УДК 519.85

С. В. Яковлев (Ун-т внутренних дел, Харьков),
О. А. Валуйская (Полтав. техн. ун-т)

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЕРШИНАХ ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

We propose an approximate polynomial method, by means of which, with a given accuracy, one can find the extremum of a function on permutation polyhedron with additional linear constraints.

Пропонується наближений поліноміальний метод, за допомогою якого з заданою точністю можна знайти екстремум функції на переставному багатограннику при додаткових лінійних обмеженнях.

В роботах [1 – 3] исследовались вопросы оптимизации выпуклых (в том числе линейных) функций на вершинах перестановочного многогранника [4]. Представляет интерес случай, когда при этом накладываются дополнительные ограничения на принадлежность точек перестановочному многограннику. В настоящей работе рассматривается подход к минимизации линейной функции на перестановочном многограннике с учетом дополнительных линейных ограничений. Вначале предложен подход к оптимизации на симплексах специального вида. Краткое изложение предложенного подхода ранее было приведено в [5]. В дальнейшем удалось обобщить предложенный подход для линейных ограничений общего вида.

1. Постановка задачи. Пример практической задачи. Рассмотрим множество E_k, представляющее собой вершины перестановочного многогранника, порожденного действительными числами $\{g_1, \ldots, g_k\}$. Аналитическое описание этого множества приведено в [3, 4]. Пусть на множестве E_k задана линейная функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i . \tag{1}$$

Требуется найти минимум $f(x)$ при следующих ограничениях:

$$x \in E_k,$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

где a_{ij}, b_i, c_i — заданные действительные числа.

Выделим случай, когда система линейных ограничений (2) представляет собой симплекс специального вида, характеризуемого при $m = k + 1$ коэффициентами

$$a_{k+1,j} = -c_j, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Приведем в качестве примера следующую задачу о распределении ресурсов. Пусть имеем k пронумерованных мест распределения ресурсов и k объектов распределения, которые предполагается в последующем наилучшим образом использовать. Объекту распределения с номером i поставим в соответствие число g_i, характеризующее эффективность последующего использования данного объекта (например, мощность, стоимость или аналогичное свойство). Число g_i будем называть числовой характеристикой объекта распределения с номером i. Таким образом, имеем множество $G = \{g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_k\}$. Зададим возможное распределение ресурсов как перестановку $(g_{j_1}, \ldots, g_{j_i}, \ldots, g_{j_k}) \in \in E_k$, где месту распределения с номером i отведен объект с номером j_i. Введем целевую функцию, как функцию суммарной эффективности последующего использования ресурсов при данном распределении

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i ,$$

где эффективность использования полученного объекта распределения на месте распределения с номером i пропорциональна числовой характеристике данного объекта с постоянным для данного места распределения коэффициентом c_i. Задача оптимизации состоит в нахождении $\max\limits_{x \in E_k} f(x)$.

Введем дополнительные линейные ограничения следующим образом. Пусть затраты по последующей эксплуатации ресурсов рассматриваются по m параметрам (например, стоимость перевозки, оплата электроэнергии, оплата ремонта и т. д.). Затраты по эксплуатации по параметру i не должны в сумме превышать величину b_i и имеют вид

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i,$$

где затраты по эксплуатации полученного объекта на месте распределения с номером j пропорциональны числовой характеристике данного объекта с постоянным для данного места распределения и данного параметра затрат коэффициентом a_{ij}. Таким образом, имеем задачу максимизации линейной функции на перестановочном многограннике с дополнительными линейными ограничениями.

Введем следующие обозначения. Пусть

$$c = (c_1, \ldots, c_k), \quad a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}), \quad C_i = \left\{x : \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \ge b_i\right\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\partial C_i = \left\{x : \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_i\right\}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Обозначим через $d(x, y)$ расстояние между точками x и y, через $d(x, \partial C_j)$ расстояние между точкой x и гиперплоскостью ∂C_j, через $d(X, Y)$ расстояние между множествами X и Y в евклидовой метрике.

