УДК 517.5

**В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов** (Днепропетр. ун-т)

# ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА С ОГРАНИЧЕННОЙ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ГЛАДКОСТЕЙ

We obtain new best possible Kolmogorov-type inequalities for differentiable periodic functions. In particular, we prove that, for $r=2,\ k=1$ or $r=3,\ k=1, 2$ and for arbitrary $q, p \in [1, \infty]$, a best possible inequality

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{\left\| \varphi_r \right\|_p^{\alpha}} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty}^{1-\alpha}$$

is true for functions $x \in L_\infty^r$, where $\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right\}$ and $\varphi_r$ is the Euler perfect spline of order $r$.

Одержано нові непокращувані нерівності типу Колмогорова для диференційовних періодичних функцій. Зокрема, доведено, що при $r=2,\ k=1$, або $r=3,\ k=1, 2$ та при довільних $q, p \in [1, \infty]$ для функцій $x \in L_\infty^r$ справедлива непокращувана нерівність

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{\left\| \varphi_r \right\|_p^{\alpha}} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty}^{1-\alpha},$$

де $\alpha = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right\}$, $\varphi_r$ — ідеальний сплайн Ейлера порядку $r$.

**1. Введение.** Пусть $G$ — вещественная ось $R$, полуось $R_+$, конечный отрезок $I$ или $G = T$ — единичная окружность, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Через $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций $x\colon G \to R$ таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left( \int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Для $s \in [1, \infty]$ и $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $L_s^r(G)$ множество функций $x\colon G \to R$ таких, что $x^{(r-1)}$ $\left(x^{(0)} = x\right)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Если $p \in (0, \infty]$, то положим $L_{p,s}^r(G) = L_p(G) \cap L_s^r(G)$. Отметим, что если $G$ есть $I$ или $T^1$, то $L_s^r(G) \subset L_p(G)$ для любого $p$.

Известно (см., например, [1]), что в случае $G=R$ или $G=R_+$ при выполнении условия

$$\frac{r-k}{p}+\frac{k}{s}\geq\frac{r}{q}$$

для функций $x\in L^r_{p,s}(G)$ имеет место мультипликативное неравенство типа Колмогорова

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(G)}\leq K\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)}\left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_{L_s(G)},\tag{1}$$

в котором константа $K=K(q,p,s;r,k)$ не зависит от $x$ и

$$\alpha=\frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}.$$

В [2] доказано, что в случае $G=T^1$ неравенство (1) для функций $x\in L^r_{p,s}(T^1)$ имеет место, если и только если

$$\alpha\leq\alpha_{\mathrm{cr}}:=\min\left\{1-\frac{k}{r},\frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\right\}.\tag{2}$$

Неравенства типа (1), особенно с неулучшаемыми константами $K$, имеют важные применения во многих областях анализа и его приложений. В случае $G=T^1$ особый интерес представляют неравенства типа (1) с $\alpha=\alpha_{\mathrm{cr}}$ хотя бы потому, что во многих случаях из неулучшаемого неравенства типа (1) с $\alpha=\alpha_{\mathrm{cr}}$ нетрудно получить неравенство с произвольным $\alpha<\alpha_{\mathrm{cr}}$ и неулучшаемой константой $K$.

Перечислим случаи, когда при некоторых значениях $q$, $p$, $s$ решение задачи о точной константе в неравенстве (1) известно для всех $k,r\in\mathbb{N}$, $k<r$ (соответствующие библиографические сведения можно найти, например, в [3 – 6]).

Для $G=R$ эти случаи таковы: 1) $q=p=s=\infty$ (Ж. Адамар, Г. Е. Шилов, А. Н. Колмогоров); 2) $q=p=s=2$ (Г. Харди, Дж. Литтлвуд и Д. Полиа); 3) $q=p=s=1$ (И. Стейн); 4) $q=\infty$, $p=s=2$ (Л. В. Тайков).

Для случая $G=R_+$ это: 1) $q=p=s=\infty$ (Э. Ландау, А. П. Маторин, И. Шенберг и А. Каваретта); 2) $q=p=s=2$ (Ю. И. Любич, Н. П. Купцов); 3) $q=\infty$, $p=s=2$ (В. Н. Габушин).

