УДК 517.956

Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We establish conditions of the one-valued solvability of a boundary-value problem with data belonging to the entire boundary of a cylindrical domain $D \subset \mathbb{R}^{p+1}$ for a weakly nonlinear hyperbolic equation of order $2n$, $n > (3p+1)/2$, and with coefficients varying in space coordinates. The investigation of this problem is associated with the problem of small denominators.

Встановлено умови однозначної розв'язності крайової задачі з даними на всій границі циліндричної області $D \subset \mathbb{R}^{p+1}$ для слабконелінійного гіперболічного рівняння порядку $2n$, $n > (3p+1)/2$, зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Дослідження задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Введемо такі позначення: $K_T = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t, \tau \le T\}$; $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0,T),\ x \in G \subset \mathbb{R}^p\}$; $C^r(\overline{D})$ та $C^{(0,m)}(\overline{D})$ — банахові простори функцій $v(t,x)$ з нормами

$$\|v\|_{C^r(\overline{D})} = \sum_{|s^*| \le r} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^{|s^*|} v(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|, \quad \|v\|_{C^{(0,m)}(\overline{D})} = \sum_{|s| \le m} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^{|s|} v(t,x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|$$

відповідно;

$$\overline{S}(v,r) = \left\{ u \in C^{2n}(\overline{D}) : \|u - v\|_{C^{2n}(\overline{D})} \le r \right\}; \quad D_1(v) = \left\{ (t,x,u) : (t,x) \in D,\ u \in \overline{S}(v,r) \right\};$$

$C^{j,\nu}$ — клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, j-ті похідні яких задовольняють в $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν, $0 < \nu < 1$; $A^{j,\nu}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$.

Задачі з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь, взагалі, є умовно коректними; а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1 – 6] та бібліографію в [3]). В даній роботі, яка є продовженням і розвитком роботи [6], досліджено однозначну розв'язність задачі з крайовими умовами типу умов Діріхле для слабконелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами в циліндричній області.

1. В області D розглядається задача

$$M[u] \equiv \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j} L^{n-j} u(t,x) = f(t,x) + \varepsilon \Phi(t,x,u(t,x)), \quad (1)$$

$$b_l(u) \equiv \left. \frac{\partial^{2l} u}{\partial t^{2l}} \right|_{t=0} = 0, \quad b_{n+l}(u) \equiv \left. \frac{\partial^{2l} u}{\partial t^{2l}} \right|_{t=T} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad (2)$$

$$L^q u(t,x)|_{\partial G} = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1, \quad (3)$$

де ε, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, оператор M — строго гіперболічний за Петровським в області D; функція $\Phi(t, x, u)$ визначена і неперервна за змінною t та досить гладка по x, u в області $D_1(u^0)$, де $u^0 \equiv u^0(t, x)$ — розв'язок задачі з умовами (2), (3) для лінійного рівняння

$$M[u] = f(t, x); \tag{1'}$$

$L \equiv \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x)$ — самоспряжений еліптичний в області G диференціальний вираз із дійснозначними коефіцієнтами, $p_{ij}(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq \geq 0$; $L^q(u) = L(L^{q-1}u)$. Нехай

$$\overline{G} \in A^{2n,\nu}, \quad q(x) \in C^{2n-2,\nu}, \quad p_{ij}(x) \in C^{2n-1,\nu}, \quad i, j = 1, \ldots, p. \tag{4}$$

Задача на власні значення

$$LX(x) = -\lambda X(x), \quad X(x)|_{\partial G} = 0 \tag{5}$$

має повну ортонормовану в просторі $L_2(G)$ систему власних функцій $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$, які за умов (4) належать класу $C^{2n}(\overline{G})$, а всі власні числа λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачі (5), множину яких позначимо через Λ, є різними та додатними, при цьому [7, 8]

$$C_0 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq C_1 k^{2/p}, \quad C_0 < C_1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$\max_{x \in \overline{G}} \left| \frac{\partial^{|q|} X_k(x)}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}} \right| \leq C_2 \lambda_k^{p/4 + |q|/2}, \quad |q| = 0, 1, \ldots, 2n; \tag{7}$$

тут і надалі C_j, $j = 0, 1, \ldots, 5$, — додатні сталі, не залежні від k.

2. Розглянемо спочатку незбурену (коли $\varepsilon = 0$) задачу (1′), (2), (3).

