УДК 517.98

М. Ф. Городній, О. А. Лагода (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of bounded solutions for some classes of linear one- and two-parameter difference equations with operator coefficients in the Banach space.

Отримано необхідні та достатні умови існування і єдиності обмежених розв'язків деяких класів лінійних одно- та двопараметричних різницевих рівнянь з операторними коефіцієнтами у банаховому просторі.

Нехай B — комплексний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$, $L(B)$ — банаховий простір лінійних обмежених операторів, які діють з B в B, з нормою $\|\cdot\|$, I — одиничний, Θ — нульовий оператори в B, $Z_+ := \{n \in Z \mid n \geq 0\}$.

У статті досліджується питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку $\{x(n, m) \colon (n, m) \in Z_+^2\}$ двопараметричного різницевого рівняння

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} x(n+j, m+k) = y(n, m), \quad (n, m) \in Z_+^2. \tag{1}$$

Тут $\{A_{jk}\colon (j, k) \in Z_+^2\}$ — фіксований набір операторів з $L(B)$, $\{y(n, m)\colon (n, m) \in Z_+^2\}$ — обмежений (за нормою) набір елементів B.

Рівняння (1) узагальнює двопараметричне різницеве рівняння, яке розглядалося І. В. Гайшуном в роботі [1]. (Про його застосування також див. [1].) У статті [2] для різницевого рівняння вигляду (1) наведено необхідні та достатні умови обмеженості розв'язків, які набувають заданих значень на границі $\{(m, n) \in Z_+^2 \mid mn = 0\}$ множини Z_+^2.

Нехай функція

$$\varphi(\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} \lambda^j \mu^k$$

аналітична в області $\{(\lambda, \mu) \subset C^2 \mid |\lambda| < d_1, |\mu| < d_2\}$, де $d_1 > 1$, $d_2 > 1$ та фіксовані.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема. *Для того щоб для довільного обмеженого в B набору $\{y(n, m)\colon (n, m) \in Z_+^2\}$ рівняння (1) мало єдиний та обмежений розв'язок $\{x(n, m)\colon (n, m) \in Z_+^2\}$, необхідно та достатньо, щоб $\forall \{\lambda, \mu\} \subset C$, $|\mu| \leq 1$, $|\lambda| \leq 1$, оператор $\varphi(\lambda, \mu)$ мав неперервний обернений оператор.*

При доведенні теореми використовуються наступні твердження.

Нехай $\{A_k\colon k \geq 1\} \subset L(B)$ — фіксована послідовність операторів, які задовольняють таку умову: функція $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k$ є аналітичною в крузі $K_1 := \{z \in C \mid |z| < d\}$, де $d > 1$ і фіксоване. При цьому

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \|A_k\| < +\infty. \tag{2}$$

Лема 1. *Різницеве рівняння*

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_{n-k} + y_n, \quad n \geq 1, \tag{3}$$
$$x_n = \alpha_n, \quad n \leq 0,$$

має для довільних обмежених послідовностей $\{\alpha_n : n \leq 0\}$, $\{y_n : n \geq 1\}$ *обмежений розв'язок* $\{x_n : n \geq 1\}$ *тоді і тільки тоді, коли для довільного* $z \in C$, $|z| \leq 1$, *оператор* $f(z) = I - g(z)$ *має неперервний обмежений оператор* $f^{-1}(z)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай рівняння (3) має для довільних обмежених послідовностей $\{\alpha_n : n \leq 0\}$, $\{y_n : n \geq 1\}$ обмежений розв'язок $\{x_n : n \geq 1\}$. Нехай число $z \in C$, $|z| = 1$, фіксоване. Якщо, від супротивного, оператор $f^{-1}(z)$ не існує, то за теоремою Банаха про обернений оператор справджується одна з двох умов:

а) $\exists u \neq \bar{0} : f(z)u = \bar{0}$;

б) $\exists y \in B$: рівняння $f(z)x = y$ не має розв'язку.

