УДК 517.5

А. А. Лигун (Днепродзерж. техн. ун-т),
А. А. Шумейко (Днепропетров. юрид. ин-т МВД Украины)

ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА БИНАРНОМ ПОПОЛНЕНИИ ДАННЫХ

We construct a linear method of recovery based on binary supplement of data according to the Bessel interpolational formula. We find an asymptotic value of error and the norm of the method, study its properties.

Побудовано лінійний метод відновлення на основі бінарного поповнення даних за інтерполяційною формулою Бесселя. Знайдено асимптотичну величину похибки методу, його норму, вивчено властивості методу.

Одной из классических задач теории аппроксимации является восстановление функции по ее значениям в равноотстоящих узлах. В случае периодических функций для этого используются интерполяционные тригонометрические полиномы, периодические интерполяционные сплайны, для функций, заданных на отрезке, — классические интерполяционные полиномы, интерполяционные сплайны, сплайны, асимптотически совпадающие с интерполяционными, и т. д. (см., например, [1]). В последние десятилетия активно развиваются методы, основанные на использовании всплесков (см. [2]), а также методы, основанные на пополнении данных [2–4], которые оказались более удобными в приложениях.

По-видимому, впервые метод, построенный на бинарном пополнении данных, был рассмотрен в работе [3]. Позже такого рода вопросы рассматривались, например, в работе [4]. Исследования в этом направлении привели к созданию новых, широко используемых прикладных программ.

В данной работе строятся линейные методы восстановления функций по информации об их значениях в равноотстоящих точках. Доказывается, что построенные операторы восстановления являются линейными операторами сумматорного типа, базисные функции которых имеют малые носители. Изучены аппроксимационные свойства этих операторов и даны гарантированные оценки их норм. Установлено, что базисные функции представимы в виде конечных линейных комбинаций сдвигов сжатых в два раза тех же базисных функций, что позволяет использовать их как масштабирующие функции для кратномасштабного анализа (см. [2], гл. 5).

Полученные результаты показывают, что при использовании предложенных методов для передачи и последующего восстановления сигналов кодировать сигнал и передавать соответствующую информацию можно по „слоям". В этом случае при заданной ошибке округления ε погрешность восстановления гладкой функции по информации на k-м слое будет меньше, чем на начальном слое, примерно в 4^{kr} раз (здесь r — параметр, определяющий метод). При этом, хотя формально каждый слой содержит вдвое большее количество информации, чем предыдущий, в реальных задачах на каждом последующем слое передается информации гораздо меньше в связи с отбрасыванием информации меньше заданного ε. Точная формулировка этого факта приведена в конце статьи. Заметим, что для многомерных аналогов этот факт существенно усиливается.

Для простоты изложения будем рассматривать данные, определенные на всей оси. В этом случае результаты имеют законченный вид и легко адаптируются для данных, определенных на отрезке.

Через $l_\infty(\mathbb{R})$ обозначим пространство ограниченных числовых последовательностей $\mathbf{f} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{l_\infty(\mathbb{R})} = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |f_i|.$$

© А. А. ЛИГУН, А. А. ШУМЕЙКО, 2001

Пусть $\mathbf{x}_0 = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{x_{i,0}\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{ih\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — равномерное разбиение оси с шагом $h > 0$ и $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 = \{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}} = \{f_{\nu,0}\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ — последовательность из $l_\infty(\mathbb{R})$.

Пусть дано m линейных функционалов $A_\mu(\mathbf{f})$, $\mu = 1, \ldots, m$, и зафиксирована система точек $\xi_\mu \in (0,1)$, $\mu = 1, \ldots, m$, такая, что $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < 1$. Полагаем $\mathbf{f}_0 = A_0(\mathbf{f})$ и $\hat{\mathbf{f}}_\mu^{0,\nu} = A_\mu(\mathbf{f}_0^\nu)$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$, где $\mathbf{f}_0^\nu$ — сдвиг последовательности $\mathbf{f}_0$, т. е. $\mathbf{f}_0^\nu = \{f_{i-\nu}\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Построим новые последовательности $\mathbf{x}_1 = \{x_{i,1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\mathbf{f}_1 = \{f_{\nu,1}\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, полагая

$$x_{mi+\mu,1} = x_{i,0} + \xi_\mu(x_{i+1,0} - x_{i,0}) = x_{i,0} + \xi_\mu h, \quad \mu = 0, \ldots, m,$$

и, аналогично,

$$f_{mi+\mu,1} = \hat{f}_{\mu,i}^0 = A_\mu(\mathbf{f}_0^i), \quad \mu = 0, \ldots, m.$$

Упорядоченный по возрастанию набор чисел $x_{mi+\mu,1}$ образует новое разбиение оси, которое обозначим через $\mathbf{x}_1$, а его элементы — через $x_{\nu,1}$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Соответственно числа $f_{mi+\mu,1}$ обозначаем через $f_{\nu,1}$ и полагаем $\mathbf{f}_1 = \{f_{\nu,1}\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$.

