УДК 519.217

О. Ю. Фещенко (Держ. подат. адміністрація України, Київ)

СТОХАСТИЧНІ НАПІВГРУПИ ТА ВИПАДКОВИЙ МАСОПЕРЕНОС

We consider the random mass transfer on a metric compact set determined via a purely continuous stochastic semigroup T_t^s. We obtain the description of this semigroup by means of the Markov process with a random transition probability. We present conditions of the independence of measure-valued processes of the form $T_t^0\mu_0$ depending on the initial mass μ_0.

Розглядається випадковий перенос маси на метричному компакті, заданий за допомогою чисто розривної стохастичної напівгрупи T_t^s. Отримано опис напівгрупи за допомогою марковського процесу з випадковою перехідною ймовірністю. Наведено умови незалежності мірозначних процесів вигляду $T_t^0\mu_0$ в залежності від початкової маси μ_0.

1. Вступ. Нехай E — метричний компакт. Задано „розподіл маси” на E в момент часу s за допомогою скінченної міри μ_s на E. Відбувається „випадковий перенос” маси, при якому початкова маса μ_s на момент $t \geq s$ переходить в μ_t, при цьому загальна маса незмінна: $\mu_s(E) = \mu_t(E)$. Далі використовуються такі позначення:

M — простір скінченних борелівських зарядів на E з нормою, заданою як варіація заряду;

$\mathcal{L}(M)$ — простір лінійних неперервних операторів на M;

M_+ — опукла підмножина M, що складається з імовірнісних мір. На M_+ задано топологію слабкої збіжності, що сумісна з метрикою ρ:

$$\text{для } \mu, \nu \in M_+ \qquad \rho(\mu, \nu) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n |\langle \mu - \nu, f_n \rangle|,$$

де $\{f_n\}_{n\geq 0}$ — зліченна сім'я дійсних невід'ємних неперервних на E функцій таких, що лінійна оболонка $\{f_n\}_{n\geq 0}$ щільна в $C(E)$,

$$\|f_n\| = \sup_{x\in E} |f_n(x)| = 1, \quad a_n > 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty;$$

$\mathcal{L}_+(M)$ — підмножина $\mathcal{L}(M)$, яка складається з операторів, що переводять M_+ в M_+ і їх звуження на M_+ неперервні в метриці ρ. На $\mathcal{L}_+(M)$ задано метрику, успадковану з $C(M; \rho)$: для $A, B \in \mathcal{L}_+(M)$: $d(A, B) = \sup_{\mu\in M_+} \rho(A\mu, B\mu)$. Оскільки простір $C(M; \rho)$ є сепарабельним, то таким є і простір $\mathcal{L}_+(M)$.

Зауважимо, що для кожного заряду з M існує розклад Гана:

$$\forall \nu \in M \ \exists \nu_+, \nu_- \in M_+, \quad \exists \alpha_+, \alpha_- \geq 0 : \nu = \alpha_+\nu_+ - \alpha_-\nu_-,$$
$$\operatorname{supp} \nu_+ \cap \operatorname{supp} \nu_- = \varnothing,$$

отже, для кожного оператора $A \in \mathcal{L}_+(M)$:

$$\|A\nu\| \leq \alpha_+\|A\nu_+\| + \alpha_-\|A\nu_-\| = \alpha_+ + \alpha_- = \|\nu\|,$$

де $\|\cdot\|$ — норма в просторі M. Отже, норма оператора A в $\mathcal{L}(M)$:

$$\|A\| = 1. \tag{1}$$

Переноси маси задаються за допомогою випадкових перетворень з $\mathcal{L}_+(M)$:

$$\mu_t = T_t^s(\mu_s), \tag{2}$$

T_t^s — випадковий елемент в $\mathcal{L}_+(M)$. Приклад такого випадкового перетворення міри — перенос маси, породжений випадковим перетворенням простору E: $\varphi_t^s \in C(E)$. В цьому випадку

$$\mu_t = \mu_s \circ (\varphi_t^s)^{-1}. \tag{3}$$

Мірозначні процеси вигляду (3) розглядались, наприклад, в [1, 2]. При цьому для дослідження процесів вигляду (3) використовувались n-точкові випадкові процеси із значеннями в E^n:

$$\xi_t^{(n)} = \left(\xi_t^1, \ldots, \xi_t^n\right) = \left(\varphi_t^0(\xi_0^1), \ldots, \varphi_t^0(\xi_0^n)\right).$$