Наконец, если $G=T^1$, эти случаи таковы: 1) $q=p=s=\infty$ (А. Н. Колмогоров); 2) $q=p=s=2$ (Г. Харди, Дж. Литтлвуд и Д. Полиа); 3) $q=p=s=1$ (И. Стейн); 4) $q\in[1,\infty)$, $p=s=\infty$ (А. А. Лигун); 5) $q=p=\infty$, $s=1$ (А. А. Лигун); 6) $q=\infty$, $p=s=2$ (А. Ю. Шадрин); 7) $q=\infty$, $p\in[1,\infty)$, $s=\infty$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов); 8) $q=\infty$, $p\in[1,\infty)$, $s=1$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов); 9) $q=2$, $p\in[1,\infty)$, $s=1$, $k>r/2$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов); 10) $q>p>0$, $s=\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $k=0$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов) (в последнем случае $k=0$, но $r\in\mathbb{N}$, $q>p>0$ произвольны (см., например, [7])). Для функций, заданных на $R$ или $R_+$, и небольших $r$ в ряде случаев удалось доказать точные неравенства типа (1) с достаточно произвольными $q$, $p$, $s$ (перечень этих результатов и соответствующие ссылки можно найти в [3 – 5]).

Цель данной статьи — получить некоторые новые неравенства типа (1) в случае $G=T^1$. При этом имеются в виду неравенства с $\alpha=\alpha_{\mathrm{cr}}$. Некоторые результаты настоящей работы анонсированы в [8].

В работе [9] при $G=R$, $s=\infty$ найдены точные значения $K=K(q,p,\infty;k,r)$ в случаях:

а) $r = 2,\ k = 1,\ q = 2p,\ p \geq 1/2$;
б) $r = 3,\ k = 1,\ q = 3p/2,\ p \geq 2/3$;
в) $r = 3,\ k = 2,\ q = 3p,\ p \geq 2/3$.
При этом

$$K(q, p, \infty; k, r) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0^\alpha(\varphi_r)_p},$$

где в случае $G = T^1$ вместо $\|x\|_{L_p(T^1)}$ пишем $\|x\|_p$;

$$E_0(x)_p := \inf\left\{\|x - c\|_p : c \in \mathbb{R}\right\}$$

— наилучшее приближение функции $x \in L_p$ константой, а $\varphi_r(t)$ — $r$-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, для функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$. Заметим, что при $p \geq 1$ $E_0(\varphi_r)_p = \|\varphi_r\|_p$ (см., например, [10], предложение 4.1.5). Обозначим через $c_p$ константу наилучшего $L_p$-приближения функции $\varphi_r$. Ясно, что при $p \geq 1$ $c_p = 0$.

**2. Основные результаты.** Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть* $q \in [1, \infty]$; *и*

1) $k = 1;\ r = 2, 3;\ p \in (0, \infty]$,

*или*

2) $k = 2;\ r = 3;\ p \in (1/3, \infty]$.

*Тогда для любой функции* $x \in L_\infty^r$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{3}$$

*где*

$$\alpha = \alpha_{\text{cr}} := \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r - k - s^{-1} + q^{-1}}{r - s^{-1} + p^{-1}}\right\}.$$

*Неравенство* (3) *обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a(\varphi_r(t + t_0)) - c_p$, *где* $a,\ t,\ t_0 \in \mathbb{R}$, *если* $q > \dfrac{p}{1 - k/r}$, *и для функций вида* $x(t) = a(\varphi_r(nt + t_0)) - c_p$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$, *если* $q \leq \dfrac{p}{1 - k/r}$.

В случае $p = q = \infty$ неравенство (3) является частным случаем неравенства А. Н. Колмогорова, а при $p = \infty$, $q \in [1, \infty)$ — частным случаем неравенства А. А. Лигуна. Поэтому всюду в дальнейшем будем предполагать, что $p \neq \infty$, $q \neq \infty$.

Доказательство в [9] для случая $G = \mathbb{R}^1$ основано на теореме сравнения Колмогорова (см., например, [10], § 3.3). При этом основную роль играет следующее утверждение (мы переформулируем его в удобном для нас виде, с помощью которого в дальнейшем в случае $2\pi$-периодических функций получим некоторую дополнительную информацию).

Положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$, $\lambda > 0$.