Полученный набор используем в качестве исходного и повторяем процедуру пополнения данных, что приводит к рекуррентным формулам для $\mathbf{x}_k = \{x_{\nu,k}\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, и $\mathbf{f}_k = \{f_{\nu,k}\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$:

$$x_{mi+\mu,k} = x_{i,k-1} + \xi_\mu(x_{i+1,k-1} - x_{i,k-1}), \quad \mu = 0, \ldots, m, \tag{1}$$

$$f_{mi+\mu,k} = A_\mu(\mathbf{f}_{k-1}^i), \quad \mu = 0, \ldots, m. \tag{2}$$

Для $m = 1$ (в этом случае задан один функционал $A(\mathbf{f}) = A_1(\mathbf{f})$) метод пополнения называют *бинарным пополнением* и формулы пополнения (1), (2) упрощаются:

$$x_{2i,k} = x_{i,k-1}, \quad f_{2i,k} = f_{i,k-1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и

$$x_{2i+1,k} = \frac{x_{i,k-1} + x_{i+1,k-1}}{2}, \quad f_{2i+1,k} = A(\mathbf{f}_{k-1}^i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

В работе рассмотрен линейный метод восстановления, основанный на бинарном пополнении данных.

Через $2r$ точек (x_ν, f_ν) $(\nu = -r+1, \ldots, r)$ проведем интерполяционный полином Бесселя порядка $2r-1$ и вычислим его значение $\hat{f}_{1,0}^0$ в точке $x_{1/2} = h/2$. Это приведет к формуле (см., например, [5, с. 678])

$$A(\mathbf{f}) = \hat{f}_{1,0}^0 = \frac{f_{1,0} + f_{0,0}}{2} + \sum_{n=1}^{r-1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}} \Delta^{2n}\left(\frac{f_{1,0} + f_{0,0}}{2}\right), \tag{5}$$

где $\Delta^{2n} z_i$ — $2n$-я центральная разность z_i.

Алгоритм пополнения (3), (4) в этом случае имеет вид

$$x_{2i,k} = x_{i,k-1}, \quad f_{2i,k} = f_{i,k-1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

и

$$x_{2i+1,k} = \frac{x_{i,k-1} + x_{i+1,k-1}}{2},$$

$$f_{2i+1,k} := \frac{f_{i+1,k-1} + f_{i,k-1}}{2} + \sum_{n=1}^{r-1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}} \Delta^{2n}\left(\frac{f_{i+1,k-1} + f_{i,k-1}}{2}\right), \quad i \in \mathbb{Z}, \; k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

При $r = 2$ метод пополнения (6), (7) рассматривался в работах [3, 4].

Для каждого фиксированного k построим ломаную $g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$, принимающую значения $f_{i,k}$ в узлах $x_{i,k}$.

Пусть

$$\Delta g_{r,k,h}(\mathbf{f},x) = g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x+x_{i,k}) - g_{r,k,h}(\mathbf{f},x) = g_{r,k,h}\left(\mathbf{f}, x+\frac{h}{2^k}\right) - g_{r,k,h}(\mathbf{f},x),$$

$$\Delta^k g_{r,k,h}(\mathbf{f},x) = \Delta\left(\Delta^{k-1} g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)\right), \quad k \geq 2.$$

Заметим, что

$$\left\|\Delta^{2n} g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})} \leq 2^{2n-2}\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})} \leq 2^{2n-1}\left\|\Delta g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{8}$$

Лемма 1. *Для любой последовательности* $\mathbf{f} \in l_\infty(\mathbb{R})$ *и произвольных фиксированных* $k, \mu \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$\left\|\Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})} \leq \varepsilon_r \left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})} \tag{9}$$

и

$$\left\|g_{r,k+\mu,h}(\mathbf{f}) - g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon_r^2}{2}\frac{1-\varepsilon_r^\mu}{1-\varepsilon_r}\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon_r = \sum_{n=1}^{r-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2}. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\left|\Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{\nu,k+1})\right|.$$

