УДК 512.548

А. М. Гальмак (Могилев. технол. ин-т, Беларусь)

СИЛОВСКОЕ СТРОЕНИЕ ИДЕМПОТЕНТНОЙ n-АРНОЙ ГРУППЫ

We study idempotent n-ary groups. We describe the Sylow structure of finite idempotent n-ary groups.

Вивчаються ідемпотентні n-арні групи. Наводиться опис силовської будови скінченних ідемпотентних n-арних груп.

Исторически n-арные группы возникли [1] как обобщение понятия группы. Поэтому естественным выглядит то, что одной из важных задач теории n-арных групп является нахождение результатов-аналогов для соответствующих теорем теории групп. При этом особый интерес представляют n-арные аналоги теорем силовского типа. Получением таких результатов активно занимался С. А. Русаков, создавший силовскую теорию n-арных групп [2], основы которой были заложены Э. Постом [3].

Данная работа является естественным продолжением [4] и посвящена изучению силовского строения идемпотентных n-арных групп, т. е. n-арных групп, в которых все элементы являются идемпотентами.

Напомним некоторые понятия теории n-арных групп, используемые в работе.

Согласно Дернте [1], универсальная алгебра $\langle A, [\ ]\rangle$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $[\ ] : A^n \to A$ называется *n-арной группой*, если выполняются следующие условия:

1) n-арная операция $[\ ]$ на множестве A ассоциативна, т. е.

$$\left[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}\right] = \left[a_1 \ldots a_i\left[a_{i+1} \ldots a_{i+n}\right]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}\right]$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1} \in A$;

2) каждое из уравнений

$$\left[a_1 \ldots a_{i-1}x_i a_{i+1} \ldots a_n\right] = b, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

однозначно разрешимо в A относительно x_i для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, $b \in A$.

Если алгебра $\langle A, [\ ]\rangle$ удовлетворяет условию 1 определения Дернте, то она называется *n-арной полугруппой*. Алгебра $\langle A, [\ ]\rangle$, удовлетворяющая условию 2 того же определения, называется *n-арной квазигруппой*.

Э. Пост заметил [3], что требование однозначной разрешимости уравнений в определении Дернте можно ослабить, потребовав только их разрешимость, а число уравнений уменьшить с n до двух ($i = 1, n$), а при $n \geq 3$ даже до одного (i фиксированное из $\{2, \ldots, n-1\}$).

n-Арная подгруппа $\langle B, [\ ]\rangle$ n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ называется *инвариантной* в ней, если

$$[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{i-1}x\underbrace{B \ldots B}_{n-i}]$$

для любого $x \in A$ и всех $i = 2, 3, \ldots, n$. Если же последнее равенство выполняется только для $i = n$, то $\langle B, [\ ]\rangle$ называется *полуинвариантной в* $\langle A, [\ ]\rangle$.

Последовательность $e_1, \ldots, e_{k(n-1)}$ $(k \geq 1)$ элементов n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ называется *нейтральной*, если

$$\left[e_1 \ldots e_{k(n-1)} a \right] = \left[a e_1 \ldots e_{k(n-1)} \right] = a$$

для любого $a \in A$. Последовательность β элементов n-арной группы $\langle A, [\ ] \rangle$ называется *обратной* к последовательности α, составленной из элементов этой же n-арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными. Элемент a n-арной группы $\langle A, [\ ] \rangle$ называется ее *идемпотентом*, если $[\underbrace{a \ldots a}_{n}] = a$.

Для любого элемента a n-арной группы $\langle A, [\ ] \rangle$ определим на A бинарную операцию $x @ y = [x \alpha y]$, где α — обратная последовательность для элемента a. Легко проверяется (см., например, предложение 7.2 [5]), что $\langle A, @ \rangle$ — группа с единицей a. Если a — идемпотент, то в качестве обратной последовательности можно рассмотреть последовательность $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$. В этом случае операция $@$ определяется равенством

$$x @ y = [x \underbrace{a \ldots a}_{n-2} y].$$

Лемма 1. *Пусть* $\langle B, [\ ] \rangle$ — *полуинваринтная n-арная подгруппа n-арной группы* $\langle A, [\ ] \rangle$, a — *идемпотент из* A. *Тогда*

$$\left\langle B_a = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a], [\ ] \right\rangle$$

— *полуинвариантная n-арная подгруппа в* $\langle A, [\ ] \rangle$ *такая, что* $A/B = A/B_a$. *Если же* $a \notin B$, *то* $B_a \neq B$.