2. О нахождении вершины перестановочного многогранника, ближайшей к заданному отрезку. Рассмотрим следующую задачу (назовем ее вспомогательной задачей 1). Для заданного шара пространства R^k и принадлежащего ему отрезка требуется найти такую точку из множества E_k (если она существует), которая лежит внутри шара и является ближайшей к указанному отрезку.

Пусть $B(a, r) = \{x : \|x - a\| \le r\}$ — заданный шар и $L = \{c_t : c_t = c_0 + tc\}$ — отрезок внутри шара, где $c_0 = a - c$, $t \in [0, 2]$ и $\|c\| = r$. Каждому c_t поставим в соответствие точку g_t такую, что $g_t \in E_k \cap B(a, r)$ и достигается

$$\| c_t - g_t \| = \min_{g \in E_k} \| c_t - g \|.$$

Задача оптимизации состоит в нахождении такого минимального параметра

t, для которого существует g_t. Обозначим этот параметр через τ. Тогда c_τ — ортогональная проекция g_τ на L и $f(g_\tau) = f(c_\tau)$.

Отметим следующее основное свойство, которое имеет искомая точка g_τ. Обозначим

$$D = \left\{x : \| x - c_{(\tau - T)/2} \| \le d(c_T, c_\tau)/2\right\}.$$

Тогда множество D не содержит точек g таких, что $g \in E_k \bigcap D$ и $f(g) < < f(g_\tau)$.

Рассмотрим $k(k-1)/2$ гиперплоскостей вида $x_i = x_j$ в R^k. Найдем их точки пересечения с отрезком L и обозначим их через $c_{t_{ij}}$, где t_{ij} — параметры отрезка L. Выделим только те значения t_{ij}, которые принадлежат отрезку [0, 2]. Тогда соответствующие им $c_{t_{ij}}$ определяют разбиение отрезка L на интервалы, которое имеет следующее свойство: для всех t из какого-либо интервала разбиения точка g_t является общей. Таким образом, вместо континуального параметра $t \in [0, 2]$ достаточно рассматривать по одной точке из каждого интервала разбиения отрезка L гиперплоскостями $x_i = x_j$, причем точек разбиения отрезка L будет не более, чем $k(k-1)/2$.

3. Линейная оптимизация на однопараметрическом конусе специального вида. Рассмотрим следующую задачу (назовем ее вспомогательной задачей 2). Пусть множество Z, зависящее от параметра $t \in [0, T]$, является k-мерным аналогом конуса: $Z = \bigcup\limits_t B(a_t, r_t)$. Для каждого шара $B(a_t, r_t)$ решим вспомогательную задачу 1. Имеем совокупность решений $g_{t,\tau}$ оптимизационной задачи, зависящую от параметра $t \in [0, T]$. Тогда задача оптимизации на Z состоит в нахождении

$$g_{\min} = \operatorname*{arg\,min}_{g_{t,\tau}} \left(f(g_{t,\tau}) \right).$$

Пусть $Z = \{x : \| tb + x_0 - x \| \le tr\}$, где $b, x, x_0 \in R^k$, $r \ge 0$, $t \in [0, T]$. Нетрудно показать, что это множество может быть представимо также в виде

$$Z = \bigcup_t B(a_t, r_t), \qquad a_t = tb + x_0, \qquad r_t = tr.$$

Отметим следующее свойство точки $g_{\min}$. Рассмотрим a_t такие, что $f(a_t) \le f(g_{\min})$. Для них определим $D_t = \{x : \|x - a_t\| \le d(a_t, P)\}$, где $P = \{x : f(x) = f(g_{\min})\}$. Тогда в D_t нет точек g таких, что $g \in E_k \bigcap D_t$ и $f(g) < < f(g_{\min})$.

Рассмотрим возможность ослабить условие на значение параметра t.