Пусть $\nu = 2\mu + 1$, тогда

$$\left|\Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1})\right| =$$

$$= \left|g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) - 2g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1}) + g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+2,k+1})\right| =$$

$$= \Bigg| g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k}) - 2\Bigg(\frac{g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})}{2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{r-1}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}}\Delta^{2n}\left(\frac{1}{2}\left(g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k}) + g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})\right)\right)\Bigg)\Bigg| \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{r-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}}\left\|\Delta^{2n} g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Отсюда и из (8) получаем

$$\left|\Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1})\right| \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{r-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}}2^{2n-2}\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})} = \varepsilon_r\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Пусть теперь $\nu = 2\mu$, тогда

$$\left|\Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1})\right| =$$

$$= \left|g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu-1,k+1}) - 2g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) + g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1})\right| =$$

$$= \left|\frac{g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2} - 2g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) + \right.$$

$$+\ \frac{g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})+g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r-1}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}}\Delta^{2n}\Big(g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k})\ +$$

$$+\ 2g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k})+g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\Big)\Bigg|\ \le$$

$$\le\ \frac{1}{4}\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}+\sum_{n=2}^{r-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}}\left\|\Delta^{2n}g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Используя соотношение (8), отсюда имеем

$$\left|\Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1})\right|\ \le\ \varepsilon_r\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Неравенство (9) доказано.

Из полученного соотношения и того факта, что

$$\left\|\Delta^2 g_{r,0,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}\ =\ \left\|\Delta^2(\mathbf{f})\right\|_{l_\infty(\mathbb{R})},$$

непосредственно получаем, то для любой последовательности $\mathbf{f}\in l_\infty(\mathbb{R})$ и $k\in$ $\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}\ \le\ \varepsilon_r^k\left\|\Delta^2(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{12}$$

Докажем теперь неравенство (10). Пусть $\mu = 1$. По построению, $g_{r,k+1,h}(\mathbf{f},x)$ — ломаная с узлами в точках $x_{\nu,k+1}$, принимающая значения $f_{\nu,k+1}$ в узлах, а $g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$ — ломаная с узлами в точках $x_{\nu,k}$ со значениями в узлах, равными $f_{\nu,k}$. Отсюда и из того факта, что $f_{2\nu,k+1} = f_{\nu,k}$, следует, что разность $g_{r,k+1,h}(\mathbf{f},x)-g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$ — ломаная с узлами в точках $x_{\nu,k+1}$, обращающаяся в нуль в точках $x_{\nu,k} = x_{2\nu,k+1}$. Таким образом, для доказательства неравенства (10) при $\mu=1$ достаточно показать, что для всех $\nu\in\mathbb{Z}$

$$\left|g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})-g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})\right|\ \le\ \frac{\varepsilon_r^2}{2}\left\|\Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Действительно,

$$g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})\ =\ \frac{g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1})+g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}\ +$$

$$+\ \sum_{n=1}^{r-1}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}}\Delta^{2n}\left(\frac{g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1})+g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}\right).$$

С другой стороны, так как для $x\in[x_{2\nu,k+1}, x_{2\nu+2,k+1}]$ графиком функции $g_{r,k,h}$ является отрезок прямой, то

$$g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})\ =\ \frac{g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1})+g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}.$$

Таким образом,

$$g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})\ -\ g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})\ =$$

$$=\ \sum_{n=1}^{r-1}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n}}\Delta^{2n}\left(\frac{g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1})+g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}\right). \tag{13}$$

Следовательно,

$$\left|g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})-g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})\right|\ \le\ \frac{\varepsilon_r}{2}\left\|\Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f})\right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Отсюда и из (9) получаем

$$\left| g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) - g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) \right| \le \frac{\varepsilon_r^2}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})},$$

что и доказывает (10) при $\mu = 1$.

Пусть теперь $\mu > 1$, тогда

$$\left\| g_{r,k+\mu}(\mathbf{f}) \quad g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \le \left\| g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}) - g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} +$$

$$+ \left\| g_{r,k+2}(\mathbf{f}) - g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} + \ldots + \left\| g_{r,k+\mu}(\mathbf{f}) - g_{r,k+\mu-1}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon_r^2}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{\varepsilon_r^2}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k+1,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} + \ldots + \frac{\varepsilon_r^2}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k+\mu-1}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon_r^2}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{\varepsilon_r^3}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} + \ldots + \frac{\varepsilon_r^{\mu+1}}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} =$$

$$= \frac{\varepsilon_r^2}{2} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \left(1 + \varepsilon_r + \ldots + \varepsilon_r^{\mu-1}\right) < \frac{\varepsilon_r^2}{2} \frac{1-\varepsilon_r^{\mu}}{1-\varepsilon_r} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{16}, \quad \varepsilon_3 = \frac{11}{32} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_7 = 0{,}96630859375.$$

Следовательно, с учетом (12) для $r = 2, \ldots, 7$ выполняются неравенства

$$\left\| g_{r,k+\mu,h}(\mathbf{f}) - g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{\varepsilon_r^{k+2}}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{14}$$

т. е. в этом случае последовательность $g_{r,k,h}(\mathbf{f})$ сходится в себе. Нетрудно видеть, что $g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$ ограничена (более того, далее мы докажем, что норма оператора $g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$ ограничена в совокупности и невелика). Отсюда следует, что поточечный предел $g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$ при $k \to \infty$ существует. Обозначим этот предел через $g_{r,h}(\mathbf{f},x)$.