Нехай функція $f(t, x)$ зображається рядом

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \quad f_k(t) = \int_G f(t, x) X_k(x)\, dx. \tag{8}$$

Розв'язок задачі (1′), (2), (3) шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{9}$$

кожний член якого задовольняє крайові умови (3). Підставляючи ряди (8), (9) у рівняння (1′) та умови (2), (3), отримуємо, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, є розв'язком такої крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (-\lambda_k)^{n-j} u_k^{(2j)}(t) = f_k(t), \tag{10}$$

$$u_k^{2l}(0) = u_k^{2l}(T) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Позначимо через $\mu_1, \ldots, \mu_n$ додатні корені рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \mu^{2j} = 0,$$

які внаслідок строгої гіперболічності оператора M є дійсними та різними. Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ однорідне рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(-\lambda_k)^{n-j} u_k^{2j} = 0 \tag{10'}$$

має фундаментальну систему розв'язків

$$u_{kq}(t) = \exp(\gamma_q t), \quad u_{k,n+q}(t) = \exp(-\gamma_q t), \quad q = 1, \ldots, n,$$

де $\gamma_q \equiv \gamma_q(\lambda_k) = i\lambda_k^{1/2}\mu_q$, $q = 1, \ldots, n$, а характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k) = \det \| b_{l-1}(u_{kq}) \|_{l,q=1}^{2n}$ задачі (10), (11) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = 2^n \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sh}(-\gamma_j(k)T) \prod_{1 \le r < s \le n} (\gamma_s^2 - \gamma_r^2)^2.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1′), (2), (3) *у просторі* $C^{2n}(\overline{D})$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \quad 1 - \exp(2i\lambda_k^{1/2}\mu_q T) \neq 0, \quad q = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо $1 - \exp(2i\lambda_k^{1/2}\mu_q T) = 0$ при деякому $\lambda_{\overline{k}}$, то $\Delta(\lambda_{\overline{k}}) = 0$, і однорідна задача, що відповідає задачі (1′), (2), (3), має нетривіальні розв'язки вигляду $\overline{u}(t,x) = u_{\overline{k}}(t) X_{\overline{k}}(x)$, де $u_{\overline{k}}(t)$ — розв'язок задачі (10′), (11) при $\lambda_k = \lambda_{\overline{k}}$. Тому розв'язок задачі (1′), (2), (3), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(t,x)$ і $u_2(t,x)$ задачі (1′), (2), (3) із простору $C^{2n}(\overline{D})$. Тоді функція $\overline{u} = u_1 - u_2 \in C^{2n}(\overline{D})$ є розв'язком однорідної задачі, що відповідає задачі (1′), (2), (3), і разом з функціями $M(\overline{u})$ та $b_j(\overline{u})$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, розвивається в ряд Фур'є за системою функцій $\{X_k(x)\}$; причому ряди для функцій $M(\overline{u})$, $b_j(\overline{u})$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, збігаються з рядами, отриманими формальним застосуванням операторів M та b_j, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, до ряду функції $\overline{u}(t,x)$. Із рівностей Парсеваля для функцій $M(\overline{u})$ та $b_j(\overline{u})$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, випливає, що кожен із коефіцієнтів $\overline{u}_k(t)$ розвинення функції $\overline{u}(t,x)$ в ряд Фур'є є розв'язком однорідної задачі (10′), (11). Оскільки $\Delta(\lambda_k) \neq 0$ для всіх $\lambda_k \in \Lambda$, то всі коефіцієнти $\overline{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, тотожно рівні нулю. Із неперервності $\overline{u}(t,x)$ в D та з рівності Парсеваля для функції $\overline{u}(t,x)$ випливає $\overline{u}(t,x) \equiv 0$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$.

Зауваження. Умова (12) справджується тоді і тільки тоді, коли всі числа $\lambda_k^{1/2}\mu_q T / \pi$, $q = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{N}$, не є цілими.

Нехай виконуються умови (12). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (10′), (11), за допомогою якої розв'язок задачі (10), (11) зображається у вигляді

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

У квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = \frac{i}{\lambda_k^{n-1/2}} \left(\operatorname{sgn}(t-\tau) \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}(\gamma_j(\tau - t))}{2\mu_j \prod_{r=1, r\neq j}^{n} (\mu_r^2 - \mu_j^2)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s,j,r=1}^{n} \frac{(-1)^s \mu_r^{2s-3} S_{n-s}^{(j)} (\operatorname{sh}(\gamma_j(t-T))\operatorname{sh}(\gamma_r \tau) + \operatorname{sh}(\gamma_r(T-\tau))\operatorname{sh}(\gamma_j t))}{\prod_{p=1, p\neq j}^{n} (\mu_p^2 - \mu_j^2) \prod_{p=1, p\neq r}^{n} (\mu_p^2 - \mu_r^2) \operatorname{sh}(\gamma_j T)} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

де $S_{n-s}^{(j)}$ — сума всіх можливих добутків елементів $\mu_1^2, \ldots, \mu_{j-1}^2, \mu_{j+1}^2, \ldots, \mu_n^2$, взятих в кількості $n-s$ в кожному добутку, $S_0^{(j)} \equiv 1$.