Нехай виконується умова а). Тоді

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k u.$$

Покладемо в рівнянні (3)

$$\alpha_n := z^{-n} u, \quad n \leq 0,$$
$$y_1 = z^{-1} u,$$
$$y_n = z^{-n}u + A_2 z^{-n+2}u + 2A_3 z^{-n+3}u + \ldots + (n-2)A_{n-1}z^{-1}u + (n-1)A_n u +$$
$$+ (n-1)A_{n+1}zu + (n-1)A_{n+2}z^2 u + \ldots, \quad n \geq 2.$$

Оскільки $|z| = 1$ і виконується умова (2), то послідовності $\{\alpha_n : n \leq 0\}$, $\{y_n : n \geq 1\}$ обмежені в B. За індукцією можна довести, що їм відповідає такий розв'язок рівняння (3):

$$x_n = (n+1)z^{-n}u, \quad n \geq 1,$$

що, звичайно, суперечить умові обмеженості розв'язку.

Нехай виконується умова б). Розглянемо рекурентну послідовність операторів

$$\varphi_0 = I, \quad \varphi_1 = A_1 \varphi_0,$$
$$\varphi_n = A_1 \varphi_{n-1} + A_2 \varphi_{n-2} + \ldots + A_n \varphi_0, \quad n \geq 2.$$

Якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k\| < +\infty, \tag{4}$$

то рівняння з умови б) має розв'язок вигляду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k y. \tag{5}$$

Для доведення умови (4) перевіримо, що послідовності

$$i_1)\quad \left\{\left\|\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\right\| : n\ge 0\right\},\qquad i_2)\quad \left\{\left\|\sum_{k=0}^{n}(k+1)\varphi_k\right\| : n\ge 0\right\},$$

$$i_3)\quad \{\|(n+1)\,\varphi_n\| : n\ge 0\},\qquad i_4)\quad \left\{\left\|\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\,\varphi_n\right\| : n\ge 0\right\}$$

обмежені.

Нехай α — довільний елемент B. Покладемо

$$\alpha_0 = \alpha,\quad \alpha_n = \bar{0},\quad n\le -1,$$
$$y_n = \alpha,\quad n\ge 1.$$

За індукцією можна встановити, що таким $\{\alpha_n : n\le 0\}$ та $\{y_n : n\ge 1\}$ відповідає наступний розв'язок рівняння (3):

$$x_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\right)\alpha,\quad n\ge 1.$$

З обмеженості розв'язку $\{x_n : n\ge 1\}$ для довільного $\alpha\in B$ та принципу рівномірної обмеженості випливає обмеженість послідовності $i_1)$.

Для доведення обмеженості послідовності $i_2)$ необхідно послідовність $\{\alpha_n : n\le 0\}$ залишити такою ж і покласти

$$y_1 = (\varphi_0+\varphi_1)\,\alpha,$$
$$y_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\right)\alpha + A_2\left(\sum_{k=0}^{n-2}\varphi_k\right)\alpha + 2A_3\left(\sum_{k=0}^{n-3}\varphi_k\right)\alpha + \ldots + (n-1)A_n\varphi_0\,\alpha,\quad n\ge 2.$$

Тоді послідовність $\{y_n : n\ge 1\}$ обмежена внаслідок (2) і обмеженості послідовності $i_1)$, а відповідний розв'язок (3) має вигляд

$$x_n = \left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\varphi_k\right)\alpha,\quad n\ge 1.$$

Обмеженість послідовності $i_3)$ випливає з обмеженості послідовності $i_2)$.

Щоб довести обмеженість послідовності $i_4)$, необхідно $\{\alpha_n : n\le 0\}$ залишити такою ж, а $\{y_n : n\ge 1\}$ вибрати так:

$$y_1 = 2\varphi_0\,\alpha,$$
$$y_n = (n+1)\varphi_n\alpha + nA_2\varphi_{n-2}\alpha + (n+(n-1))A_3\varphi_{n-3}\alpha +$$
$$+ (n+(n-1)+(n-2))A_4\varphi_{n-4}\alpha + \ldots + (n+(n-1)+\ldots+3+2)A_n\varphi_0\alpha,\quad n\ge 2.$$

Її обмеженість випливає з обмеженості послідовності $i_3)$ та (2). Тоді

$$x_n = (1+2+\ldots+n+(n+1))\,\varphi_n\alpha = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,\varphi_n\alpha,\quad n\ge 1.$$

З обмеженості послідовності $i_4)$ випливає збіжність ряду (4).

Якщо число $z\in C$, $|z|<1$, фіксоване, то рівняння з умови б) має розв'язок (5), а якщо виконується умова а), то, поклавши $\alpha_n = z^n u$, $n\le 0$; $y_n = \bar{0}$, $n\ge 1$, одержимо, що відповідний їм розв'язок $x_n = z^{-n}u$, $n\ge 1$, необмежений, а це суперечить обмеженості розв'язку рівняння (3).

