УДК 517.5

Н. А. Галибина (Донецк. ун-т)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ

The local Pompeiu problem of functions with vanishing integrals over balls and cubes and related problems are investigated.

Досліджується локальна проблема Помпейю про функції з нульовими інтегралами по кулях і кубах та близькі питання.

Введение. Пусть R^n — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $ISO(n)$ — группа движений R^n, $B_R^n = \{x \in R^n \colon |x| < R\}$. Совокупность $K = \{K_1, \ldots, K_p\}$ компактных подмножеств R^n называется *семейством Помпейю на* R^n, если каждая локально суммируемая функция $f \colon R^n \to C$, для которой

$$\int\limits_{\sigma K_j} f(x)\,dx = 0, \quad j = \overline{1, p}, \tag{1}$$

при всех $\sigma \in ISO(n)$ равна нулю почти всюду.

Классическая проблема Помпейю, соответствующая случаю $p = 1$, изучалась во многих работах (см. обзоры [1, 2]).

Большой интерес представляет изучение семейств Помпейю для функций с условиями типа (1), заданных на ограниченной области. Ряд результатов в этом направлении получен в работах К. А. Беренстейна и Р. Гэя [3, 4].

В работах [5, 6] поставлена проблема о наименьшем радиусе шара, на котором данный компакт является множеством Помпейю. Для некоторых случаев ее решение получено в [5, 7, 8]. Ряд подобных задач для шаровых и сферических средних рассмотрен в [7, 9–12].

В данной работе изучаются семейства Помпейю на шаре B_R^n, состоящие из кубов и шаров, и близкие вопросы.

1. Основные результаты. Обозначим через $L_{\text{loc}}(B_R^n)$ множество локально суммируемых функций на B_R^n, $S_r^{n-1} = \{x \in R^n \colon |x| = r\}$, $K_{a,b}^n = \{x \in R^n \colon a < |x| < b\}$ для $a, b > 0$. Как обычно, для $x \in R^n$ положим $\rho = |x|$, $\sigma = \dfrac{x}{\rho} \in S_1^{n-1} (\rho \neq 0)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа.

Пусть также

$$A_{r,d,n} = d\sqrt{n} - r, \quad B_{r,d,n} = r + d\frac{\sqrt{n}}{2},$$

$$F_{r,d,n} = d\sqrt{3} - 2(n-1)r,$$

$$G_{R,d} = d - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{2}}, \quad N_{R,d} = d - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}, \quad \alpha = \frac{8\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} + 1},$$

$$\beta = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_{\text{loc}}(B_R^n)$ *и имеет нулевые интегралы по всем кубам со стороной* d *и шарам радиуса* r, *содержащимся в* B_R^n. *Тогда если выполнено одно из условий*:

1) $R \ge \dfrac{\sqrt{n+3}}{2}d$;

2) $\dfrac{\sqrt{n}}{2}d \le R < \dfrac{\sqrt{n+3}}{2}d$, $R \ge 2r$, $R > A_{r,d,n}$;

3) $\dfrac{\sqrt{n}}{2}d \le R < \dfrac{\sqrt{n+3}}{2}d$, $R \ge 2r$, $R \le A_{r,d,n}$, $R > B_{r,d,n}$,

то $f = 0$;

4) *если* $\dfrac{\sqrt{n}}{2}d \le R < \dfrac{\sqrt{n+3}}{2}d, r < R < 2r$, *то существует ненулевая функция, удовлетворяющая условию теоремы;*

в остальных случаях вопрос о существовании ненулевой функции с указанными свойствами остается открытым.

Следующий результат является усилением теоремы 1 при $n = 2$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_{\text{loc}}(B_R^2)$ *и имеет нулевые интегралы по всем квадратам со стороной* d *и кругам радиуса* r, *содержащимся в* B_R^2. *Тогда если выполнено одно из условий:*

1) $R \ge \sqrt{5}d/2$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}d \le R < \dfrac{\sqrt{5}}{2}d$, $R \ge 2r$, $R > A_{r,d,2}$;

3) $\beta d \le R < \dfrac{\sqrt{5}}{2}d$, $R \ge 2r$, $R \le A_{r,d,2}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}d \le R < \beta d$, $R \ge 2r$, $R > B_{r,d,2}$,