Для каждого шара $B(a_t, r_t)$ решим вспомогательную задачу 1. Тогда для каждого t имеет последовательность $T^t = \{\tau_{ij}^t\}$ разбиений отрезка [0, 2], где τ_{ij}^t — параметр точки пересечения гиперплоскости $x_i = x_j$ и отрезка $L_t = [a_t - - r_t c/\| c \|, \ a_t + r_t c/\| c \|]$, который имеет вид

$$\tau_{ij}^t = \left(\frac{x_{0j} - x_{0i}}{t} + (b_j - b_i) - (c_j - c_i) \right) \Big/ (c_i - c_j).$$

Выделим промежутки изменения t, для которых последовательность T^t упорядочена по возрастанию по совпадающим номерам i, j. В этом случае для рассматриваемого промежутка изменения t множества $\{g_t\}$ совпадают. Ясно, что условие $\tau_{mn}^t = \tau_{ij}^t$ задает разбиение отрезка $[0, T]$ и имеет вид

$$t\left\{\frac{b_j - b_i}{c_i - c_j} - \frac{b_n - b_m}{c_m - c_n}\right\} = \frac{x_{0n} - x_{0m}}{c_m - c_n} - \frac{x_{0j} - x_{0i}}{c_i - c_j}.$$

Таким образом, имеем разбиение отрезка $[0, T]$ на не больше чем $(k+1)k(k-1)(k-2)/8$ интервалов, соответствующих числу условий вида $\tau_{mn}^t = \tau_{ij}^t$. На каждом из интервалов разбиения отрезка $[0, T]$ для средней точки интервала находим решение вспомогательной задачи 1, которое и является решением рассматриваемой в данном пункте задачи для всего интервала разбиения отрезка $[0, T]$.

4. Линейная оптимизация на многопараметрическом конусе специального вида. Рассмотрим обобщение вспомогательной задачи 2 (назовем ее вспомогательной задачей 3). Пусть множество Z зависит от многомерного параметра ν, т. е.

$$Z = \{x : \|a_\nu - x\| \le r_\nu\}, \quad \text{где} \quad \nu = (t, t_1, \ldots, t_i), \quad a_\nu = x_0 + t\sum_{j=1}^{i} t_j e_j,$$

$$r_\nu = t\sum_{j=1}^{i} t_j r_j, \quad e_j \in R^k, \quad x_0 \in R^k, \quad r_j \ge 0, \quad t \in [0, T], \quad \sum_{j=1}^{i} t_j = 1, \quad t_j \ge 0.$$

Поскольку $Z = \bigcup\limits_{\nu} B(a_\nu, r_\nu)$, то для каждого $B(a_\nu, r_\nu)$ решим вспомогательную задачу 1. При этом получаем совокупность решений $g_{\nu,\tau}$, зависящую от параметра ν.

Обозначим

$$g_{\min} = \underset{g_{\nu,\tau}}{\arg\min}\left(f(g_{\nu,\tau})\right).$$

Отметим следующее свойство точки $g_{\min}$. Рассмотрим a_ν такие, что $f(a_\nu) \le f(g_{\min})$. Для них определим $D_\nu = \{x : \|x - a_\nu\| \le d(a_\nu, P)\}$, где $P = \{x : f(x) = f(g_{\min})\}$, тогда в D_ν нет точек g таких, что $g \in E_k \cap D_\nu$ и $f(g) < f(g_{\min})$.

Рассмотрим вопрос о мощности множества значений параметра ν.

Для каждого шара $B(a_\nu, r_\nu)$ решим вспомогательную задачу 1. Тогда для каждого значения параметра ν имеем последовательность $T^\nu = \{\tau_{ij}^\nu\}$-разбиений отрезка [0, 2], где τ_{ij}^ν — параметр точки пересечения гиперплоскости $x_i = x_j$ и отрезка $L_\nu = [a_\nu - r_\nu c/\|c\|, a_\nu + r_\nu c/\|c\|]$, который имеет вид

$$\tau_{ij}^\nu = \frac{\|c\|\left((x_{0j} - x_{0i})/t + t\sum\limits_{p=1}^{i} t_p(e_{jp} - e_{ip}) - t\sum\limits_{p=1}^{i} t_p r_p(c_j - c_i)/\|c\|\right)}{t\sum\limits_{p=1}^{i} t_p r_p(c_i - c_j)}.$$