Переходя к пределу по $\mu \to \infty$, из леммы 1 и неравенства (12) получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой последовательности* $\mathbf{f} \in l_\infty(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $r = 2, \ldots, 7$ *имеет место неравенство*

$$\left\| g_{r,h}(\mathbf{f}) - g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon_r^{k+2}}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Как обычно, через $L_{p[a,b]}$, $p \in [1, \infty)$, обозначим множество всех измеримых суммируемых в p-й степени на отрезке $[a, b]$ вещественных функций таких, что

$$\| f \|_{p[a,b]} = \left(\int_a^b | f(x) |^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а через $L_{\infty[a,b]}$ — множество всех измеримых существенно ограниченных на $[a,b]$ функций с конечной нормой $\| f \|_{\infty[a,b]} = \sup \mathrm{vrai} \left\{ | f(x) | \,\middle|\, t \in [a,b] \right\}$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $p \in [1, \infty)$, *числа* $k \in \mathbb{N}$, $r = 2, \ldots, 7$ *и* $a < b$. *Для любой последовательности* $\mathbf{f} \in l_\infty(\mathbb{R})$ *имеют место неравенства*

$$\left| \left\| g_{r,h}(\mathbf{f}) \right\|_{p[a,b]} - \left\| g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{p[a,b]} \right| \le (b-a)^{1/p} \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \quad (15)$$

и

$$\left\| g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C[a,b]} \le \left\| g_{r,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C[a,b]} \le \left\| g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C[a,b]} + \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (16)$$

Соотношение (16) *верно и для случая, когда* $a = -\infty$ *и* $b = \infty$.

Действительно, из теоремы 1 следует, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\left| g_{r,k,h}(\mathbf{f},x) \right| - \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})} \le \left| g_{r,h}(\mathbf{f},x) \right| \le$$

$$\le \left| g_{r,k,h}(\mathbf{f},x) \right| + \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (17)$$

Отсюда и из очевидных неравенств

$$\| g \|_{p[a,b]} - \| \varphi \|_{p[a,b]} \le \| g - \varphi \|_{p[a,b]} \le \| g \|_{p[a,b]} + \| \varphi \|_{p[a,b]},$$

верных для любых $p \in [1, \infty)$ и $g, \varphi \in L_{p[a,b]}$, получаем следующие неравенства:

$$\left\| g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{p[a,b]} - (b-a)^{1/p} \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbf{R})} \le \left\| g_{r,h}(\mathbf{f}) \right\|_{p[a,b]} \le$$

$$\le \left\| g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{p[a,b]} + (b-a)^{1/p} \frac{\varepsilon_r^2}{2(1-\varepsilon_r)} \left\| \Delta^2 g_{r,k,h}(\mathbf{f}) \right\|_{C(\mathbf{R})},$$

что и доказывает соотношение (15).

В соотношении (16) оценка снизу вытекает из того факта, что норма интерполяционной ломаной $g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$ не превышает нормы интерполируемой функции $g_{r,h}(\mathbf{f},x)$.

Далее нам понадобится одна функция специального вида, которая в дальнейшем будет играть роль базисной функции, являющейся аналогом B-сплайнов и фундаментальных сплайнов в теории сплайн-аппроксимации.

Пусть $h = 1$ и последовательность $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}^{*0} = \{f_{0,i}^*\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $f_{0,i}^* = \delta_{0,i}$,

$$\delta_{\nu,\mu} = \begin{cases} 1, & \nu = \mu; \\ 0, & \nu \ne \mu, \end{cases}$$

— символ Кронекера.

Положим

$$G_{r,k}(x) = g_{r,k,1}(\mathbf{f}^*, x)$$

и

$$G_r(x) = g_{r,1}(\mathbf{f}^*, x).$$

Для $r = 2$ (т. е. для метода, порожденного кубическим полиномом) функции $G_r(x)$ рассматривались в работе [4].

Для любого $k \in \mathbb{N}$ оператор $f \to g_{r,k,h}(\mathbf{f})$ — линейный оператор, отображающий пространство $l_\infty(\mathbb{R})$ в пространство ограниченных на всей оси ломаных с узлами в точках $x_{i,k}$, а оператор $f \to g_{r,h}(\mathbf{f})$ — линейный оператор, отображающий пространство $l_\infty(\mathbb{R})$ в пространство $C(\mathbb{R})$.