то $f = 0$;

5) *если* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}d \le R < \dfrac{\sqrt{5}}{2}d, r < R < 2r$, *то существует ненулевая функция, удовлетворяющая условию теоремы;*

в случае, когда $\left(\sqrt{2}/2\right)d \le R < \beta d$, $R \ge 2r$, $R > B_{r,d,2}$, *вопрос о существовании ненулевой функции с указанными свойствами остается открытым.*

Следствие. *Пусть* $f \in L_{\text{loc}}(B_R^2)$ *и имеет нулевые интегралы по всем квадратам со стороной* d *и кругам радиуса* r, *содержащимся в* B_R^2. *Тогда:*

1) *если* $r \ge \dfrac{\sqrt{5}}{4}d$, *то* $f = 0$ *при* $R \ge \dfrac{\sqrt{5}}{2}d$;

2) *если* $r < \dfrac{\sqrt{5}}{4}d$ *и выполнено одно из условий:*

а) $2r \le \beta d \le A_{r,d,2} \le B_{r,d,2}$;

б) $2r \le \beta d \le B_{r,d,2} \le A_{r,d,2}$,

то $f = 0$ *при* $R \ge \beta d$;

3) *если* $r < \dfrac{\sqrt{5}}{4}d$, $2r \le B_{r,d,2} \le \beta d \le A_{r,d,2}$, *то* $f = 0$ *при* $R > B_{r,d,2}$;

4) *если выполнено одно из условий:*

а) $r < \frac{\sqrt{5}}{4} d$, $A_{r,d,2} \le \beta d \le 2r \le B_{r,d,2}$;

б) $r < \frac{\sqrt{5}}{4} d$, $\beta d \le A_{r,d,2} \le 2r \le B_{r,d,2}$;

в) $r < \frac{\sqrt{5}}{4} d$, $\beta d \le 2r \le A_{r,d,2} \le B_{r,d,2}$,

то $f = 0$ *при* $R \ge 2r$.

Рассмотрим теперь семейство множеств, состоящее из кубов со стороной d и сфер радиуса r, содержащихся в B_R^3.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_{\text{loc}}(B_R^3)$ *и имеет нулевые интегралы по всем кубам со стороной* d, *содержащимся в* B_R^3.

Пусть, далее,

$$\int_{\sigma S_r^2} f(x) ds = 0 \quad \forall \sigma \in ISO(3) \colon \sigma S_r^2 \subset B_R^3,$$

где ds — *поверхностная мера на* S_r^2.

Тогда если выполнено одно из условий:

1) $R \ge \frac{\sqrt{6}}{2} d$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{2} d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $R \ge 2r$, $R \ge B_{r,d,3}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2} d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $R < B_{r,d,3}$, $R = 2nr$, $n \ge 1$, $n \in N$, $R \ge B_{r,d,3} - r/2$;

4) $\frac{\sqrt{3}}{2} d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $R < B_{r,d,3}$, $(2-1)r \le R < 2nr$, $n \ge 2$, $n \in N$, $R \ge F_{r,d,n}$;

5) $\frac{\sqrt{3}}{2} d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $R < B_{r,d,3}$, $R \ge F_{r,d,2}$, $d\sqrt{3} > 4r$, $\alpha r \le R < 3r$,

$$4r - R > G_{R,d}, \quad R - 2r \ge G_{R,d};$$

6) $\frac{\sqrt{3}}{2} d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $R < B_{r,d,3}$, $R \ge F_{r,d,2}$, $d\sqrt{3} > 4r$, $\alpha r \le R < 3r$,

$$4r - R > G_{R,d}, \quad G_{R,d} \le r;$$

7) $\frac{\sqrt{3}}{2} d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $R < B_{r,d,3}$, $2(n-1)r < R < (2n-1)r$, $n \ge 2$, $n \in N$,

$$R \ge F_{r,d,n}, \quad d\sqrt{3} \le (2n-1)r,$$

то $f = 0$;

если выполнено одно из условий:

8) $R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $r < R < 2r$;