Обозначим $z_p = t t_p$. Условие $\tau_{mn}^\nu = \tau_{ij}^\nu$ принимает вид

$$\sum_{p=1}^{i} z_p\left\{\frac{e_{jp} - e_{ip}}{c_i - c_j} - \frac{e_{np} - e_{mp}}{c_m - c_n}\right\} = \frac{x_{0n} - x_{0m}}{c_m - c_n} - \frac{x_{0j} - x_{0i}}{c_i - c_j}. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение

$$G = \left\{a_\nu : a_\nu = x_0 + t\sum_{j=1}^{i} t_j e_j,\ t \in [0, T],\ \sum_{j=1}^{i} t_j = 1,\ t_j \geq 0\right\}.$$

Условия (4) задают на G гиперплоскости p_{ijnm}. Разбиение G гиперплоскостями p_{ijnm} имеет такое основное свойство: для всех a_ν из одного многогранника разбиения множества $\{g_{\nu,\tau}\}$ совпадают.

Оценим число многогранников в разбиении G. Для этого найдем оценку числа вершин многогранников в этом разбиении G. Обозначим $g = (k+1)k(k-1)(k-2)/8$. Поскольку множество G имеет размерность $i+1$, то вершины определяются системами из $i+1$ уравнений гиперплоскостей p_{ijnm}. Таких систем будет

$$C_g^{i+1} \leq g^{i+1}/(i+1)! \leq ((k+1)k(k-1)(k-2)/8)^{(i+1)}/(i+1)!.$$

Для найденных вершин проверим условия: $t \in [0, T]$, $\sum_{j=1}^{i} t_j = 1$, $t_j \geq 0$.

Рассмотрим на сколько многогранников с этими вершинами может быть разбито G. Так как $s = C_g^{i+1}$ — оценка сверху для числа вершин многогранников в разбиении G и множество G имеет размерность $i+1$, то симплекс на G имеет $i+2$ вершины. Тогда различных симплексов из s вершин может быть не больше C_s^{i+2}. Поскольку любой многогранник M представим в виде $M = \bigcup_{n=1}^{N} M_n$, где M_n — симплексы, то в разбиении G многогранников может быть не больше чем различных симплексов, натянутых на s вершин, т. е. C_s^{i+2}.

5. Линейная оптимизация на вершинах перестановочного многогранника, принадлежащих симплексу специального вида. Вернемся к рассмотрению задачи линейной оптимизации на $E_k \cap C$, где C — симплекс вида (3). Пусть $x_0 = \arg\min_{x \in C}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\right)$. Наложим на C два условия: 1) $\|a_i\| = 1$; 2) $b_i > 0$.

Предлагается следующий поэтапный метод решения задачи линейной оптимизации на $E_k \cap C$.

Рассмотрим первый этап предлагаемого метода. Определим вектор $e = (e_1, \ldots, e_k)$, $\|e\| = 1$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} e_j = r > 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда $r \leq 1$. Введем в рассмотрение однопараметрическое множество точек $d_t = x_0 + te$, где $t \geq 0$. Построим множество

$$Z_t = \{x : \|x - d_t\| \leq tr\},$$

которое является однопараметрическим конусом, вписанным в C.

Отметим следующие свойства конуса Z_t: а) $d_t \in C$; б) $Z_t \subset C$; в) для точек $x_t^i = d_t - rta_i$, $t \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, имеем $x_t^i \in \partial C$ и $x_t^i \in \partial Z_t$.

Для конуса Z_t решим вспомогательную задачу 2. Обозначим $C^1 = Z_t$. Получаем

$$g_{\min} = \arg\min_{x \in E_k \cap C^1} f(x).$$

На втором этапе метода введем в рассмотрение k семейств гиперплоскостей, где i-е семейство имеет вид

$$\{\{\partial C_j\},\ j=1,\dots,k,\ j\neq i\}. \tag{5}$$

Строим k конусов Z^i_{t,t_1} следующим образом. Для каждого из k семейств (5) выберем нормальный вектор e_i, лежащий в $\bigcap\limits_{j\neq i}\partial C_j$, и ориентируем его так, чтобы точка x_0+e_i лежала в C. Образуем множество векторов $e^i_{t,t_1}=t(t_1 e+(1-t_1)e_i)$ и множество точек $d^i_{t,t_1}=e^i_{t,t_1}+x_0$. Определим конус

$$Z^i_{t,t_1}=\{x: \|x-d^i_{t,t_1}\|\le tt_1 r,\ t\ge 0,\ 0\le t_1\le T_i<1\},$$

где T_i — такое число, что $d^i_{t,T_i}\in\partial C^1$.