Доказательство. Если

$$u_1 = [b'_1 \ldots b'_{n-1} a], \ldots, u_n = \left[b_1^{(n)} \ldots b_{n-1}^{(n)} a \right]$$

— произвольные элементы из B_a, то, учитывая полуинвариантность $\langle B, [\ ] \rangle$ в $\langle A, [\ ] \rangle$, идемпотентность a, а также то, что $\langle B, [\ ] \rangle$ — n-арная подгруппа в $\langle A, [\ ] \rangle$, получаем

$$[u_1 \ldots u_n] = \left[[b'_1 \ldots b'_{n-1} a] \ldots \left[b_1^{(n)} \ldots b_{n-1}^{(n)} a \right] \right] =$$

$$= [b_1^* \ldots b_{n-1}^* [\underbrace{a \ldots a}_{n}]] = [b_1^{(n)} \ldots b_{n-1}^{(n)} a] \in B_a,$$

где $b_1^*, \ldots, b_{n-1}^* \in B$. Следовательно, $\langle B_a, [\ ] \rangle$ — n-арная полугруппа.

Рассмотрим в $\langle B_a, [\ ] \rangle$ уравнение

$$\left[u_1 \ldots u_{n-1} x \right] = u, \tag{1}$$

где $u = \left[b_1 \ldots b_{n-1} a \right] \in B_a$, которое имеет решение $x = u_n \in A$, т. е.

$$\left[[b'_1 \ldots b'_{n-1} a] \ldots \left[b_1^{(n-1)} \ldots b_{n-1}^{(n-1)} a \right] u_n \right] = \left[b_1 \ldots b_{n-1} a \right].$$

Учитывая полуинвариантность $\langle B, [\ ] \rangle$ в $\langle A, [\ ] \rangle$, идемпотентность a, а также то, что $\langle B, [\ ] \rangle$ — n-арная подгруппа в $\langle A, [\ ] \rangle$, из последнего равенства получаем

$$[\tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_{n-1}[\underbrace{a \ldots a}_{n-1} u_n]] = [b_1 \ldots b_{n-1} a],$$

$$\left[\tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_{n-1} u_n\right] = \left[b_1 \ldots b_{n-1} a\right],$$

где $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1} \in B$. Если β — обратная последовательность для последовательности $\tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_{n-1}$, то из последнего равенства находим

$$\left[\beta\left[\tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_{n-1} u_n\right]\right] = \left[\beta\left[b_1 \ldots b_{n-1} a\right]\right],$$

$$u_n = \left[\left[\beta b_1\right] b_2 \ldots b_{n-1} a\right] = \left[b b_1 \ldots b_{n-1} a\right] \in B_a,$$

где $b = [\beta b_i] \in B$. Следовательно, в $\langle B_a, [\ ]\rangle$ разрешимо уравнение (1).

Аналогично доказывается разрешимость в $\langle B_a, [\ ]\rangle$ уравнения

$$[y u_2 \ldots u_n] = u.$$

Таким образом, установлено, что $\langle B_a, [\ ]\rangle$ — n-арная подгруппа в $\langle A, [\ ]\rangle$.

Учитывая полуинвариантность $\langle B, [\ ]\rangle$ в $\langle A, [\ ]\rangle$, а также идемпотентность a, получаем

$$[\underbrace{B_a \ldots B_a}_{n-1} c] = [\underbrace{[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a] \ldots [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a]}_{n-1} c] =$$

$$= [\underbrace{B \ldots B}_{(n-1)(n-1)} \underbrace{a \ldots a}_{n-1} c] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} c] = [c \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] =$$

$$= [c \underbrace{B \ldots B}_{(n-1)(n-1)} \underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = [\underbrace{c[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a] \ldots [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a]}_{n-1}] = [c \underbrace{B_a \ldots B_a}_{n-1}],$$

т. е.

$$[\underbrace{B_a \ldots B_a}_{n-1} c] = [c \underbrace{B_a \ldots B_a}_{n-1}]$$

для любого $c \in A$. Следовательно, $\langle B_a, [\ ]\rangle$ полуинвариантна в $\langle A, [\ ]\rangle$.

