t-\varepsilon_1}^{t} e^{-R(t-\tau)}(t-\tau)^{-1/2}d\tau\right]\left|w_m^{(0)}\right|_Q \le$$
$$\le \left|w_m^{(0)}\right|_Q\left(\lambda_0 + \frac{cc_m}{\varepsilon^\rho}\left(e^{-R\varepsilon_1}T^{1/2}+\varepsilon_1^{1/2}\right)\right).$$

Числа R і ε_1 вибираємо так, щоб

$$c(R, \lambda_0, \varepsilon_1) \equiv \lambda_0 + \frac{cc_m}{\varepsilon^\rho}\left(e^{-R\varepsilon_1}T^{1/2} + \varepsilon_1^{1/2}\right) < 1.$$

Оцінюючи різницю між послідовними наближеннями, знаходимо

$$\left| w_{m,\varepsilon}^{(k)}(t,x) - w_{m,\varepsilon}^{(k-1)}(t,x) \right| \le c^k(R, \lambda_0, \varepsilon_1) \left| w_m^{(0)} \right|_Q.$$

Таким чином, розв'язок задачі (36) зображується функціональним рядом

$$w_{m,\varepsilon}(t,x) = w_{m,\varepsilon}^{(0)}(t,x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[w_{m,\varepsilon}^{(k)}(t,x) - w_{m,\varepsilon}^{(k-1)}(t,x) \right].$$

Міркуючи, як і при доведенні теореми 2, встановлюємо, що для нього справедлива оцінка (39), де стала c не залежить від ε.

Виділяючи з обмеженої послідовності $w_{m,\varepsilon}(t,x)$ збіжну підпослідовність і переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо розв'язок задачі (8) – (10), для якого справедлива оцінка (39). Враховуючи (13) і (39), одержуємо нерівність (35).

***Доведення теореми* 1.** Оскільки

$$\left| f_m; \bar\gamma, \bar\beta; 2, 2; Q \right|_\alpha \le \left| f; \bar\gamma, \bar\beta; \lambda_1, \lambda_2; Q \right|_\alpha,$$

$$\left| \psi_m; \bar\gamma, \bar\beta; 1, 1; Q \right|_{1+\alpha} \le c \left| \psi; \bar\gamma, \bar\beta; \eta_1, \eta_2; Q \right|_{1+\alpha},$$

то згідно з теоремою 2 одержуємо

$$|v_m|_Q \le c\left(\left| f; \bar\gamma, \bar\beta; \lambda_1, \lambda_2; Q \right|_0 + \left| \varphi; \bar\gamma_0, \bar\beta_0; 0, 0; D \right|_0 + \left| \psi; \bar\gamma, \bar\beta; \eta_1, \eta_2; Q \right|_0 \right).$$

Тому права частина нерівності (13) не залежить від m, а послідовності

$$\Big\{ V_{kj}^{m_1, m_2} \equiv Z\big((|j| + 2k)\bar\gamma + |j|\bar\beta\big) D_x^j D_t^k v_m(t,x),\ (t,x) \in Q,$$
$$2k + |j| = 2,\ m_1 > 1,\ m_2 > 1 \Big\}$$

рівномірно обмежені і одностайно неперервні. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\left\{ V_{kj}^{m_1(i), m_2(l)} \right\}$, рівномірно збіжні в Q до v_{kj}.

Переходячи до границі при $m_1(i) \to \infty$, $m_2(l) \to \infty$ в задачі (8) – (10), одержуємо, що $u = v_{0,0}e^{-\lambda t}$ — єдиний розв'язок задачі (1) – (3), $u \in C^{2+\alpha}\left(\bar\gamma, \bar\beta; 0, 0; Q\right)$ і має місце оцінка, наведена в теоремі 1.

1. *Лионс Ж.-Л.* О неравенствах в частных производных // Успехи мат. наук. – 1971. – **26**, № 2. – С. 205 – 262.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.*Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Chabrowski J.* On non-local problems for parabolic equations // Nagaya Math. J. – 1984. – **93**. – P. 109 – 131.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
6. *Камынин Л. И., Масленникова В. Н.* Граничные оценки шаудеровского типа решения задачи с косой производной для параболического уравнения в нецилиндрической области // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 1. – С. 83 – 128.
7. *Матийчук М. И.* Задача с косой производной для параболических уравнений с минимальной гладкостью и вырождением // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 4. – С. 893 – 907.

Одержано 10.05.2000