Для конуса Z^i_{t,t_1} выполняются следующие свойства, аналогичные свойствам а) – в) для конуса Z_t: а) $d^i_{t,t_1}\in C$; б) $Z^i_{t,t_1}\subset C$; в) для точек $x^{ij}_{t,t_1}=d^i_{t,t_1}-rtt_1a_j$, $t\ge 0$, $t_1\ge 0$, $i\neq j$, имеем $x^{ij}_{t,t_1}\in\partial C$ и $x^{ij}_{t,t_1}\in\partial Z^i_{t,t_1}$.

Для каждого конуса Z^i_{t,t_1} решим вспомогательную задачу 3. Получим множество точек $g^i_{\min}\in E_k\bigcap Z^i_{t,t_1}$. Обозначим $C^2=C^1\bigcup\limits_i Z^i_{t,t_1}$. Выделим из точек $g^i_{\min}$ точку $g_{\min}=\arg\min\limits_i(f(g^i_{\min}))$. Тогда

$$g_{\min}=\mathop{\arg\min}_{x\in E_k\bigcap C^2} f(x).$$

На третьем этапе метода для каждого семейства (5) образуем $k-1$ семейств гиперплоскостей, каждое из которых имеет вид

$$\{\{\partial C_j\},\ j=1,\dots,k,\ j\neq i,n\}. \tag{6}$$

Для каждого образованного семейства (6) строим конус $Z^{i,n}_{t,t_1,t_2}$.

На i-м этапе метода для каждого семейства

$$\{\{\partial C_j\},\ j=1,\dots,k,\ j\notin w=\{j_1,\dots,j_{i-1}\}\}$$

образуем $k-i$ семейств гиперплоскостей вида

$$\{\{\partial C_j\},\ j=1,\dots,k,\ j\notin v=w\cup j_i=\{j_1,\dots,j_{i-1},j_i\}\}. \tag{7}$$

На предыдущем этапе найдено множество векторов $e^w_{t,t_1,\dots,t_{i-1}}$. Добавим к нему нормальный вектор e_{j_i}, лежащий в $\bigcap\limits_{j\notin v}\partial C_j\setminus\partial C_{j_i}$, и ориентируем его так, чтобы точка $x_0+e_{j_i}$ лежала в C. Образуем множество векторов $e^v_{t,t_1,\dots,t_{i-1},t_i}=(1-t_i)e^w_{t,t_1,\dots,t_{i-1}}+tt_ie_{j_i}$ и множество точек $d^v_{t,t_1,\dots,t_{i-1},t_i}=e^v_{t,t_1,\dots,t_{i-1},t_i}+x_0$. Определим конус

$$Z^v_{t,t_1,\dots,t_{i-1},t_i}=\left\{x: \|x-d^v_{t,t_1,\dots,t_{i-1},t_i}\|\le tr\prod_{j=1}^{i}t_j,\ t\ge 0,\ 0\le t_j\le T_v<1\right\},$$

где T_v — такое число, что $d^v_{t,T_v,\dots,T_v,\dots,T_v}\in\partial C^{i-1}$.

Для каждого конуса $Z^{\nu}_{t,t_1,\ldots,t_{i-1},t_i}$ решим вспомогательную задачу 3. Получим множество точек $g^{\nu}_{\min} \in E_k \cap Z^{\nu}_{t,t_1,\ldots,t_{i-1},t_i}$. Выделим из них $g_{\min} = \arg\min_{\nu}\left(f(g^{\nu}_{\min})\right)$. Обозначим $C^i = C^{i-1}\bigcup_{\nu} Z^{\nu}_{t,t_1,\ldots,t_{i-1},t_i}$. Тогда

$$g_{\min} = \arg\min_{x \in E_k \cap C^i} f(x).$$

Заметим, что при решении вспомогательной задачи оптимизации на конусе представляется более эффективным заменить проверку принадлежности вершины перестановочного многогранника рассматриваемому конусу на принадлежность симплексу C.