**Лемма 1** [9]. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$; *а)* $x \in C^r(\mathbb{R}^1)$; $\left\|x^{(r)}\right\|_{C(\mathbb{R}^1)} = 1$, $T > 0$; $x'(0) = x'(T) = 0$, *б) для функции сравнения* $\psi(t) := \varphi_{\lambda,r}(t + t_0) + c$ *параметры* $\lambda$, $t_0$ *и* $c$ *выбраны так, чтобы выполнялись условия*

$$\min_{t\in\mathbb{R}^1}\psi(t) = \psi(0) = x(0), \qquad \max_{t\in\mathbb{R}^1}\psi(t) = x(T),$$

*и пусть в)* $z$ *— ближайший справа к точке* $t=0$ *нуль функции* $\psi'$.

*Тогда для всех* $p\in(0,\infty)$, $q\geq 1$, $r\geq 2$ *выполнены неравенства*

$$\|x\|_{L_p[0,T]} \geq \|\psi\|_{L_p[0,z]} \geq 2^{-1/p}\lambda^{-1/(p-r)}E_0(\varphi_r)_p.$$

*Если, кроме того,* $|x'(t)|>0$ *при* $t\in(0,T)$, *то*

$$\|x'\|_{L_q[0,T]} \leq \|\psi'\|_{L_q[0,z]} = 2^{-1/q}\lambda^{1-1/(q-r)}\|\varphi_{r-1}\|_q.$$

Для $2\pi$-периодической функции $x\in L_\infty^r$, $r>1$, пусть $x'(0)=0$. Положим $E(x') := \{t\in[0,2\pi]: x'(t)\neq 0\}$. Ввиду непрерывности $x'$ множество $E(x')$ открыто и, значит, представимо в виде

$$E(x') = \bigcup_{j=1}^{\nu(x')}(\beta_j,\beta_{j+1}),$$

где $x'(\beta_j)=0$, $x'(t)\neq 0$ при $t\in(\beta_j,\beta_{j+1})$, $\nu(x')$ — число перемен знака $x'$ на периоде. Пусть еще $(x)_j$ — сужение функции $x$ на отрезок $[\beta_j,\beta_{j+1}]$.

**Лемма 2.** *Пусть* $k, r\in\mathbb{N}$, $k<r$, $q\in[1,\infty)$, $p\in(0,\infty]$ *при* $k=1$; $p\in[1-k/r,\infty]$ *при* $k>1$, *и функция* $x$ *из* $L_\infty^r$ *такова, что при всех* $j$ *сужение* $(x)_j$ *можно продолжить на всю ось до функции* $(\tilde{x})_j$ *так, что*

$$(\tilde{x})_j\in L_\infty^r, \qquad \inf_{t\in\mathbb{R}^1}(\tilde{x})_j(t) = \min_{t\in[\beta_j,\beta_{j+1}]}(x)_j(t),$$
$$\sup_{t\in\mathbb{R}^1}(\tilde{x})_j(t) = \max_{t\in[\beta_j,\beta_{j+1}]}(x)_j(t). \tag{4}$$

*Тогда имеют место неравенства*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha}\|x\|_p^\alpha\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{5}$$

*где* $\alpha=\alpha_{\text{ст}}$ *определено в* (2).

***Доказательство леммы 2.*** Сначала докажем (5) в случае $k=1$. Без ограничения общности можно считать, что $\left\|x^{(r)}\right\|_\infty = 1$ и $x'(0)=0$. На каждом интервале $(\beta_j,\beta_{j+1})$ строгой монотонности $x$ будем применять лемму 1. Для этого сужение $(x)_j$ продолжим на всю ось до функции $(\tilde{x})_j$ так, чтобы выполнялось (4). Тогда к функции $(\tilde{x})_j$ при $t\in[\beta_j,\beta_{j+1}]$ можно применить лемму 1. Тем самым найдем соответствующую функцию сравнения $\varphi_{\lambda_j,r}(t+t_{0,j})+c_j$ такую, что

$$\|x\|_{L_p[\beta_j,\beta_{j+1}]} \geq 2^{-1/p}\lambda_j^{-1/(p-r)}E_0(\varphi_r)_p,$$
$$\|x'\|_{L_q[\beta_j,\beta_{j+1}]} \leq 2^{-1/q}\lambda_j^{1-1/(q-r)}\|\varphi_{r-1}\|_q.$$