Поскольку для любого $c \in A$ верно

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} c] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-2} \underbrace{[B \ldots B]}_{(n-1)(n-2)+1} [\underbrace{a \ldots a}_{n-1} c]] =$$

$$= [\underbrace{\underbrace{B \ldots B}_{n-1} \ldots \underbrace{B \ldots B}_{n-1}}_{n-1} \underbrace{a \ldots a}_{n-1} c] = [\underbrace{[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a] \ldots [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a]}_{n-1} c] = [\underbrace{B_a \ldots B_a}_{n-1} c],$$

т. е.

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} c] = [\underbrace{B_a \ldots B_a}_{n-1} c],$$

то $A/B = A/B_a$.

Так как $a \notin B$, $a \in B_a$, то $B \neq B_a$, точнее $B \cap B = \varnothing$. Предложение доказано.

Лемма 2. *Если* $\langle B, [\ ]\rangle$ — *полуинвариантная n-арная подгруппа идемпотентной n-арной группы* $\langle A, [\ ]\rangle$, *то* $\langle A, [\ ]\rangle$ *является объединением непересекающихся полуинвариантных в* $\langle A, [\ ]\rangle$ *n-арных подгрупп, мощность каждой из которых совпадает с мощностью множества* B.

Доказательство. Пусть

$$A = B + [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a] + \ldots$$

— разложение n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ на непересекающиеся правые смежные классы по n-арной подгруппе $\langle B, [\ ]\rangle$. Согласно лемме 1 все смежные классы из указанного разложения являются полуинвариантными n-арными подгруппами в $\langle A, [\ ]\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $\langle B, [\ ]\rangle$ *и* $\langle C, [\ ]\rangle$ — *n-арные подгруппы n-арной группы* $\langle A, [\ ]\rangle$, *причем* $a \in B \subseteq C$, *то* $\langle B, [\ ]\rangle$ *полуинвариантна в* $\langle C, [\ ]\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $\langle B, @\rangle$ *инвариантна в подгруппе* $\langle C, @\rangle$.

Доказательство. Если $a \in B \subseteq C$, то

$$[a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a] = B.$$

Поэтому для любого $x \in C$ верно

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [x\alpha a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = \left[x\alpha[a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]\right] = x @ B,$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a\alpha x] = [[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a]\alpha x] = B @ x,$$

т. е.

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = x @ B, \qquad [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x] = B @ x.$$

Следовательно,

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

тогда и только тогда, когда $x @ B = B @ x$ для любого $x \in C$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если* $\langle A, [\ ]\rangle$ — *конечная идемпотентная n-арная группа порядка* $p^k m$, *где* $(p, m) = 1$, p *и* $n-1$ — *простые, то в* $\langle A, [\ ]\rangle$ *существует ровно* m *полуинвариантных p-силовских n-арных подгрупп* $\langle P_1, [\ ]\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle P_m, [\ ]\rangle$, *причем*

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} P_i, \qquad P_i \cap P_j = \varnothing \qquad (i \neq j).$$

Доказательство. Согласно следствию 6 [4] группа $\langle A, @\rangle$ нильпотентна. Поэтому в $\langle A, @\rangle$ существует инвариантная p-силовская подгруппа $\langle P_1, @\rangle$, которая является единственной. Согласно предложению 7.4. из [5] отображение

$$\beta_\alpha : x \to [ax\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]$$

— автоморфизм группы $\langle A, @\rangle$, откуда, учитывая единственность p-силовской подгруппы в $\langle A, @\rangle$, получаем

$$[aP_1\underbrace{a\ldots a}_{n-2}] = P_1.$$

Тогда согласно следствию 3.11 из [6] $\langle P_1, [\ ]\rangle$ — n-арная подгруппа в $\langle A, [\ ]\rangle$, являющаяся, очевидно, p-силовской в $\langle A, [\ ]\rangle$, а в силу леммы 3 и полуинвариантной в $\langle A, [\ ]\rangle$.