Зауважимо, що перетворення мір вигляду (3) відповідає „переносу маси", коли частинки-носії маси переміщуються випадковим чином, при цьому вони не можуть розщеплюватись, але можуть „злипатися", після чого переміщуються як одна частинка.

Перетворення мір вигляду (2) дає можливість розглядати також „перенос маси", при якому частинки можуть розщеплюватись. Подібні мірозначні процеси зручно описувати за допомогою стохастичних напівгруп.

2. Стохастичні напівгрупи. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — випадковий простір.

Означення 1. $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ — *чисто розривна однорідна стохастична напівгрупа з незалежними мультиплікативними приростами із значеннями в* $\mathcal{L}_+(M)$, *якщо:*

1) *при* $0 \le s \le t$ T_t^s — $(\mathcal{F}; \mathcal{B}(\mathcal{L}_+(M)))$*-вимірне відображення;*

2) *при* $0 \le s \le t \le u$ $T_u^s \circ T_t^s = T_u^s$ *м. н.,* $T_t^t = I$ *м. н. (I — одиничний оператор в* $\mathcal{L}_+(M)$*);*

3) *при* $0 \le t_1 \le \ldots \le t_n$ $T_{t_2}^{t_1}, \ldots, T_{t_n}^{t_{n-1}}$ — *незалежні;*

4) *при* $0 \le s \le t,\ h \ge 0$ T_t^s *і* T_{t+h}^{s+h} — *однаково розподілені;*

5) $\lim\limits_{h \downarrow 0} \mathrm{P}\{T_h^0 \ne I\} = 0$.

***Зауваження* 1.** Властивість 2 означення є коректною, оскільки T_t^s є випадковим сепарабельнозначним елементом.

Теорема 1. *Напівгрупа* $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ *випадкових перетворень з* $\mathcal{L}_+(M)$ *має властивості* 1–5 *тоді і тільки тоді, коли існують незалежні однаково розподілені випадкові елементи* G_n, $n \ge 1$, *в* $\mathcal{L}_+(M)$ *і незалежний від них пуассонівський процес* $N(t)$ *такі, що процес*

$$\tilde{T}_t^0 = G_{N(t)} \circ G_{N(t-1)} \circ \ldots \circ G_0, \tilde{T}_0^0 = G_0 = I \tag{4}$$

однаково розподілений з T_t^0.

Доведення. Нехай напівгрупа $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ має властивості 1–5. Розглянемо $\mathcal{L}_+(M)$-значний процес $A_t = T_t^0 A_0$, де A_0 — оператор з $\mathcal{L}_+(M)$. $\{A_t\}_{t \ge 0}$ є марковським однорідним процесом. Дійсно, нехай $\mathcal{F}_t^s$ — σ-алгебра, породжена випадковими елементами $\left\{T_v^u, s \le u \le v < t\right\}$. Для випадкового оператора A з $\mathcal{L}_+(M)$ визначено умовне математичне сподівання $\mathrm{E}\left(A \,|\, \mathcal{F}_t^s\right) = \tilde{A}$ як випадковий оператор з $\mathcal{L}_+(M)$ такий, що

$$\forall\, \mu \in M_+,\quad f \in C(E)\colon\ \mathrm{E}\Big(\langle A\mu, f\rangle \,|\, \mathcal{F}_t^s\Big) = \Big\langle \tilde{A}\mu, f\Big\rangle.$$