Достатність. Нехай для довільного $z\in C$, $|z|\le 1$, існує неперервний обернений оператор $f^{-1}(z)$. Знайдемо спочатку розв'язок різницевого рівняння

(3) у явному вигляді. Нехай задані обмежені послідовності $\{\alpha_n : n \leq 0\}$ і $\{y_n : n \geq 1\}$. Матимемо

$$x_0 = \varphi_0 \alpha_0,$$

$$x_n = \varphi_n \alpha_0 + \varphi_{n-1} u_1 + \ldots + \varphi_0 u_n, \quad n \geq 1,$$

де $u_k := y_k + A_{k+1}\alpha_{-1} + A_{k+2}\alpha_{-2} + \ldots,\ k \geq 1.$

Так само, як в роботі [3], можна довести, що $\exists r > 1 : f^{-1}(z)$ — аналітична функція в крузі $K_2 := \{ z \in C \mid |z| < r \}$. Отже, $f^{-1}(z)$ розвивається в ряд Тейлора

$$f^{-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k,$$

причому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| C_k \| < +\infty. \tag{6}$$

При $|z| < r : f(z) f^{-1}(z) = I$. Оскільки ряди збігаються за нормою, то, перемноживши їх за Коші, отримаємо

$$\forall n \geq 0 : \varphi_n = C_n.$$

З умови (6) випливає обмеженість розв'язку рівняння (3). Лему 1 доведено.

Нехай послідовність операторів $\{A_k : k \in Z_+\} \subset L(B)$ фіксована та задовольняє таку умову: операторнозначна функція $\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$ аналітична в крузі K_1.

Справедлива така лема.

Лема 2. *Різницеве рівняння*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k x_{n+k} = y_n, \quad n \geq 0, \tag{7}$$

має для довільної обмеженої послідовності $\{y_n : n \in Z_+\}$ *єдиний обмежений розв'язок* $\{x_n : n \in Z_+\}$ *тоді і тільки тоді, коли для довільного* $z \in C$, $|z| \leq 1$, *оператор* $\omega(z)$ *має неперервний обернений оператор.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай при фіксованому $z_0 \in C$, $|z_0| \leq 1$, оператор $\omega(z_0)$ не має обмеженого оберненого оператора. Тоді для оператора $\omega(z_0)$ виконується одна з умов а), б).

Якщо виконується умова а), то послідовність

$$\{u, z_0 u, \ldots, z_0^n u, \ldots\}$$

буде ненульовим обмеженим розв'язком (7) при $\{y_n = \bar{0} : n \in Z_+\}$, що суперечить єдиності обмеженого розв'язку рівняння (7).

Нехай справджується умова б). Розглянемо обмежену послідовність $\{y, z_0 y, \ldots, z_0^n y, \ldots\}$. Їй відповідає єдиний обмежений розв'язок $\{x_n : n \in Z_+\}$. Підставляючи цей розв'язок в (7) та віднімаючи від $(n+1)$-го рівняння (7) помножене на z_0 n-те рівняння, а також використовуючи єдиність розв'язку (7) при $y_n = \bar{0}$, $n \in Z_+$, робимо висновок, що $x_n = z_0^n x_0$, $n \in Z_+$.

Тому з першого з рівнянь (7) отримуємо

$$\omega(z_0)x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z_0^k x_0 = y,$$

що суперечить припущенню б).

Достатність. Нехай для довільного $z \in C$, $|z| \leq 1$, оператор $\omega(z)$ має неперервний обернений оператор. При $z = 0$ це означає, що $A_0^{-1} \in L(B)$.

За теоремою 1 роботи [3] рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k x_{n+k} = \nu_n, \quad n \in Z, \tag{8}$$

має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n: n \in Z\}$ для довільної обмеженої в B послідовності $\{\nu_n: n \in Z\}$.