Суммируя эти оценки по всем $j$, получаем

$$\|x\|_p^p \geq \sum_{j=1}^{\nu(x')}\|x\|_{L_p[\beta_j,\beta_{j+1}]}^p \geq \frac{1}{2}E_0^p(\varphi_r)_p\sum_{j=1}^{\nu(x')}\lambda_j^{-(rp+1)},$$
$$\|x'\|_q^q = \sum_{j=1}^{\nu(x')}\|x'\|_{L_q[\beta_j,\beta_{j+1}]}^q \leq \frac{1}{2}\|\varphi_{r-1}\|_q^q\sum_{j=1}^{\nu(x')}\lambda_j^{-(q(r-1)+1)}, \tag{6}$$

$$\frac{\|x'\|_q}{\|x'\|_p^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty}^{1-\alpha}} \le \frac{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_q}{E_0(\varphi_r)_p^{\alpha}} B,$$

где

$$B := \frac{\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(q(r-1)+1)}\right)^{1/q}}{\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(rp+1)}\right)^{\alpha/q}}. \tag{7}$$

Нужно показать, что $B \le 1$.

Рассмотрим случаи $q \in [1, pr/(r-1)]$ и $q > pr/(r-1)$. При этом первый случай имеет место, если $p \ge 1-1/r$.

Пусть сначала $q \in [1, pr/(r-1)]$. В этом случае (см. (2)) $\alpha = 1-k/r$. При $q = pr/(r-1)$ тривиальным образом $B = 1$. Пусть $q \in [1, pr/(r-1))$. Тогда можно использовать неравенство Гельдера с показателями $(pr/q(r-1)$, $pr/(pr-q(r-1)))$:

$$\sum_{j=1}^{\nu(x')}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{q(r-1)+1} = \sum_{j=1}^{\nu(x')}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{q(r-1)+q(r-1)/pr}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{1-q(r-1)/pr} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{\nu(x')}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{pr+1}\right)^{q(r-1)/pr}\left(\sum_{j=1}^{\nu(x')}\frac{1}{\lambda_j}\right)^{1-q(r-1)/pr},$$

откуда

$$B \le 2^{(r-1)/pr-1/q}\left(\sum_{j=1}^{\nu(x')}\frac{1}{\lambda_j}\right)^{1/q-(r-1)/pr}. \tag{8}$$

Исследуем возможные значения чисел $\lambda_j$.

При применении леммы 1 на каждом интервале $(\beta_j, \beta_{j+1})$ монотонности функции $x$ мы используем (причем полностью) один интервал монотонности функции сравнения $\varphi_{\lambda_j, r}(t+t_{0,j}) + c_j$, длина носителя которого равна $\pi/\lambda_j$. Из теоремы сравнения Колмогорова (см., например, [10], предложение 3.3.3) следует, что $\pi/\lambda_j \le \beta_{j+1} - \beta_j$. Отсюда $\sum_{j=1}^{\nu(x')} \pi/\lambda_j \le 2\pi$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{\nu(x')}\frac{1}{\lambda_j} \le 2. \tag{9}$$

Теперь из неравенств (9) и (8) следует, что $B \le 1$, и неравенство (5) доказано для $q \in (1, pr/(r-1)]$.

Далее, ввиду периодичности функции $x$ сумма вариаций функции $x$ на всех интервалах возрастания равна сумме вариаций функции $x$ на всех интервалах убывания. Но тогда это же имеет место и для функций сравнения. Поскольку $\left\|\varphi_{\lambda_j, r}\right\|_{\infty} = \lambda_j^{-r}\|\varphi_r\|_{\infty}$, то отсюда следует

$$\sum_{j=1}^{\nu(x')/2}\frac{1}{\lambda_{2j}^r} = \sum_{j=0}^{\nu(x')/2-1}\frac{1}{\lambda_{2j+1}^r}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай $q \in (pr/(r-1), \infty)$. Тогда $\alpha = \dfrac{r-1+1/p}{r+1/p}$,

$$B^{q/q(r-1)+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(q(r-1)+1)}\right)^{1/(q(r-1)+1)}}{\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(rp+1)}\right)^{1/(rp+1)}}. \tag{11}$$