З урахуванням (1) $\mathrm{E}|\langle A\mu, f\rangle| \le \|\mu\|\,\|f\| < \infty$. Для умовного математичного сподівання операторів зберігаються основні властивості звичайного умовного сподівання випадкових величин [3, с. 27]. Маємо

$$\forall\, 0 \le s \le t: \mathrm{E}\Big(A_t \,|\, \mathcal{F}_s^0\Big) = \mathrm{E}\Big(T_t^s A_s \,|\, \mathcal{F}_s^0\Big) = \mathrm{E}T_t^s \mathrm{E}\Big(A_s \,|\, \mathcal{F}_s^0\Big) =$$

$$= \mathrm{E}T_t^s \mathrm{E}\Big(T_s^0 A_0 \,|\, \mathcal{F}_s^0\Big) = \mathrm{E}T_t^s A_s = \mathrm{E}\Big(T_t^s A_s \,|\, A_s\Big) = \mathrm{E}(A_t \,|\, A_s),$$

що випливає з незалежності T_t^s і $\mathcal{F}_s^0$ та $\mathcal{F}_s^0$-вимірності T_s^0. Однорідність процесу A_t випливає з однорідності напівгрупи $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$.

З властивості 5 напівгрупи випливає

$$\sup_{A \in \mathcal{L}_+(M)} \lim_{h \downarrow 0} \mathrm{P}\{A_h \ne A_0 \,|\, A_0 = A\} \le \lim_{h \downarrow 0} \mathrm{P}\Big\{T_h^0 \ne I\Big\} = 0. \tag{5}$$

Відомо твердження [4, с. 104], що для марковського однорідного чисто розривного (тобто такого, що задовольняє (5)) процесу існують границі:

$$\forall A \in \mathcal{L}_+(M)\colon \exists\, \lambda_A := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\{A_h \ne A_0 \,|\, A_0 = A\},$$

$$\forall A \in \mathcal{L}_+(M),\ \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_+(M)),\ A \notin \Gamma : \exists\, Q_A := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\{A_h \in \Gamma \,|\, A_0 = A\}.$$

Якщо $\lambda_A \ne 0$, то $\dfrac{Q_A(\cdot)}{\lambda_A}$ — ймовірнісна міра на $\mathcal{L}_+(M)$ (покладемо $Q_A(\{A\}) := 0$). Генератор φ процесу $\{A_t\}_{t \ge 0}$ має вигляд

$$\varphi(F)(A) = \int\limits_{\mathcal{L}_+(M) \setminus \{A\}} F(B) Q_A(dB) - \lambda_A F(A), \quad F \in B(\mathcal{L}_+(M)),\quad A \in \mathcal{L}_+(M). \tag{6}$$

Позначимо $\lambda := \lambda_I = \lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{1}{h} \mathrm{P}\Big\{T_h^0 \ne I\Big\}$,

$$Q(\Gamma) := Q_I(\Gamma) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\Big\{T_h^0 \in \Gamma\Big\},\quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_+(M)),\quad I \notin \Gamma.$$

Тоді для A з $\mathcal{L}_+(M)$, $A \notin \Gamma$, маємо

$$Q_A(\Gamma) = Q\Big(A_l^{-1}\Gamma\Big),$$

де $A_l^{-1}\Gamma = \{B \in \mathcal{L}_+(M) : BA \in \Gamma\}$. Побудуємо процес N з умов теореми як деякий пуассонівський процес з параметром λ, а $G_1, \ldots, G_n \ldots$ як незалежні випадкові елементи, розподілені за законом $\lambda^{-1} Q$. (Якщо $\lambda = 0$, то для довільного $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_+(M))$, $I \notin \Gamma$ маємо

$$0 \le Q(\Gamma) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\Big\{T_h^0 \in \Gamma\Big\} \le \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\Big\{T_h^0 \ne I\Big\} = \lambda = 0.$$

Отже, згідно з (6) генератор процесу $\{A_t\}_{t \ge 0}$ дорівнює нулю і $T_t^s \equiv I$. Розподіл G_1 може бути довільним. Оскільки $N(t) \equiv 0$, то $\tilde{T}_t^0 \equiv I$, і в цьому випадку теорему доведено. Тому далі припускаємо, що $\lambda \ne 0$.)