Применяя теперь лемму 2, получаем разложение

$$A = P_1 + P_2 + \ldots + P_m$$

n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ в объединение непересекающихся полуинвариантных n-арных подгрупп $\langle P_i, [\ ]\rangle$, где

$$P_2 = [\underbrace{P_1\ldots P_1}_{n-1}a_2], \ldots, P_m = [\underbrace{P_1\ldots P_1}_{n-1}a_m], a_2, \ldots, a_m \in A.$$

Предположим, что в $\langle A, [\ ]\rangle$ существует p-силовская n-арная подгруппа $\langle P, [\ ]\rangle$, отличная от $\langle P_1, [\ ]\rangle, \ldots, \langle P_m, [\ ]\rangle$. Ясно, что $P_i \cap P \neq \varnothing$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда для фиксированного $c \in P_i \cap P$ подгруппы $\langle P_i, ©\rangle$ и $\langle P, ©\rangle$ являются различными p-силовскими в группе $\langle A, ©\rangle$, которая согласно следствию 8.2 [5] изоморфна группе $\langle A, @\rangle$ с единственной p-силовской подгруппой $\langle P_1, @\rangle$. Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

Поскольку в конечной нильпотентной группе для любого множества π простых чисел существует единственная π-холловская подгруппа, то, дословно повторяя доказательство теоремы 1, получаем следующее ее обобщение.

Теорема 2. *Если $\langle A, [\ ]\rangle$ — конечная идемпотентная n-арная группа порядка km, где $(k, m) = 1$, $n-1$ — простое, то в $\langle A, [\ ]\rangle$ существует ровно m полуинвариантных n-арных подгрупп $\langle P_1, [\ ]\rangle, \ldots, \langle P_m, [\ ]\rangle$ порядка k, причем*

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} P_i, \quad P_i \cap P_j \neq \varnothing \quad (i \neq j).$$

Следующее определение, принадлежащее С. А. Русакову, является n-арным аналогом внутреннего прямого произведения подгрупп.

Определение [2, с. 126]. *n-Арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, содержащая идемпотент a, называется a-прямым произведением своих n-арных подгрупп $\langle B_1, [\ ]\rangle, \ldots, \langle B_m, [\ ]\rangle$, если при $m = 1$ $A = B_1$, а при $m \geq 2$:*

1) $\langle B_i, [\ ]\rangle$ *полуинвариантная в* $\langle A, [\ ]\rangle$, $i = 1, \ldots, m$;

2) $A = [B_1\underbrace{B_2\ldots B_2}_{n-1}\ldots\underbrace{B_m\ldots B_m}_{n-1}]$;

3) $[B_1 \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1} \ldots \underbrace{B_{r-1} \ldots B_{r-1}}_{n-1}] \cap B_r = \{a\}$ *для любого* $r = 2, \ldots, m$.

Если n-арная группа $\langle A, [\ ] \rangle$ является a-прямым произведением своих n-арных подгрупп $\langle B_1, [\ ] \rangle, \ldots, \langle B_m, [\ ] \rangle$, то будем использовать обозначение

$$\langle A, [\ ] \rangle = \langle B_1, [\ ] \rangle \overset{a}{\times} \ldots \overset{a}{\times} \langle B_m, [\ ] \rangle.$$

Теорема 3. *Если* $\langle A, [\ ] \rangle$ *— конечная идемпотентная n-арная группа порядка* $|A| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, \ldots, p_m$, $n-1$ *— простые), то* $\langle A, [\ ] \rangle$ *единственным образом разлагается в a-прямое произведение*

$$\langle A, [\ ] \rangle = \langle A(p_1), [\ ] \rangle \overset{a}{\times} \ldots \overset{a}{\times} \langle A(p_m), [\ ] \rangle \tag{2}$$

своих p_i-силовских ($i = 1, \ldots, m$) *n-арных подгрупп* $\langle A(p_i), [\ ] \rangle$.