Из (11) и (10) видно, что неравенство $B \le 1$ будет вытекать из следующего утверждения:

*Пусть* $a_j, b_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, n$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $q > pr/(r-1)$, *причем количества ненулевых элементов* $a_j$ *и* $b_j$ *одинаковы. Тогда*

$$\sup_{\sum_{j=1}^n a_j^r = \sum_{j=1}^n b_j^r} \left\{ \frac{\left(\sum_{j=1}^n a_j^{q(r-1)+1} + \sum_{j=1}^n b_j^{q(r-1)+1}\right)^{1/(q(r-1)+1)}}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^{rp+1} + \sum_{j=1}^n b_j^{rp+1}\right)^{1/(rp+1)}} \right\} =$$

$$= 2^{1/(q(r-1)+1)-(1/rp+1)}. \tag{12}$$

Для доказательства (12) установим свойства экстремальных векторов в задаче

$$\sum_{j=1}^n a_j^{q(r-1)+1} + \sum_{j=1}^n b_j^{q(r-1)+1} \to \sup,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j^{rp+1} + \sum_{j=1}^n b_j^{rp+1} = 1, \qquad \sum_{j=1}^n a_j^r = \sum_{j=1}^n b_j^r, \tag{13}$$

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

причем количество ненулевых элементов у векторов $a$ и $b$ одинаковы.

Существование экстремальных векторов в этой задаче очевидно. Пусть точка $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ — экстремальная. Удалим из нее все нулевые компоненты. После перенумерации получим, что точка $(a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l)$, где $l \le n$, является внутренней экстремальной точкой в задаче (13), где $n$ заменено на $l$. Для характеризации свойств внутренних критических точек найдем корни системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, l,$$

где

$$L = \sum_{j=1}^l a_j^{q(r-1)+1} + \sum_{j=1}^n b_j^{q(r-1)+1} -$$

$$- \lambda\left(\sum_{j=1}^l a_j^{rp+1} + \sum_{j=1}^l b_j^{rp+1}\right) + \mu\left(\sum_{j=1}^l a_j^r - \sum_{j=1}^l b_j^r\right)$$

— функция Лагранжа. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} = (q(r-1)+1)a_j^{q(r-1)} - \lambda(rp+1)a_j^{rp} + r\mu a_j^{r-1} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_j} = (q(r-1)+1)b_j^{q(r-1)} - \lambda(rp+1)b_j^{rp} - r\mu b_j^{r-1} = 0. \tag{15}$$

Умножим (14) на $a_j$, (15) на $b_j$, сложим эти равенства и просуммируем по $j$. В результате получим

$$(q(r-1)+1)\left(\sum_{j=1}^{l} a_j^{q(r-1)+1} + \sum_{j=1}^{l} b_j^{q(r-1)+1}\right) = \lambda(rp+1)\left(\sum_{j=1}^{l} a_j^{rp} + \sum_{j=1}^{l} b_j^{rp}\right),$$

откуда следует, что $\lambda > 0$.

Теперь разделим (14) и (15) на $a_j^{r-1}$ и $b_j^{r-1}$ соответственно:

$$(q(r-1)+1)a_j^{(q-1)(r-1)} - \lambda(rp+1)a_j^{r(p-1)+1} + r\mu = 0, \tag{16}$$

$$(q(r-1)+1)b_j^{(q-1)(r-1)} - \lambda(rp+1)b_j^{r(p-1)+1} - r\mu = 0. \tag{17}$$

Введем функцию

$$f(t) = (q(r-1)+1)t^{(q-1)(r-1)} - \lambda(rp+1)t^{r(p-1)+1},$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, $\lambda > 0$, и $(q-1)(r-1) > (p-1)r+1$. Поскольку

$$f(t) = t^{(p-1)r+1}\left((q(r-1)+1)t^{(q-p)r-q} - \lambda(rp+1)\right),$$

то отсюда видно, что функция $f$ имеет на $\mathbb{R}_+$ два нуля: $t_1 = 0$, $t_2 = \left(\frac{\lambda(rp+1)}{q(r-1)+1}\right)^{1/((q-p)r-q)}$ и между ними точку минимума $\xi$; при этом на $(0, \xi)$ функция $f$ монотонно убывает, а на $(\xi, \infty)$ — монотонно возрастает.