Легко бачити, що напівгрупа $\{\tilde{T}_t^s\}_{0 \le s \le t}$, де

$$\tilde{T}_t^s = \begin{cases} G_{N(t)} \circ \ldots \circ G_{N(s)+1}, N(t) > N(s), \\ I, N(t) = N(s), \end{cases} \tag{7}$$

має властивості $1-5$. Перевіримо, наприклад, незалежність приростів 3:

$$\forall t_i \le t_{i+1},\ \Gamma_i \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_+(M)),\ i = \overline{1,n} : \mathrm{P}\left\{T_{t_{i+1}}^{t_i} \in \Gamma_i, i = \overline{1,n}\right\} =$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k_i < \infty \\ i = \overline{1,n}}} \mathrm{P}\left\{N(t_{i+1}) - N(t_i) = k_i, G_{s_i+k_i} \circ \ldots \circ G_{s_i+1} \in \Gamma_i,\ s_i = k_1 + \ldots + k_{i-1}, i = \overline{1,n}\right\} =$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k_i < \infty \\ i = \overline{1,n}}} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left\{N(t_{i+1}) - N(t_i) = k_i, G_{k_i} \circ \ldots \circ G_1 \in \Gamma_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left\{T_{t_{i+1}}^{t_i} \in \Gamma_i\right\},$$

що випливає з властивостей пуассонівського процесу та незалежності N, $G_1, \ldots, G_n, \ldots$. Таким чином, процес $\tilde{T}_t := \tilde{T}_t^0$ — також однорідний марковський $\mathcal{L}_+(M)$-значний процес. Обчислимо його генератор $\tilde{\varphi}$: для довільних $F \in \in B(\mathcal{L}_+(M))$, $A \in \mathcal{L}_+(M)$

$$\tilde{\varphi}F(A) = \lim_{h \downarrow 0} \mathrm{E}\frac{F(\tilde{T}_h A) - F(A)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{hk!}\mathrm{E}(F(G_k \circ \ldots \circ G(A) - F(A)) =$$

$$= \lambda(\mathrm{E}F(G_1 A) - F(A)) = \int\limits_{\mathcal{L}_+(M)\setminus\{I\}} F(BA)Q(dB) - \lambda F(A).$$

Для доведення теореми залишилось показати, що φ і $\tilde{\varphi}$ збігаються. Достатньо довести, що ці генератори збігаються на функціях-індикаторах вимірних множин. Нехай $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_+(M))$, $F = \mathbf{1}_\Gamma \in B(\mathcal{L}_+(M))$. Якщо $A \notin \Gamma$, то маємо

$$\tilde{\varphi}F(A) = \tilde{\varphi}\mathbf{1}_\Gamma(A) = \lambda\mathrm{E}(\mathbf{1}_\Gamma(G_1 A)) = \lambda P(G_1 A \in \Gamma) = \lambda P(G_1 \in A_l^{-1}\Gamma) =$$

$$= Q_A(\Gamma) = \int\limits_{\mathcal{L}_+(M)\setminus\{I\}} \mathbf{1}_\Gamma(B) Q_A(dB) = \varphi F(A).$$

Якщо ж $A \in \Gamma$, то оскільки $\tilde{\varphi}(1) = \varphi(1) \equiv 0$ і $A \notin \Gamma^c = \mathcal{L}_+(M) \setminus \{\Gamma\}$, то згідно з доведеним вище маємо $\tilde{\varphi}F(A) = \tilde{\varphi}(1 - \mathbf{1}_{\Gamma^c}(A)) = \varphi(1 - \mathbf{1}_{\Gamma^c}(A)) = \varphi F(A)$.

Теорему доведено.