Ясно, что

$$g_{r,k,h}(\mathbf{f}^*) = G_{r,k}\left(\frac{x}{h}\right),$$

и если $\mathbf{f}^{*\mathbf{i}}$ — сдвиг последовательности $\mathbf{f}^*$, то

$$g_{r,k,h}(\mathbf{f}^{*\mathbf{i}}) = G_{r,k}\left(\frac{x}{h}-i\right).$$

Отсюда и из линейности оператора $g_{r,k,h}$ следует

$$g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x) = g_{r,k,h}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_{i,0}\mathbf{f}^{*\mathbf{i}}, x\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_{i,0}\, g_{r,k,h}(\mathbf{f}^{*\mathbf{i}}, x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_{i,0}\, G_{r,k}\left(\frac{x}{h}-i\right). \tag{18}$$

Следовательно, для любой последовательности $\mathbf{f}\in l_\infty(\mathbb{R})$, любого $x\in\mathbb{R}$ и $h>0$ имеет место равенство

$$g_{r,h}(\mathbf{f}, x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_{i,0}\, G_r\left(\frac{x}{h}-i\right). \tag{19}$$

Из построения функции $G_{r,k}(x)$, $k\geq 2$, вытекает, что она имеет конечный носитель $\left[-2r+1+2^{-(k-2)},\ 2r-1-2^{-(k-2)}\right]$, а функция $G_r(x)$ имеет конечный носитель $[-2r+1,\ 2r-1]$. Отсюда следует, что для $x\in[x_i, x_{i+1}]$, $i\in\mathbb{Z}$, в равенствах (19) и (18) лишь $4r-2$ слагаемых отличны от нуля, т. е. для $x\in$ $\in[x_i, x_{i+1}]$ выполняются равенства

$$g_{r,h}(\mathbf{f}, x) = \sum_{\nu=i-2r+2}^{i+2r-1} f_{\nu,0}\, G_r\left(\frac{x}{h}-\nu\right) \tag{20}$$

и

$$g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x) = \sum_{\nu=i-2r+2}^{i+2r-1} f_{\nu,0}\, G_{r,k}\left(\frac{x}{h}-\nu\right). \tag{21}$$

Отметим, что для любого $k\in\mathbb{N}$ функции $G_{r,k}(x)$ четные, следовательно, и функция $G_r(x)$ четная.

Каждой ломаной $g_{r,k,h}(\mathbf{f},x)$ поставим в соответствие последовательность ее значений $f_{i,k}$ в узлах $x_{i,k}$.

Если $f\in C(\mathbb{R})$, то положим

$$g_{r,k,h}(f, x) = g_{r,k,h}(\mathbf{f}, x),$$

где

$$\mathbf{f} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{f(ih)\}_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Заметим, что из построения оператора $g_{r,k,h}(\mathbf{f})$ вытекает, что для любых k, $\nu=0,1,2,\ldots$, имеет место равенство

$$g_{r,k,h2^{-\nu}}(\mathbf{f}_\nu, x) = g_{r,k,h2^{-\nu}}(g_{r,\nu,h}(\mathbf{f}), x) = g_{r,k+\nu,h}(\mathbf{f}, x). \tag{22}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$g_{r,h2^{-\nu}}(\mathbf{f}_\nu, x) = g_{r,h}(\mathbf{f}, x). \tag{23}$$

Из метода построения вытекает следующая цепочка равенств:

$$g_{h/2^k}(g_h(f), x) = g_{h/2^k}\left(\left\{g_h\left(f, \frac{ih}{2^k}\right)\right\}_{i\in\mathbb{Z}}, x\right) = g_h(f, x),$$

т. е.

$$g_{h/2^k}(g_h(f), x) = g_h(f, x). \tag{24}$$

Положим

$$\alpha_{0,r} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{r-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n+1}} C_{2n}^{n}$$

и для $\mu = 1, \ldots, n$

$$\alpha_{\mu,r} = \sum_{n=1}^{r-1} (-1)^{\mu} C_{2n}^{n-\mu} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n+1}}.$$

Теорема 2. *Для всех x имеет место соотношение*

$$G_r(x) = G_r(2x) + \sum_{\mu=0}^{r-1} \alpha_{\mu,r} (G_r(2x+2\mu+1) + G_r(2x-2\mu-1)).$$

Действительно, из (23) имеем равенство

$$g_{r,h}(\mathbf{f}_0, x) = g_{r,h/2}(\mathbf{f}_1, x),$$

в частности,

$$g_{r,1}(\mathbf{f}^*, x) = g_{r,1/2}(\mathbf{f}_1^*, x),$$

или, что то же,

$$G_r(x) = \sum_{i=-2r+2}^{2r-1} f_{i,1}^* G_r(2x-i). \tag{25}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$G_r(\pm i) = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$f_{\pm 1,1}^* = G_r\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \alpha_0 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{r-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{2n+1}} C_{2n}^{n}$$

и

$$f_{\pm(2\mu+1),1}^* = G_r\left(\pm\frac{2\mu+1}{2}\right) = \alpha_{\mu,r}$$

при $\mu \in \mathbb{N}$ $(\mu \leq n)$.