В терминах функции $f$ равенства (16), (17) означают, что для всех $j = 1, \ldots, l$

$$f(a_j) = -r\mu, \quad f(b_j) = r\mu.$$

Из свойств $f$ следует, что это возможно лишь в случае $\mu = 0$ (иначе нарушится условие $\sum_{j=1}^{n} a_j^r = \sum_{j=1}^{n} b_j^r$), и следовательно, $a_j = b_j$.

Итак, из необходимых условий экстремума (14), (15) следует, что $a_j = b_j = c$ при всех $j = 1, \ldots, l$ для некоторой константы $c$ и некоторого $l \le n$, и $a_j = b_j = 0$ при $j = l+1, \ldots, n$. А для векторов такого типа верхняя грань в (12) легко вычисляется: она реализуется в случае $l = 1$. Отсюда и из (11) следует, что $B \le 1$, причем в экстремальном случае $\nu(x') = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Неравенства (5) доказаны для $k = 1$ и всех $r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$.

Далее доказываем по индукции. Пусть утверждение леммы 2 выполнено для всех $r \le l-1$ и $k < r$. Докажем (5) при $r = l$, произвольном $k < l$ и $p \ge 1 - 1/l$, $q \ge 1$.

Положим $\overline{p} := pl/(l-1)$. По предположению индукции

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q = \left\|(x')^{(k-1)}\right\|_q \le \frac{\left\|\varphi_{(l-1)-(k-1)}\right\|_q}{E_0(\varphi_{l-1})_{\overline{p}}^{\alpha(\overline{p})}} \|x'\|_{\overline{p}}^{\alpha(\overline{p})} \left\|x^{(l)}\right\|_\infty^{1-\alpha(\overline{p})}, \tag{18}$$

где $\alpha(\overline{p}) = \min\left\{1 - \frac{k-1}{l-1}; \frac{l-k+1/q}{l-1+1/\overline{p}}\right\}$. Теперь к множителю $\|x'\|_{\overline{p}}$ в правой части (18) применим доказанное неравенство (5) при $k = 1$, $q = \overline{p}$ и $r = l$. Тогда $\alpha = 1 - 1/l$ и

$$\|x'\|_{\overline{p}} \le \frac{\|\varphi_{l-1}\|_{\overline{p}}}{E_0(\varphi_l)_p^{1-1/l}} \|x\|_p^{1-1/l} \left\|x^{(l)}\right\|_\infty^{1/l}. \tag{19}$$

Поскольку $\overline{p} \ge 1$ по условию, то $\|\varphi_{l-1}\|_{\overline{p}} = E_0(\varphi_{l-1})_{\overline{p}}$. Поэтому из (18) и (19) следует

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{l-k}\|_q}{E_0(\varphi_{l-1})_{\overline{p}}^{\alpha(\overline{p})}} \left( \frac{\|\varphi_{l-1}\|_{\overline{p}}}{E_0(\varphi_l)_p^{1-1/l}} \|x\|_p^{1-1/l} \left\|x^{(l)}\right\|_\infty^{1/l} \right)^{\alpha(\overline{p})} = \left\|x^{(l)}\right\|_\infty^{1-\alpha(\overline{p})} =$$

$$= \frac{\|\varphi_{l-k}\|_q}{E_0(\varphi_l)_p^{\alpha(\overline{p})(1-1/l)}} \|x\|_p^{\alpha(\overline{p})(1-1/l)} \left\|x^{(l)}\right\|_\infty^{1-\alpha(\overline{p})(1-1/l)}.$$

Осталось заметить, что

$$\alpha(\overline{p})\left(1-\frac{1}{l}\right) = \min\left\{1-\frac{k-1}{l-1}; 1-\frac{l-k+1/q}{l-1+(l-1)/pl}\right\} = \left(1-\frac{1}{l}\right) =$$

$$= \min\left\{1-\frac{k}{l}; 1-\frac{l-k+1/q}{l+1/p}\right\},$$

и неравенства (5) полностью доказаны.