Зауваження 2. З теореми 1 випливає, що напівгрупа, яка має властивості $1-5$, може бути зображена у вигляді слабкого розв'язку стохастичного рівняння

$$\tilde{T}_t^s = I + \int_s^t dX_u \circ \tilde{T}_{u-}^s, \tag{8}$$

де

$$X_u = \sum_{k=0}^{N(u)} (G_k - I), \quad X_0 = 0.$$

В (8) використовується інтеграл Стільтьєса: для випадкового $\mathcal{L}_+(M)$-значного процесу f з траєкторіями, неперервними зліва, і з границею справа, $\mathcal{F}_\cdot^s$-узгодженого:

$$\int_s^t dX_u f(u) := \lim_{\substack{s<u_0<\ldots<u_m=t \\ \sup|u_k-u_{k-1}|\to 0}} \sum_{k=0}^{m-1} (X_{u_{k+1}} - X_{u_k}) f(u_k) \text{ м. н.}$$

Доведемо (8). Оскільки X_t — кусково-сталий процес із стрибками $\Delta X_{\tau_n} = G_n - I$, що відбуваються у випадкові моменти $s < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$, які збігаються з моментами стрибків процесу N, то (8) рівносильне такому:

$$\tilde{T}_u^s = I + \left(G_{N(s)+1} - I\right) 1_{\{\tau_1 \le u\}} + \ldots + \left(G_{N(s)+n} - I\right) \tilde{T}^s_{\tau_{n-1}} 1_{\{\tau_n \le u\}} + \ldots,$$

звідки за індукцією по n отримуємо $\tilde{T}^s_{\tau_n} = G_{N(s)+n}$ і, отже,

$$\tilde{T}_u^s = \begin{cases} G_{N(u)} \circ G_{N(u)-1} \circ \ldots \circ G_{N(s)+1}, N(u) - N(s) > 0, \\ I, N(u) = N(s). \end{cases}$$

Таким чином, (8) еквівалентно рівності (4), доведеній в теоремі 1, отже, напівгрупа, що має властивості 1 – 5, однаково розподілена з розв'язком (8).

***Зауваження* 3.** Існує взаємно однозначна відповідність між операторами з $\mathcal{L}_+(M)$ і фелерівськими перехідними ймовірностями на E:

оператору $A \in \mathcal{L}_+(M)$ відповідає перехідна ймовірність $\mathrm{P} : E \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$, де для $x \in E$ $P(x, \cdot) = A(\delta_x)(\cdot)$, і навпаки, фелерівській перехідній ймовірності $P(x, dy)$ відповідає оператор $A \in \mathcal{L}_+(M)$:

для $\mu \in M_+ : A\mu = \int_E \mu(dx) P(x, \cdot)$.

Тому кожній напівгрупі, що має властивості 1–5, відповідає „марковський процес з випадковою перехідною ймовірністю" на E [5]. Такий процес $x_t = (e_t, \theta_t)$ набуває значень у просторі $X = E \times \Theta$, де $\Theta = \mathcal{L}_+(M)^{[0, +\infty)}$ з топологією добутку і циліндричною σ-алгеброю $\mathcal{B}_\Theta$, в X також визначено σ-алгебру вимірних множин $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}_\Theta$.

Процес x_t складається з E-значного процесу e_t і потоку перехідних ймовірностей θ_t, де $\theta_t = \{\theta_{t,u}\}_{u \ge 0}$, а $\theta_{t,u}$ — випадкова ймовірність переходу процесу e з стану e_t в момент t в стан e_{t+u}. При цьому $\{S_v^s\}_{0 \le s \le v}$, де $S_v^s = \theta_{s, v-s}$, утворюють стохастичну напівгрупу, що має властивості 1 – 4.

x_t є марковським процесом в X, утвореним таким чином: якщо в момент t $x_t = (e_t, \theta_t)$, то e_{t+u} розподілено як значення марковського процесу з початковим значенням e_t і ймовірністю переходу $\theta_{t,u}$, а потік перехідних ймовірностей $\theta_{t+u} = \tau_u \theta_t = \{\theta_{t+u, t+u+v}\}_{v \ge 0}$. Для $A \in \mathcal{B}_X$, $0 \le t \le s$ маємо

$$\mathrm{P}\{x_s \in A \mid x_t = (e_t, \theta_t)\} = (\delta_{e_t}, A_{t,s} dy),$$

де $A_{t,s} = \{a \in E : (a, \tau_{s-t}\theta_t) \in A\}$.