9) $\frac{\sqrt{3}}{2} d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2} d$, $R < B_{r,d,3}$, $R \ge F_{r,d,2}$, $d\sqrt{3} > 4r$, $\alpha r \le R < 3r$,

$$G_{R,d} < 4r - R, \quad G_{R,d} > R - 2r, \quad G_{R,d} > r;$$

10) $\frac{\sqrt{3}}{2}d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2}d$, $R < B_{r,d,3}$, $R \ge F_{r,d,2}$, $d\sqrt{3} > 4r$, $4r - R \le G_{R,d}$;

11) $\frac{\sqrt{3}}{2}d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2}d$, $R < B_{r,d,3}$, $R \ge F_{r,d,2}$, $d\sqrt{3} > 4r$, $2r < R < \alpha r$,

$$G_{R,d} > 3r - R;$$

12) $\frac{\sqrt{3}}{2}d \le R < \frac{\sqrt{6}}{2}d$, $R < B_{r,d,3} - r/2$, $G_{R,d} > 1/2$,

то существует ненулевая функция, удовлетворяющая условию теоремы;

в остальных случаях вопрос о существовании ненулевой функции с указанными свойствами остается открытым.

2. Доказательство основных результатов. Отметим, что функцию f можно считать принадлежащей классу C^∞ (если f не принадлежит классу C^∞, то применим метод сглаживания из [7, с. 21]).

***Доказательство теоремы* 1.** Первый случай теоремы 1 непосредственно вытекает из теоремы 1 работы [6]. В утверждении 4 все шары и круги имеют непустое пересечение — некоторый шар B. Тогда все ненулевые функции с носителем B такие, что

$$\int_B f(x)dx = 0,$$

удовлетворяют условию теоремы 1.

Доказательство случаев 2, 3 основано на утверждении, что $\Delta^n f = 0$ в $K^n_{A_{R,d,n},R}$ (см. [6], лемма 4).

Пусть $F = \Delta^{n-1} f$ и f радиальна. Тогда F также является радиальной и удовлетворяет условию теоремы 1.

Решение уравнения $\Delta F = 0$ имеет вид

$$F(\rho) = \begin{cases} \dfrac{c_1}{\rho^{n-2}} + c_2 & \text{при} \quad n \ge 3; \\ c_1 \ln\rho + c_2 & \text{при} \quad n = 2, \end{cases}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Поскольку $f \in G^\infty(B^n_R)$, то $c_1 = 0$. В силу условия теоремы 1 $c_2 = 0$, следовательно, $F = 0$. Переобозначив F и проделав $n-1$ раз описанные выше действия, получим $f = 0$ в $K^n_{A_{R,d,n},R}$.

Если $R > A_{r,d,n}$, то $f = 0$ в B^n_R в силу теоремы 4 работы [5]. Из [7, с. 24] следует, что $f = 0$ при $R > B_{r,d,n}$. Тем самым доказаны утверждения 2 и 3, когда функция радиальна.

В общем случае функции соответствует ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, R),$$

где $\{Y_l^{(k)}\}_{l=\overline{1,a_k}}$ — ортонормированный базис в пространстве H_k сферических гармоник степени k [13, с. 157] и

$$f_{kl}(\rho) = \int_{S_1^{n-1}} f(\rho\sigma) Y_l^{(k)}(\sigma) d\sigma.$$

Если $f \neq 0$ в B_R^n и удовлетворяет условию теоремы, то этому же условию удовлетворяют функции $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma)$ $\forall k \in Z_+$; $l, p = \overline{1, a_k}$ (см. [6], лемма 1).

Если при некоторых $k \in Z_+$, $l, p = \overline{1, a_k}$, функция $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \neq 0$, то с помощью утверждений а) и в) леммы 1 в [6] легко построить ненулевую радиальную функцию, удовлетворяющую условию теоремы 1. Это противоречит приведенным выше рассуждениям, и, таким образом, теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Утверждения 1, 2, 4, 5 содержатся в теореме 1, поэтому необходимо рассмотреть только случай 3.

По доказанному выше $f = 0$ в $K^2_{A_{R,d,2},R}$. Продолжим f нулем вне B_R^2. Условие $R \geq \beta d$ означает, что к f применима теорема о носителе (см. [6], доказательство леммы 18 и [14, с. 125]), из которой следует, что $f = 0$ в $K^2_{N_{R,d}R}$. Нетрудно проверить, что множество всех $R > 0$ таких, что

$$R \geq 2r, \quad \beta d \leq R < \sqrt{5}\, d/2, \quad R \leq A_{R,\,d,\,2},$$

$$R \leq B_{r,\,d,\,2}, \quad N_{R,\,d} \geq r, \quad R - N_{R,\,d} \leq 2r,$$

пусто.