*Доказательство теоремы* **1.** Как видно из формулировки леммы 2, применение метода „локального сравнения" связано с необходимостью специального продолжения на всю ось сужения функции на каждый интервал монотонности. В случае малой гладкости $r = 2$ и $r = 3$ такое продолжение возможно для любой функции $x \in L_\infty^r$. А именно, как показано в [9], нужно каждую из функций $(x_j)$ продолжить на $\left[\beta_{j+1}, 2\beta_{j+1} - \beta_j\right]$ четным образом относительно точки $\beta_{j+1}$, и далее на всю ось с периодом $2\left(\beta_{j+1} - \beta_j\right)$. Отсюда следует неравенство (3).

Отметим еще, что из анализа в [9] случая равенства в неравенствах леммы 1, а также из доказательства леммы 2 видно, что (3) превращается в равенство только для функций вида $x(t) = a(\varphi_r(t+t_0)) - c_p$, где $a, t, t_0 \in \mathbb{R}$, если $q > p/(1-k/r)$, и для функций $x(t) = a(\varphi_r(nt+t_0)) - c_p$ при любом $n \in \mathbb{N}$, если $q \le p/(1-k/r)$, где $c_p$ — константа наилучшего $L_p$-приближения функции $\varphi_r$. Напомним, что при $p \ge 1$ $c_p = 0$.

Теорема 1 доказана.

**3. Неравенства, учитывающие число перемен знака производных.** Пусть $q \in [1, p/(1-k/r))$. Тогда неравенство (5) доказано нами с максимально возможным показателем $\alpha = \alpha_{\mathrm{cr}} := \min\left\{1-\frac{k}{r}; \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right\} = 1-\frac{k}{r}$.

Покажем, что для этих значений $q$ справедливо неравенство типа (5) с показателем $\alpha > \alpha_{\mathrm{cr}}$, а именно с показателем $\alpha = \frac{r-k+1/q}{r+1/p}$, если учесть индивидуальные свойства функции $x$.

**Теорема 2.** *При* $r = 2$ *или* $r = 3$, $k = 1, \ldots, r-1$, $p \in [1-k/r, \infty]$, $q \in [1, p/(1-k/r))$. *Тогда для любой функции* $x \in L_\infty^r$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \left( \frac{\nu\left(x^{(k)}\right)}{2} \right)^{1/q - \alpha/p} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{E_0(\varphi_r)_p^{\alpha}} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty}^{1-\alpha}, \tag{20}$$

*где* $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$. *Неравенство* (20) *обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\left(\varphi_r(nt+t_0) - c_p\right)$, *где* $a, t_0 \in \mathbb{R}$, $c_p$ — *константа наилучшего* $L_p$-*приближения функции* $\varphi_r$, *при всех* $n \in \mathbb{N}$.

А. А. Лигун [11] впервые доказал неравенства такого типа и использовал их в экстремальных задачах теории функций. Некоторые другие неравенства типа (20) анонсированы в [12].

Теорема 2 является следствием следующего аналога леммы 2.

**Лемма 3.** *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда в случае* $q \in [1, p/(1-k/r))$ *для функции* $x$ *справедливо неравенство* (20).

***Доказательство леммы* 3.** Докажем сначала (20) в случае $k = 1$. Поскольку соотношения (6), (7) из доказательства леммы 3 справедливы при любом $\alpha > 0$, достаточно доказать, что при $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$ $B \le \left(\dfrac{\nu(x')}{2}\right)^{1/q-\alpha/p}$.

Используем тот факт, что функция $\Phi_u(p) := \left( \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n} |u_k|^p \right)^{1/p}$ с ростом $p$ возрастает. Поскольку по условию $q < pr/(r-1)$, то

$$\left( \frac{1}{\nu(x')} \sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(q(r-1)+1)} \right)^{1/(q(r-1)+1)} \le \left( \frac{1}{\nu(x')} \sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(rp+1)} \right)^{1/(rp+1)}. \tag{21}$$