Приклад. Нехай E — одиничне коло в $\mathbb{C}$, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Нехай ξ — деякий випадковий елемент на E з розподілом Q. Тоді можна побудувати випадкове перетворення η простору $E : \eta(z) = z\xi$, $z \in \mathbb{C}$. Користуючись теоремою 1, побудуємо стохастичну напівгрупу $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ за пуассонівським процесом N з деяким параметром $\lambda > 0$ і за незалежними випадковими, однаково розподіленими елементами G_n, $n \ge 1$, в $\mathcal{L}_+(M)$. Покладемо $\forall \mu \in M_+ : G_1 \mu = \mu \circ \eta^{-1}$. Легко бачити, що

$$T_t^s\mu = \mu \circ (\eta_t^s)^{-1}, \tag{9}$$

де

$$\eta_t^s : E \to E, \qquad \eta_t^s(z) = z \prod_{k=N(s)+1}^{N(t)} \xi_k,$$

ξ_k, $k \geq 1$, — незалежні, однаково з ξ розподілені випадкові елементи на E. Зокрема, $T_t^s(\delta_z) = \delta_{z \cdot \xi_{N(s)+1} \cdot \ldots \cdot \xi_{N(t)}}$.

Згідно із зауваженням 3, напівгрупі (9) відповідає „марковський процес з випадковою перехідною ймовірністю" $\left(z_t, T_{t+\cdot}^t\right)_{t \geq 0}$, z_t є кусково-сталим процесом в E, в момент стрибка пуассонівського процесу N випадково (згідно з розподілом Q) вибирається елемент $x \in E$ та перехідна ймовірність, що відповідає $x : P_x(z, \cdot) = \delta_{zx}$, значення процесу z_t змінюється відповідно до вибраної ймовірності переходу.

3. Випадок скінченного фазового простору. Розклад стохастичних напівгруп з теореми 1 дає можливість отримувати опис певного класу мірозначних марковських процесів, до яких відносяться і відомі приклади мірозначних процесів при скінченному просторі E. Теорема 1 дає можливість також досліджувати незалежність мірозначних процесів, що „стартують" з різних точок простору E.

Нехай $E = \{1, \ldots, d\}$ — скінченна множина. Тоді

$$M_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^d x_i = 1 \right\},$$

$\mathcal{L}_+(M)$ — множина стохастичних матриць розміру $d \times d$, випадкові елементи G_k, $k \geq 1$, з теореми 1 — випадкові матриці.

Нехай задано m незалежних пуассонівських процесів $N^\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1, m}$, з параметрами λ_α та m сімей незалежних випадкових елементів з $\mathcal{L}_+(M)$: G_k^α, $k \geq 1$, $\alpha = \overline{1, m}$, при фіксованому α $G_1^\alpha, \ldots, G_k^\alpha, \ldots$ однаково розподілені.

Нехай напівгрупа $\left\{\Pi_t^s\right\}_{0 \leq s \leq t}$ побудована так:

$$\Pi_t^s = \prod_{\substack{\alpha = \overline{1, m}, \\ N^\alpha(s) < k \leq N^\alpha(t)}} G_k^\alpha, \tag{10}$$

де добуток матриць в (10) береться в порядку зменшення параметра k_α. Таким чином, напівгрупа $\left\{\Pi_t^s\right\}_{0 \leq s \leq t}$ є чисто розривною і у момент часу u, коли відбувається стрибок процесу N^α, міра $\Pi_{u-}^0 \mu_0$ перетворюється за допомогою випадкової матриці $G_{N^\alpha(u)}^\alpha$.

Теорема 2. *Процес* Π_t^0 *однаково розподілений з процесом* T_t^0 *вигляду* (4):

$$T_t^0 = G_{N(t)} \circ \ldots \circ G_0, \tag{11}$$

де $N(t)$ — *пуассонівський процес з параметром* $\lambda = \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha$, *а* G_k, $k \geq 1$, — *незалежні однаково розподілені випадкові елементи в* $\mathcal{L}_+(M)$,

$$G_1 = G_1^\beta, \tag{12}$$

β — *випадкова величина, не залежна від* N *і* G_k^α, $k \ge 1$, $\alpha = \overline{1, m}$, $\mathrm{P}\{\beta = \alpha\} = \lambda_\alpha / \lambda$.