Из теоремы 4 [5] и [7, с. 24] следует, что $f = 0$ в B_R^2. Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Утверждение 1 теоремы 3 непосредственно вытекает из теоремы 1 [6]. В случае 8 все кубы со стороной d и шары радиуса r имеют непустое пересечение — некоторый шар B. Тогда все ненулевые функции $f \in C^\infty(B_R^3)$ с носителем B такие, что

$$\int_B f(x)dx = 0,$$

удовлетворяют условию теоремы 3.

Пусть f радиальна, тогда в силу теоремы 3 работы [12] она представима в виде

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{\pi k \rho}{r}\right)$$

для всех $\rho \in (0, R)$.

Рассмотрим функцию $g(\rho) = \rho f(\rho)$. Заметим, что $g(\rho)$ является $2r$-периодической и нечетной по переменной ρ.

Из доказательства теоремы 1 следует, что можно считать $f = 0$ в $K^3_{A_{R,d,3},R}$. Случай 2 теоремы 3 вытекает из того, что ширина кольца, где $f = 0$, больше либо равна длине периода функции g. Следовательно, $g = 0$ в B_R^3, и тогда $f = 0$ в B_R^3.

В случаях 3, 4, 7 из нечетности функции g следует ее равенство нулю в B_R^3, тогда $f = 0$ в B_R^3.

В случаях 5, 6 в силу нечетности $g(\rho) = 0$ в кольце $K^3_{4r-R,R}$. Положим $f = 0$ вне B_R^3, тогда из условия теоремы 3 и формулы Гаусса–Остроградского следует, что функция f имеет нулевые интегралы по всем гиперплоскостям в R^3 вне шара $B^3_{G_{R,d}}$, поэтому в силу теоремы о носителе [14, с. 125] $f = 0$ в кольце $K^3_{G_{R,d}R}$. Тогда утверждение 5 следует из $2r$-периодичности функции $g(\rho)$, а случай 6 — из нечетности $g(\rho)$. Рассмотрим далее функцию вида

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\sin\left(\dfrac{\pi(\rho - r)}{\alpha - r}\right), & \text{если} \quad \rho \in [2r - \alpha, \alpha]; \\ -\dfrac{1}{\rho^2}\sin\left(\dfrac{\pi(\rho + r)}{\alpha - r}\right), & \text{если} \quad \rho \in [-\alpha, \alpha - 2r]; \\ 0, \quad \text{если} \quad \rho \in (-R, -\alpha) \cup (\alpha - 2r, 2r - \alpha) \cup (\alpha, R), \end{cases}$$

где $\alpha = G_{R,\,d}$ для случаев 9, 11, 12 и $\alpha = 4r - R$ для случая 10.

Нетрудно проверить, что функция φ удовлетворяет условию теоремы 3. Если теперь f не является радиальной, то рассуждаем так же, как при доказательстве теоремы 1. Теорема 3 доказана.

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations / Ed. B. Fuglede et al. – 1992. – P. 185–194.
2. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1989. – **54**. – С. 5–11.
3. *Berenstein C. A., Gay R.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. – 1989. – **52**. – P. 133–166.
4. *Berenstein C. A., Gay R.* A local version of the two-circules theorem // Isr. J. Math. – 1986. – **55**. – P. 267–288.
5. *Волчков В. В.* Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 5. – С. 671–680.
6. *Волчков В. В.* Экстремальные задачи о множествах Помпейю // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 7. – С. 3–21.
7. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Там же. – 1995. – **186**, № 6. – С. 15–34.
8. *Волчков В. В.* Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 6. – С. 804–809.
9. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Там же. – 1993. – **53**, № 2. – С. 30–36.
10. *Волчков В. В.* Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. – 1994. – **35**, № 4. – С. 737–745.
11. *Волчков В. В.* Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 3. – С. 351–358.
12. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 9. – С. 13–30.
13. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 335 с.
14. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. – М.: Мир, 1983. – 152 с.

Получено 17.07.2000