Отсюда и из (25) получаем утверждение теоремы 2.

Отсюда, в частности, следует, что для бинарного пополнения, использующего интерполяционный полином степени 3 и 5, для всех x имеют место соотношения

$$G_2(x) = G_2(2x) + \frac{9}{16}(G_2(2x+1) + G_2(2x-1)) - \frac{1}{16}(G_2(2x+3) + G_2(2x-3))$$

и

$$G_3(x) = G_3(2x) + \frac{75}{128}(G_3(2x+1) + G_3(2x-1)) - \frac{25}{256}(G_3(2x+3) + $$

$$+ G_3(2x-3)) + \frac{3}{256}(G_3(2x-5) + G_3(2x+5)).$$

Положим для $x \in [0,1]$

$$K_r(x) = x^{2r} - \sum_{i=-2r+2}^{2r-1} i^{2r} G_r(x-i)$$

и

$$K_{r,k}(x) = x^{2r} - \sum_{i=-2r+2}^{2r-1} i^{2r} G_{r,k}(x-i).$$

Теорема 3. *Пусть функция f такова, что* $f^{(\nu)} \in C(\mathbb{R})$, $\nu = 0, 2r$, $r = 2, \ldots, 7$, *тогда для* $x \in [ih, (i+1)h]$ *равномерно по* $i \in \mathbb{Z}$ *выполняется соотношение*

$$f(x) - g_{r,h}(f, x) = \frac{h^{2r}}{(2r)!} f_i^{(2r)} K_r\left(\frac{x}{h} - i\right) + o(h^{2r}), \tag{26}$$

кроме того,

$$\| K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{(2r)!}{h^{2r}} \sup_{f \in W^{2r}_{C(\mathbb{R})}} \| f - g_{r,h}(f) \|_{C(\mathbb{R})} \le \| K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})} + \frac{r\varepsilon_r^2}{1-\varepsilon_r} \| \Delta^2 K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})}$$

и

$$\| K_{r,k} \|_{p[0,1]} - \frac{r\varepsilon_r^2}{1-\varepsilon_r} \| \Delta^2 K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{(2r)!}{h^{2r}} \sup_{f \in W^{2r}_{C[0,1]}} \| f - g_{r,h}(f) \|_{p[0,1]} \le$$

$$\le \| K_{r,k} \|_{p[0,1]} + \frac{r\varepsilon_r^2}{1-\varepsilon_r} \| \Delta^2 K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})}.$$

Доказательству теоремы предпошлем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Для* $x \in [0,1]$ *и* $\nu = 0, \ldots, 2r-1$ *справедливы равенства*

$$x^\nu = \sum_{i=-2r+2}^{2r-1} i^\nu G_r(x-i). \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $h = 1$ и $\tilde{\mathbf{f}}^0 = \{\tilde{f}_{i,0}\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $\tilde{f}_{i,0} = 1$, $i \in \mathbb{Z}$. Ясно, что в этом случае

$$g_{r,h}\left(\tilde{\mathbf{f}}^0, x\right) = 1.$$

С другой стороны, как следует из (20), для $x \in [0,1]$

$$g_{r,h}\left(\tilde{\mathbf{f}}^0, x\right) = \sum_{i=-2r+2}^{2r-1} G_r(x-i).$$

Утверждение (27) для $\nu = 0$ доказано.

Пусть, теперь $\nu = 1, \ldots, 2r-1$ и $\tilde{\mathbf{f}}_\nu = \{\tilde{f}_{i,\nu}\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $\tilde{f}_{i,\nu} = i^\nu$, $i = -2r+2, \ldots$ $\ldots, 2r-1$ и $\tilde{f}_{i,\nu} = 0$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{-2r+1, 2r-2\}$. Тогда в силу построения метода $g_{r,h}$ для $x \in [0,1]$ выполняется равенство

$$g_{r,h}\left(\tilde{\mathbf{f}}_\nu, x\right) = x^\nu.$$

Поскольку из (20) следует равенство

$$g_{r,h}\left(\tilde{\mathbf{f}}_\nu, x\right) = \sum_{i=-2r+2}^{2r-1} i^\nu G_r(x-i),$$

то непосредственно получаем утверждение (27).