Нехай $\{y_n: n \in Z_+\}$ — обмежена в B послідовність. Покладемо

$$y_n' = \begin{cases} y_n, & n \geq 0; \\ \bar{0}, & n < 0. \end{cases}$$

Рівняння (8) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n': n \in Z\}$, який відповідає обмеженій послідовності $\{y_n': n \in Z\}$. Його частина $\{x_n': n \in Z_+\}$ буде обмеженим розв'язком рівняння (7). Припустимо, що він не єдиний. Тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k x_{n+k}' = y_n, \quad n \in Z_+,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k u_{n+k}' = y_n, \quad n \in Z_+,$$

де $u_n' \neq x_n'$ принаймні для одного $n \in Z_+$. Отже, послідовність $\{w_n' := x_n' - u_n' : n \in Z_+\}$ ненульова, обмежена в B і така, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k w_{n+k}' = \bar{0}, \quad n \in Z_+. \tag{9}$$

Домножимо рівняння (9) зліва на A_0^{-1}. Ввівши позначення

$$T_1 := -A_0^{-1}A_1, \quad T_2 := -A_0^{-1}A_2 \ldots, \quad T_n := -A_0^{-1}A_n, \ldots,$$

будемо мати

$$w_n' = \sum_{k=1}^{\infty} T_k w_{n+k}', \quad n \in Z_+.$$

Розглянемо рівняння

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k t_{n-k}, \quad n \geq 1, \\ t_n &= w_{-n}', \quad n \leq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

За лемою 1 рівняння (10) має обмежений розв'язок $\{t_n: n \geq 1\}$. Покладемо

$$w_{-n}' := t_n, \quad n \geq 1.$$

Тоді $\{w_n' : n \in Z\}$ — ненульовий обмежений розв'язок рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k w'_{n+k} = \bar{0}, \quad n \in Z,$$

що суперечить єдиності обмеженого розв'язку рівняння (8). Лему 2 доведено.

Доведення теореми. Розглянемо простір

$$B(Z_+) := \left\{ \bar{x} := (x_0, x_1, \ldots)^t \mid x_n \in B, \ n \geq 0, \ \sup_{n \geq 0} \|x_n\| < \infty \right\}$$

з нормою

$$\| \bar{x} \|_+ := \sup_{n \geq 0} \| x_n \|$$

та покоординатними додаванням та множенням на скаляр. Простір $(B(Z_+), \|\cdot\|_+)$ є банаховим. Рівняння (1) у цьому просторі має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \bar{x}_{s+k} = \bar{y}_s, \quad s \geq 0, \tag{11}$$

де

$$D_k := \begin{pmatrix} A_{0k} & A_{1k} & A_{2k} & \ldots \\ \Theta & A_{0k} & A_{1k} & \ldots \\ \Theta & \Theta & A_{0k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}; \quad \bar{x}_s := \begin{pmatrix} x(0, s) \\ x(1, s) \\ x(2, s) \\ \ldots \end{pmatrix}; \quad \bar{y}_s := \begin{pmatrix} y(0, s) \\ y(1, s) \\ y(2, s) \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Згідно з аналітичністю функції $\varphi(\lambda, \mu)$ оператор $D_k \in L(B(Z_+))$ для довільного $k \in Z_+$, і ряд в лівій частині рівняння (11) збігається. Рівняння (11) має для довільної обмеженої в $B(Z_+)$ послідовності $\{\bar{y}_s : s \in Z_+\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{\bar{x}_s : s \in Z_+\}$ тоді і тільки тоді, коли рівняння (1) має для довільного обмеженого набору $\{y(n, m) : (n, m) \in Z_+^2\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x(n, m) : (n, m) \in Z_+^2\}$. Внаслідок леми 2 та теореми Банаха про обернений оператор рівняння (11) має для довільної обмеженої в $B(Z_+)$ послідовності $\{\bar{y}_s : s \in Z_+\}$ єдиний обмежений розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\forall z \in C, \quad |z| \leq 1 \quad \forall \bar{y} \in B(Z_+) \quad \exists \bar{x} \in B(Z_+) : \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k \bar{x} = \bar{y},$$

або в координатній формі: для довільного $z \in C$, $|z| \leq 1$, та для довільної обмеженої в B послідовності $\{y_n : n \in Z_+\}$ існує єдиний обмежений в B розв'язок $\{x_n : n \in Z_+\}$ рівняння

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} z^k x_{n+j} = y_n, \quad n \in Z_+.$$

Згідно з лемою 2 остання умова еквівалентна умові теореми.

1. *Гайшун И. В.* Устойчивость двухпараметрических дискретных систем с коммутирующими операторами // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 2. – С. 216 – 224.
2. *Городній М. Ф., Лагода О. А.* Про обмежені розв'язки деяких класів двопараметричних різницевих рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1610 – 1614.
3. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Там же. – 1991. – **41**, № 1. – С. 41 – 46.

Одержано 22.06.2000,
після доопрацювання — 27.02.2001