6. Оценка покрытия множества C множествами C^i. Чтобы установить возможность покрытия множества C множествами C^i, оценим некоторые расстояния. Отметим, что для всех чисел T^{ν} выполняется неравенство

$$T^{\nu} \le \sin^2(\alpha/2),$$

где

$$\alpha = \min_{n \ne j = 1,\ldots,k}\left(\arccos(a_n, a_j)\right).$$

На первом этапе имеем следующее. Пусть $x \in C \setminus Z_t$. Для x выделим такое семейство (5), что

$$d\left(x, \bigcap_{j \ne i} \partial C_j\right) = \min_{n=1,\ldots,k}\left(d\left(x, \bigcap_{j \ne n} \partial C_j\right)\right).$$

После несложных тригонометрических преобразований получим

$$d(x, \partial C_{k+1}) \le tr, \quad d(x, \partial C_j) \le tr(1-\cos(\alpha/2)), \quad j \ne i.$$

На втором этапе для $x \in C \setminus C^2$ выделим семейство (6) такое, что

$$d\left(x, \bigcap_{j \ne i,n} \partial C_j\right) = \min_{m \ne s=1,\ldots,k}\left(d\left(x, \bigcap_{j \ne m,s} \partial C_j\right)\right).$$

Имеем

$$d(x, \partial C_{k+1}) \le tr\sin^2(\alpha/2), \quad d(x, \partial C_j) \le tr(1-\cos(\alpha/2))\sin^2(\alpha/2), \quad j \ne i, n.$$

На i-м этапе для $x \in C \setminus C^i$ выделим семейство (7) такое, что

$$d\left(x, \bigcap_{j \notin \nu} \partial C_j\right) = \min_{u=(u_1,\ldots,u_i),\, u_n \ne u_m = 1,\ldots,k}\left(d\left(x, \bigcap_{j \notin u} \partial C_j\right)\right).$$

Имеем

$$d(x, \partial C_{k+1}) \le tr\left(\sin^2(\alpha/2)\right)^i,$$

$$d(x, \partial C_j) \le tr\left(1-\cos(\alpha/2)\left(\sin^2(\alpha/2)\right)^i, \quad j = 1,\ldots,k, \quad j \notin \nu.\right.$$

Если проведены $k-1$ этапов метода, то полученное решение g_{min} является точным. Если рассмотрены $I < k-1$ этапов, то полученное решение — приближенное. При этом решение принадлежит множеству $C^1 \subset C$, имеющему следующее свойство: для любой точки $x \in C \setminus C^{\mathrm{I}}$ существует точка $y \in \partial C$ такая, что $d(x, y) < h$, где h — точность вычислений. Используя это свойство, по заданному h можно указать необходимое для его достижения число этапов I.

Таким образом, предлагается строить поэтапно конусы, вписанные в симплекс C. На i-м этапе число таких конусов $\prod_{j=0}^{i}(k-j)$. Для каждого конуса Z решаем вспомогательную задачу нахождения $g_{\min} \in E_k \cap Z$. Либо такой точки нет и на следующем этапе C не изменяется, либо уменьшаем требующий рассмотрения симплекс, переопределяя

$$b_{k+1} = -f(g_{\min}).$$

Оценка для такого симплекса C для $d(x, \partial C_j)$ дает возможность оценить I — число этапов для достижения точности вычисления $h(\|x_t^i - d_t\| = tr \le \operatorname{diam} C$, так как $x_t^i,\ d_t \in C)$. Тогда на i-м этапе рассматриваются точки x, для которых существует гиперплоскость ∂C_j такая, что

$$d(x, \partial C_j) \le \left(\sin^2(\alpha/2)\right)^i \operatorname{diam} C.$$

На этапе I, где I — наименьшее целое число такое, что

$$\left(\sin^2(\alpha/2)\right)^I \operatorname{diam} C \le h,$$

достигается требуемая точность вычисления h. Отметим, что в процессе решения оценка для h улучшается за счет уменьшения $\operatorname{diam} C$.