Перейдем к доказательству теоремы 3. Используя разложения по формуле Тейлора в окрестности точки ih, равенство (20) перепишем в виде

$$g_{r,h}(f, x) = \sum_{\nu=i-2r+2}^{i+2r-1} \sum_{\mu=0}^{2r} \frac{((\nu - i)h)^\mu}{\mu!} f_\nu^{(\mu)} G_r\left(\frac{x}{h} - \nu\right) + o(h^{2r}).$$

Отсюда получаем

$$f(x) - g_{r,h}(f, x) = \sum_{\nu=i-2r+2}^{i+2r-1} \sum_{\mu=0}^{2r} \frac{h^\mu}{\mu!} f_\nu^{(\mu)} \left(x^{(\mu)} - (\nu - i)^\mu G_r\left(\frac{x}{h} - \nu\right)\right) + o(h^{2r}).$$

Таким образом, из (27) вытекает (26).

Из (16) следует, что

$$\| K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})} \le \| K_r \|_{C(\mathbb{R})} \le \| K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})} + \frac{r\varepsilon_r^2}{1-\varepsilon_r} \| \Delta^2 K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})}$$

и

$$\| K_{r,k} \|_{p[0,1]} - \frac{r\varepsilon_r^2}{1-\varepsilon_r} \| \Delta^2 K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})} \le \| K_r \|_{p[0,1]} \le \| K_{r,k} \|_{p[0,1]} + \frac{r\varepsilon_r^2}{1-\varepsilon_r} \| \Delta^2 K_{r,k} \|_{C(\mathbb{R})}.$$

Отсюда и из (26) получаем утверждение теоремы.

Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\| g_{r,h} \|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})}$ — норма оператора $g_{r,h}$, т. е.

$$\| g_{r,h} \|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})} = \sup_{\| f \|_{C(\mathbb{R})} \le 1} \| g_{r,h}(f) \|_{C(\mathbb{R})}.$$

Положим

$$N_r(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} | G_r(x-i) | \tag{28}$$

и для $k \in \mathbb{N}$

$$N_{r,k}(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} | G_{r,k}(x-i) |.$$

Заметим, что так как $N(x)$ — непрерывная 1-периодическая функция, то

$$\| N_r \|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \| N_r \|_{C[0,1]}.$$

Теорема 4. *Для* $r = 2, \ldots, 7$ *справедливо равенство*

$$\| g_{r,h} \|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})} = \| N_r \|_{C[0,1]}. \tag{29}$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\| N_{r,k} \|_{C[0,1]} \le \| g_{r,h} \|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})} \le \| N_r \|_{C[0,1]} + \frac{r\varepsilon_r^2}{(1-\varepsilon_r)} \| \Delta^2 N_{r,k} \|_{C[0,1]}. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $C(\mathbb{R})$ такая, что $\| f \|_{C(\mathbb{R})} \le 1$, тогда из (19) вытекает

$$\| g_{r,h}(f) \|_{C(\mathbb{R})} \le \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_{i,0} G_r\left(\frac{(\cdot)}{h} - i\right) \right\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_{i,0} G_r\left(\frac{x}{h} - i\right) \right| \le$$

$$\le \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| f_{i,0} G_r\left(\frac{x}{h} - i\right) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} | f_{i,0} G_r(x-i) | \le$$

$$\le \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} | G_r(x-i) | = \sup_{x \in \mathbb{R}} N_r(x). \tag{31}$$

Так как $N_r(x)$ — непрерывная 1-периодическая функция, то существует точка x_0 такая, что

$$N_r(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} N(x).$$

Через $f_0(x)$ обозначим непрерывную функцию, принимающую значения

$$\operatorname{sgn} G_r\left(\frac{x_0}{h} - i\right)$$

в точках $x_0/h-i$ и любые значения $f_0(x)$ $(|f_0(x)|<1)$ в остальных точках из $\mathbb{R}$. Тогда

$$\|g_{r,h}\|_{C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})} \ge \frac{\|g_{r,h}(f_0)\|_{C(\mathbb{R})}}{\|f_0\|_{C(\mathbb{R})}} = \|g_{r,h}(f_0)\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}} N_r(x),$$

откуда и из (31) следует равенство (29).

Для завершения доказательства теоремы заметим, что из (17) и (20) следует соотношение

$$\|N_{r,k}\|_{C[0,1]} \le \|N_r\|_{C[0,1]} \le \|N_{r,k}\|_{C[0,1]} + \frac{r\varepsilon_r^2}{(1-\varepsilon_r)}\|\Delta^2 N_{r,k}\|_{C[0,1]}.$$

Пусть теперь $n\in\mathbb{N}$ фиксировано и $\mathbf{f}$ — $2n$-периодическая последовательность, т. е.

$$f_{i+2n} = f_i \quad (i\in\mathbb{Z}) \quad \text{и} \quad h = \frac{\pi}{n}.$$

Через $\tilde{G}_r(x)$ обозначим 2π-периодическое продолжение функции $G_r(x/h)$ и через $\tilde{G}_{r,k}(x)$ — 2π-периодическое продолжение функции $G_{r,k}(x/h)$.