На стороні $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата K_T функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, довизначуємо за неперервністю справа (зліва).

На підставі формул (9), (13) розв'язок задачі (1′), (2), (3) формально зображається рядом

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\, X_k(x), \tag{15}$$

який, взагалі, є розбіжним, тому що модулі виразів $\operatorname{sh}(i\lambda_k^{1/2}\mu_q T)$, $q = 1, \ldots, n$, що входять знаменниками у формули (14), будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини $\lambda_k \in \Lambda$. Тому питання про існування розв'язку задачі (1′), (2), (3) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (12) *і існують додатні сталі* m *та* ν *такі, що для всіх значень* $\lambda_k \in \Lambda$ *справджуються нерівності*

$$\left|\operatorname{sh}(i\lambda_k^{1/2}\mu_q T)\right| \geq m\lambda_k^{-\nu}, \quad q = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Якщо $f(t,x) \in C^{(0,2h_0)}(\overline{D})$, *де* $h_0 = 1 + [3p/4 + \nu + 1/2]$, *і для всіх* $t \in [0,T]$ $L^j f(t,x)|_{\partial G} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, h_0 - 1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1′), (2), (3) *з простору* $C^{2n}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від* $f(t,x)$.

Доведення. На підставі формули (14) отримуємо

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\right| \leq C_3 \lambda_k^{q/2+\nu-n+1/2} \max_{0\le t\le T}|f_k(t)|, \quad q = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{17}$$

За умов теореми справджується нерівність

$$\max_{0\le t\le T}|f_k(t)| \leq C_4 \lambda_k^{-h_0} \bar{f}, \tag{18}$$

де $\bar{f} = \|f(t,x)\|_{C^{(0,2h_0)}(\overline{D})}$. Із формули (15), враховуючи оцінки (6), (7), (17), (18), отримуємо

$$\left\|u^0(t,x)\right\|_{C^{2n}(\overline{D})} \leq \bar{f}\omega,$$

де

$$\omega = C_5 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\delta}, \quad 0 < \delta < 1/2p. \tag{19}$$

Із збіжності ряду (19) випливає доведення теореми.

Лема. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та для довільних фіксованих* a_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *нерівності* (16) *виконуються при* $\nu > p/2$ *для всіх* $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення здійснюється за схемою доведення леми 2.4 з [3] (гл. 1); при цьому використовується нерівність

$$\left|\operatorname{sh}(i\lambda_k^{1/2}\mu_r T)\right| \geq 4\left|T\lambda_k^{1/2}\mu_r/\pi - m_r(k)\right|, \quad r = 1, \ldots, n,$$

де $m_r(k)$ — ціле число, яке справджує нерівність $\left|T\lambda_k^{1/2}\mu_r/\pi - m_r(k)\right| \leq 1/2$.

3. Розглянемо задачу (1) – (3), коли $\varepsilon \neq 0$.

Якщо в області $\overline{D} \times \overline{D}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) X_k(\xi) X_k(x) \tag{20}$$

є рівномірно збіжним і $K(t, x, \tau, \xi)$ — сума цього ряду, то задача (1) – (3) зводиться до еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon \int_D K(t,x,\tau,\xi) \Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\tau\, d\xi. \tag{21}$$

Із оцінок (6), (7), (17) та леми випливає, що ряд (20) збігається рівномірно в області $\overline{D} \times \overline{D}$ для майже всіх чисел T, якщо $n > 3p/2 + 1/2$.

Позначимо через A_v нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\overline{S}(u^0, r)$ формулою

$$A_v[u(t,x)] \equiv v(t,x) + \varepsilon \int_D K(t,x,\tau,\xi) \Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\tau\, d\xi. \tag{22}$$

Тоді рівняння (21) запишеться у вигляді

$$u(t,x) = A_{u^0}[u(t,x)].$$

Позначимо $\varepsilon_1 = \min(r/\Psi, 1/\Psi)$, де

$$\Psi = (2n+1) T \overline{\Phi} (1 + r + \omega \bar{f})^{2h_0} C_1^{-p/2} C_2 C_3 C_4 C_5^{-1} \omega,$$

$$\overline{\Phi} = \max_{0 \le |s^*| \le 2h_0+1} \max_{D_1(u^0)} \left| \frac{\partial^{|s^*|} \Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|.$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2 і функція $\Phi(t, x, u)$ неперервна за змінною t і має обмежені похідні за змінними x, u до порядку $2h_0$ включно, причому при довільних $t \in [0, T]$ і $u \in \overline{S}(u^0, r)$ справджуються умови*

$$\left. \frac{\partial^{|q|} \Phi(t,x,u)}{\partial u^{q_0} \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}} \right|_{\partial G} = 0, \quad |q| = 0, 1, \ldots, 2h_0 - 1. \tag{23}$$

Якщо $n > (3p+1)/2$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T і для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3), який належить кулі $\overline{S}(u^0, r) \subset C^{2n}(D)$ і неперервно залежить від $f(t, x)$.