Доказательство. Согласно теореме 1 для любого p_i, $i = 1, \ldots, m$, в $\langle A, [\ ] \rangle$ существует точно $|A| / p_i^{\alpha_i}$ полуинвариантных p_i-силовских n-арных подгрупп, среди которых только одна (обозначим ее через $A(p_i)$) содержит идемпотент a. При этом $\langle A(p_i), @ \rangle$ — p_i-силовская подгруппа группы $\langle A, @ \rangle$, которая согласно следствию 6 [4] нильпотентна. Поэтому

$$\langle A, @ \rangle = \langle A(p_1), @ \rangle \times \ldots \times \langle A(p_m), @ \rangle,$$

откуда, учитывая лемму 3 из [7], получаем (2).

Единственность разложения (2) является следствием единственности p_i-силовской n-арной подгруппы в $\langle A, [\ ] \rangle$, содержащей a. Теорема доказана.

Согласно утверждению 3 теоремы 5.2 [2] n-арная группа $\langle A, [\ ] \rangle$, являющаяся a-прямым произведением своих n-арных подгрупп $\langle B_1, [\ ] \rangle, \ldots, \langle B_m, [\ ] \rangle$, изоморфна прямому произведению

$$\langle B_1, [\ ] \rangle \times \ldots \times \langle B_m, [\ ] \rangle.$$

Поэтому справедливо такое следствие.

Следствие 1. *Конечная идемпотентная n-арная группа* $\langle A, [\ ] \rangle$ *порядка* $|A| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, \ldots, p_m$, $n-1$ *— простые) изоморфна прямому произведению*

$$\langle A(p_1), [\ ] \rangle \times \ldots \times \langle A(p_m), [\ ] \rangle$$

своих p_i-силовских n-арных подгрупп, содержащих один и тот же произвольный элемент $a \in A$.

Дословно повторяя доказательство теоремы 3, получаем следующее ее обобщение.

Теорема 4. *Если* $\langle A, [\ ] \rangle$ *— конечная идемпотентная n-арная группа* ($n-$ -1 *— простое*),

$$\pi(A) = \pi_1 \cup \ldots \cup \pi_m, \quad \pi_i \cap \pi_j = \varnothing, \quad i \neq j,$$

то $\langle A, [\ ] \rangle$ *единственным образом разлагается в a-прямое произведение*

$$\langle A, [\ ] \rangle = \langle A(\pi_1), [\ ] \rangle \overset{a}{\times} \ldots \overset{a}{\times} \langle A(\pi_m), [\ ] \rangle$$

своих π_i-холловских ($i = 1, \ldots, m$) *n-арных подгрупп* $\langle A(\pi_i), [\ ] \rangle$.

***Следствие* 2.** *Если* $\langle A, [\ ] \rangle$ — *конечная идемпотентная* n-*арная группа* ($n-1$ — *простое*)

$$\pi(A) = \pi_1 \cup \ldots \cup \pi_m, \quad \pi_i \cap \pi_j = \varnothing, \quad i \neq j,$$

то $\langle A, [\ ] \rangle$ *изоморфна прямому произведению*

$$\langle A(\pi_1), [\ ] \rangle \times \ldots \times \langle A(\pi_m), [\ ] \rangle$$

своих π_i-*холловских* ($i = 1, \ldots, m$) n-*арных подгрупп, содержащих один и тот же произвольный элемент* $a \in A$.

1. *Dörnte W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z. – 1928. – **29**. – S. 1 – 19.
2. *Русаков С. А.* Алгебраические n-арные системы: силовская теория n-арных групп. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
3. *Post E. L.* Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – **48**, № 2. – P. 208 – 350.
4. *Гальмак А. М.* Идемпотентные n-арные группы // Весці НАН РБ. – 2000. – № 2. – С. 42 – 46.
5. *Гальмак А. М.* Теоремы Поста и Глускина – Хоссу. – Гомель, 1997. – 85 с.
6. *Гальмак А. М.* Конгруэнции полиадических групп. – Минск: Беларус. навука, 1999. – 182 с.
7. *Гальмак А. М.* Полуабелевы n-арные группы с идемпотентами // Весник ВДУ. – 1999. – № 2. – С. 53 – 58.

Получено 05.01.2001