Применим (21) для оценки числителя в (7) и учтем, что $\dfrac{q(r-1)+1}{q(rp+1)} = \dfrac{\alpha}{p}$:

$$B = 2^{\alpha/p-1/q} \frac{(\nu(x'))^{1/q} \left( \frac{1}{\nu(x')} \sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(q(r-1)+1)} \right)^{(q(r-1)+1)/q(q(r-1)+1)}}{\left( \sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(rp+1)} \right)^{\alpha/p}} \le$$

$$\le 2^{\alpha/p-1/q} (\nu(x'))^{1/q} \frac{\left( \frac{1}{\nu(x')} \sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(rp+1)} \right)^{(q(r-1)+1)/q(rp+1)}}{\left( \sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(rp+1)} \right)^{\alpha/p}} =$$

$$= 2^{\alpha/p-1/q} \left(\nu(x')\right)^{1/q-(q(r-1)+1)/q(rp+1)} \left( \sum_{j=1}^{\nu(x')} \lambda_j^{-(rp+1)} \right)^{(q(r-1)+1)/q(rp+1)-\alpha/p} =$$

$$= \left( \frac{\nu(x')}{2} \right)^{1/q-\alpha/p}.$$

При $r \in \mathbb{N}$, $k = 1$ лемма 3 доказана.

Пусть теперь $k > 1$. Обозначим $\overline{p} := pr/(r-k+1)$ и применим доказанное неравенство (20) для оценки первой производной к функции $x^{(k-1)}$ при $p = \overline{p}$ и $\alpha(\overline{p}) = \dfrac{r-k+1/q}{r-k+1+1/\overline{p}}$:

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q = \left\| \left( x^{(k-1)} \right)' \right\|_q \le$$

$$\le \left( \frac{\nu\left(x^{(k)}\right)}{2} \right)^{1/q - \alpha(\bar{p})/\bar{p}} \frac{\left\| \varphi_{(r-k+1)-1} \right\|_q}{\left\| \varphi_{r-k+1} \right\|_{\bar{p}}^{\alpha(\bar{p})}} \left\| x^{(k-1)} \right\|_{\bar{p}}^{\alpha(\bar{p})} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha(\bar{p})}.$$

Для оценки $\left\| x^{(k-1)} \right\|_{\bar{p}}$ применим (5):

$$\left\| x^{(k-1)} \right\|_{\bar{p}} \le \frac{\left\| \varphi_{r-k+1} \right\|_{\bar{p}}}{E_0(\varphi_r)_p^{\alpha_1}} \| x \|_p^{\alpha_1} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha_1},$$

где $\alpha_1 = 1 - (k-1)/r$. В результате получим

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \left( \frac{\nu\left(x^{(k)}\right)}{2} \right)^{1/q - \alpha(\bar{p})/\bar{p}} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{E_0(\varphi_r)_p^{\alpha_1\alpha(\bar{p})}} \| x \|_p^{\alpha_1\alpha(\bar{p})} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha_1\alpha(\bar{p})}, \qquad (22)$$

где

$$\frac{\alpha(\bar{p})}{\bar{p}} = \frac{r-k+1/q}{\bar{p}(r-k+1)+1} = \frac{r-k+1/q}{pr+1} = \frac{\alpha}{p},$$

$$\alpha_1\alpha(\bar{p}) = \left(1 - \frac{k-1}{r}\right)\frac{r-k+1/q}{r-k+1+1/\bar{p}} =$$

$$= \frac{r-k+1}{r}\frac{r-k+1/q}{r-k+1+(r-k+1)/pr} = \frac{1}{r}\frac{r-k+1/q}{1+1/pr} = \frac{r-k+1/q}{r+1/p} = \alpha.$$

Таким образом, (22) совпадает с (20) и лемма 3 доказана.


1. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функции и ее производных в метриках $L_p$ // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 1. – С. 291–298.
2. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Там же. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21–32.
3. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Колмогоров А. Н. Избранные труды . Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – С. 387–390.
4. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences // Lect. Notes Math. – 1992. – **1536**. – 150 p.
5. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44–66.
6. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // East J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351–376.
7. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Landau – Kolmogorov – Nagy type // ICM 1998. Int. Congr. Math. (Berlin, August 18 – 27, 1998): Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. – 1998. – P. 115–116.
8. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 11–14.
9. *Габушин В. Н.* Некоторые неравенства между производными функций // Методы регуляризации неустойчивых задач: Тр. ИММ УНЦ АН СССР. – 1976. – Вып. 23. – С. 20 – 26.
10. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
11. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385–391.
12. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен знака производных // Доп. НАН України. – 1998. – № 8. – С. 12–16.


Получено 10.12.99