7. Линейная оптимизация на вершинах перестановочного многогранника, принадлежащих произвольному многограннику. До сих пор рассматривался случай линейной оптимизации на $E_k \cap C$, где C — симплекс вида (3). Случай линейной минимизации на множестве $E_k \cap M$, где M — произвольный многогранник вида (2), предлагается сводить к описанной задаче, добавив к условиям (2) условие (3). Покажем, что для любого многогранника M существует симплекс специального вида, содержащий множество $E_k \cap M$. Пусть все числа $\{g_1, \dots, g_k\}$, порождающие множество E_k, положительны (иначе производим необходимый перенос координат). Коэффициенты $\{c_1, \dots, c_k\}$ также положительны (иначе увеличим их, прибавив к целевой функции выражение $\sum_{i=1}^{k} x_i$, постоянное на множестве E_k, умноженное на достаточно большое положительное число). Тогда все точки множества E_k удовлетворяют условиям, являющимся ограничениями вида (3): $x_i \ge 0,\ i = 1, \dots, k,\ \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \le R$, где $R = \left(\sum_{i=1}^{k} g_i^2\right)^{1/2}$ — радиус гиперсферы S вида $\{x : \|x\| = R\}$, которой принадлежит множество E_k. Отметим, что существует бесконечное множество симплексов C вида (3), имеющих свойство $E_k \cap M \subset C$. Для практического решения задач представляется целесообразным рассматривать симплекс C с возможно меньшим значением величины $\operatorname{diam} C$.

Необходимо отметить, что при решении задачи линейной оптимизации на вершинах перестановочного многогранника, принадлежащих произвольному многограннику M, условия вида (2) необходимо учитывать при решении вспомогательных задач оптимизации на конусах, т. е. проверять принадлежность вершины перестановочного многогранника многограннику M.

8. Пример решения модельной задачи. Предложенный метод минимизации линейной функции на перестановках с дополнительными линейными ограничениями был реализован и получены результаты счета для следующих данных: $k = 30$; $c = (0, 1, 2, 5, 4, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29)$; $b = (53.8, 53.8, 53.8, 52.8, 50.8, 48.8, 46.8, 44.8, 42.8, 40.8, 38.8, 36.8, 34.8, 32.8, 30.8, 28.8, 26.8, 24.8, 22.8, 20.8, 18.8, 16.8, 14.8, 12.8, 10.8, 8.8, 6.8, 4.8, 2.8, 26.9)$; $a_{ij} = 1$ для таких пар (i, j) (1, 11), (1, 25), (2, 25), (2, 4), (3, 4), (3, 20), (4, 20), (4, 29), (5, 29), (5, 3), (6, 3), (6, 13), (7, 13), (7, 23), (8, 23), (8, 8), (9, 8), (9, 2), (10, 2), (10, 14), (11, 14), (11, 9), (12, 9), (12, 27), (13, 27), (13, 30), (14, 30), (14, 5), (15, 5), (15, 16), (16, 16), (16, 13), (17, 13), (17, 24), (18, 24), (18, 18), (19, 18), (19, 15), (20, 15), (20, 10), (21, 10), (21, 12), (22, 12), (22, 22), (23, 22), (23, 19), (24, 19), (24, 6), (25, 6), (25, 28), (26, 28), (26, 21), (27, 21), (27, 1), (28, 1), (28, 26), (29, 26), (29, 7), (30, 25) и $a_{ij} = 0$ в остальных случаях. После первого этапа предложенного метода получено минимальное значение на перестановке (7, 26, 1, 21, 28, 6, 19, 22, 12, 10, 15, 18, 24, 13, 16, 5, 30, 27, 9, 14, 2, 8, 23, 13, 3, 29, 20, 4, 25, 11) с точностью 0.09162; после второго этапа получена перестановка с минимальным значением (7, 26, 1, 28, 21, 6, 19, 22, 12, 10, 15, 18, 24, 13, 16, 5, 30, 27, 9, 14, 2, 8, 23, 13, 3, 29, 20, 4, 25, 11) с точностью 0.00705.

1. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 3. – С. 69–72.
2. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Паршин О. Г.* Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в R^k // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 73–77.
3. *Яковлев С. В.* Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1994. – **34**, № 7. – С. 1112–1119.
4. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
5. *Яковлев С. В., Валуйская О. А.* О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учетом линейных ограничений // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1999. – № 11.

Получено 28.01.2000