Ясно, что для любой последовательности $f_i = f(ih)$ имеет место представление

$$g_{r,h}(f,x) = \sum_{i=1}^{2n} f_i \tilde{G}_r\left(\frac{x}{h}-i\right)$$

и

$$g_{r,k,h}(f,x) = \sum_{i=1}^{2n} f_i \tilde{G}_{r,k}\left(\frac{x}{h}-i\right).$$

Для каждого $x\in[ih,(i+1)h]$, $i=0,\ldots,2n$, в этих представлениях только $4r-2$ слагаемых, т. е.

$$g_{r,h}(f,x) = \sum_{\nu=i-2r+2}^{i+2r-1} f_i \tilde{G}_{r,n}\left(\frac{x}{h}-\nu\right)$$

и

$$g_{r,k,h}(f,x) = \sum_{\nu=i-2r+2}^{i+2r-1} f_i \tilde{G}_{r,n,k}\left(\frac{x}{h}-\nu\right).$$

Естественно, в этом случае верны аналоги всех утверждений, приведенных выше.

Тот факт, что оператор восстановления $g_{r,h}(f,x)$ можно записать в виде (19) (вместе со свойствами функции $G_r(x)$), дает возможность построить метод послойного кодирования и передачи информации.

Для фиксированного $\varepsilon>0$ положим

$$z_\varepsilon^+ = \begin{cases} z, & |z|\ge\varepsilon; \\ 0, & |z|<\varepsilon, \end{cases}$$

и

$$z_\varepsilon^- = z - z_\varepsilon^+. \tag{32}$$

Назовем $\mathfrak{G}_{r,1,h}(f, x) = g_{r,h}(f, x)$ восстановлением функции $f(x)$ по первому слою информации. Пусть $f(x) - \mathfrak{G}_{r,1,h}(f, x)$ — погрешность восстановления по первому слою.

Для $k > 1$ восстановление на k-м слое информации определим рекуррентными соотношениями

$$\mathfrak{G}_{r,k,h}(f, x) = \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f, x) + g_{r,h/2^{k-1}}\left(\left(f - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f)\right)_{\varepsilon}^{+}, x\right). \tag{33}$$

Очевидно, что

$$f(x) - \mathfrak{G}_{r,k,h}(f, x) = f(x) - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f, x) + g_{r,h/2^{k-1}}\Big(\left(f - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f)\right) - \\ - \left(f - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f)\right)_{\varepsilon}^{-}, x\Big).$$

Из линейности метода $g_{r,h/2^m}$ следует, что

$$f(x) - \mathfrak{G}_{r,k,h}(f, x) = f(x) - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f, x) + g_{r,h/2^{k-1}}\left(\left(f - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f)\right), x\right) - \\ - g_{r,h/2^{k-1}}\left(\left(f - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f)\right)_{\varepsilon}^{-}, x\right) = \\ = f(x) - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f, x) + g_{r,h/2^{k-1}}(f, x) - g_{r,h/2^{k-1}}\left(\mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f), x\right) - \\ - g_{r,h/2^{k-1}}\left(\left(f - \mathfrak{G}_{r,k-1,h}(f)\right)_{\varepsilon}^{-}, x\right).$$

Отсюда, из (33), свойства (24) и теоремы 4 получаем

$$f(x) - \mathfrak{G}_{r,k,h}(f, x) = f(x) - g_{r,h/2^{k-1}}(f, x) + \theta_k \varepsilon \| N_r \|_{C[0,1]},$$

где $\theta_k = \theta_k(r, f, h) \in [-1, 1]$, а величина $N_r(x)$ определена соотношением (28).

Таким образом, с учетом k-го слоя информации метод $\mathfrak{G}_{r,k,h}(f)$ восстанавливает искомую функцию с точностью до $\theta_k \varepsilon \| N_r \|_{C[0,1]}$ так же, как и первоначальный метод с шагом $h/2^{k-1}$. При этом в реальных задачах количество ненулевых единиц информации, которое требуется для этого, гораздо меньше, чем 2^{k-1} единиц информации, отличной от нуля, необходимой для метода $g_{r,h/2^{k-1}}(f)$.

1. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Асимптотические методы восстановления кривых. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 358 с.
2. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: SIAM, 1992.
3. *Dubuc S.* Interpolation through an iterative scheme // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – P. 185 – 204.
4. *De Marchi S.* The dyadic iterative interpolation method and some extensions // Univ. Padua, 1994. – Tr nr. 10/94.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 831 с.

Получено 09.10.2000