Доведення. Позначимо через V сукупність функцій $v \in C^{2n}(\overline{D})$, для яких

$$\| v - u^0 \|_{C^{2n}(\overline{D})} \le r - |\varepsilon| \Psi = \kappa.$$

Покажемо, що для довільної функції $v \in V$ оператор A_v переводить кулю $\overline{S}(u^0, r)$ в себе. На підставі формули

$$\Phi_k(t, \{u_m(t)\}) = \int_G \Phi\left(t, x, \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) X_m(x) \right) X_k(x)\, dx,$$

враховуючи (23), одержуємо

$$\max_{0 \le t \le T} |\Phi_k(t, \{u_m(t)\})| \le C_4 \overline{\Phi} (1 + r + \bar{f}\omega)^{2h_0} \lambda_k^{-h_0}. \tag{24}$$

За умов теореми, враховуючи (20), (22), оцінки (6), (7), (17), (24) та лему, отримуємо

$$\left\| A_v[u(t,x)] - u^0(t,x) \right\|_{C^{2n}(\overline{D})} \le \left\| v(t,x) - u^0(t,x) \right\|_{C^{2n}(\overline{D})} +$$

$$+ |\varepsilon| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|s^*| \le 2n} \max_{D} \left| \frac{\partial^{|s^*|}}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \int_0^T G_k(t,\tau) \Phi_k(\tau, \{u_m(\tau)\}) \, d\tau \, X_k(x) \right| \le$$

$$\le \kappa + |\varepsilon| (2n+1) T \overline{\Phi} (1 + r + \omega \bar{f})^{2h_0} C_1^{-p/2} C_2 C_3 C_4 C_5^{-1} \omega = \kappa + |\varepsilon| \Psi = r.$$

Покажемо тепер, що для довільної функції $v \in V$ оператор A_v є оператором стиску. Нехай $u_1, u_2 \in \overline{S}(u^0, r)$. Позначимо $\overline{u} = \theta u_1 + (1-\theta) u_2$.

Із формули (22), враховуючи лему, оцінки (6), (7), (17) та застосовуючи формулу Лагранжа про скінченні прирости для функції $\Phi(t, x, u)$, одержуємо, що для майже всіх чисел T справджується оцінка

$$\left\| A_v[u_1(t,x)] - A_v[u_2(t,x)] \right\|_{C^{2n}(\overline{D})} \le$$

$$\le \varepsilon \left\| \int_D \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) \left(\Phi(\tau, \xi, u_1(\tau,\xi)) - \Phi(\tau, \xi, u_2(\tau,\xi)) \right) X_k(\xi) X_k(x) \, d\tau \, d\xi \right\|_{C^{2n}(\overline{D})} \le$$

$$\le \varepsilon \left\| u_1 - u_2 \right\|_{C^{2n}(\overline{D})} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|s|=0}^{2n} \max_{0 \le t \le T} \left| \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) \, d\tau \right| \max_{\overline{G}} \left| \frac{\partial^{|s|-s_0} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| \times$$

$$\times \max_{0 \le t \le T} \left| \int_G \frac{\partial \Phi(\tau, \xi, \overline{u})}{\partial u} X_k(\xi) \, d\xi \right| \le \varepsilon \left\| u_1 - u_2 \right\|_{C^{2n}(\overline{D})} (2n+1) T \overline{\Phi} (1 + r + \omega \bar{f})^{2h_0} \times$$

$$\times C_1^{-p/2} C_2 C_3 C_4 C_5^{-1} \omega \le \varepsilon \left\| u_1 - u_2 \right\|_{C^{2n}(\overline{D})} \Psi.$$

За умов теореми $|\varepsilon| \Psi < 1$, тому A_v є оператором стиску. Неперервність оператора A_v по v є очевидною. Згідно з теоремами 1 і 3 із [9] (розд. 16) рівняння (21), а разом з ним і задача (1) – (3), має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від $f(t,x)$. Теорему доведено.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795 – 802.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
4. *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4. – С. 669 – 678.
5. *Фиголь В. В.* Задача типа Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 17. – С. 10 – 14.
6. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача з даними на всій границі області для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 244 – 249.
7. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 883 – 896.
8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

Одержано 21.12.2000