Доведення. Генератор φ процесу Π_t^0 має вигляд

$$\varphi F(A) = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \mathrm{E}\Big(F(G_1^\alpha A) - F(A)\Big) = \lambda \mathrm{E}(F(G_1 A) - F(A)),$$

$$F \in B(\mathcal{L}_+(M)), \quad A \in \mathcal{L}_+(M),$$

і збігається з генератором процесу T_t^0.

Теорему доведено.

Нехай тепер процес (10) побудовано спеціальним чином: α пробігає всі непорожні підмножини E і

$$G_1^\alpha \in \mathcal{L}_+(M)_\alpha, \tag{13}$$

де $\mathcal{L}_+(M)_\alpha = \Big\{B \in \mathcal{L}_+(M) \mid \forall x \in E\colon \big(B(\delta_x) = \delta_x \Leftrightarrow x \notin \alpha\big)\Big\}$, тобто „перенос маси", що відповідає оператору з $\mathcal{L}_+(M)_\alpha$, переміщує масу, зосереджену на α, але не зачіпає масу, зосереджену поза α. Зауважимо, що M_+-значні процеси

$$\eta^x(t) = T_t^0(\delta_x), \quad x \in E,$$

а також їх „ансамблі" $(\eta^{x_1}, \ldots, \eta^{x_k})$ є чисто розривними процесами.

Означення 2. *Множину* $A \subset E$ *назвемо досяжною з точки* $x \in X$ *за допомогою напівгрупи* $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$, *що має властивості* $1-5$, *якщо:*

$$\forall t > 0: \mathrm{P}\Big\{T_t^0(\delta_x)(A) > 0\Big\} > 0. \tag{14}$$

Внаслідок однорідності напівгрупи $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ та її розкладу у вигляді (4) умова (14) рівносильна такій:

$$\exists t > 0: \mathrm{P}\Big\{T_t^0(\delta_x)(A) > 0\Big\} > 0.$$

Означення досяжної множини (14) за допомогою напівгрупи тісно пов'язане з означенням досяжної множини для звичайного марковського ланцюга, породженого елементами розкладу (4). Позначимо $Q := \mathrm{E}G_1$, де G_1 — випадковий елемент в $\mathcal{L}_+(M)$ з розкладу (11). Q також належить $\mathcal{L}_+(M)$ і, відповідно до зауваження 3, Q однозначно відповідає перехідна ймовірність на E, яку позначатимемо також Q.

Теорема 3. *Множина* $A \subset E$ *є досяжною з точки* $x \in X$ *в сенсі* (14) *тоді і тільки тоді, коли* A *є досяжною з* x *для однорідного марковського ланцюга на* E *з перехідною ймовірністю* Q.

Доведення. З розкладу (4) напівгрупи $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ випливає, що A досяжне з x у сенсі (14) тоді і тільки тоді, коли знайдеться послідовність $A_0 = \{x\}$, $A_1, \ldots, A_n$ підмножин E таких, що для $k = \overline{0, n-1}$ A_{k+1} досяжне з A_k за допомогою G_1 в сенсі (14), тобто

$$\exists y \in A_k: \mathrm{P}\Big\{G_1(\delta_y)(A_{k+1}) > 0\Big\} > 0. \tag{15}$$

Зауважимо, що (15) рівносильно тому, що

$$\exists y \in A_k: \mathrm{E}G_1(\delta_y)(A_{k+1}) = Q(\delta_y)(A_{k+1}) > 0,$$

тобто A_{k+1} досяжне з A_k за допомогою однорідного марковського ланцюга з перехідною ймовірністю Q. Але A досяжне з x для вказаного ланцюга тоді і тільки тоді, коли знайдеться послідовність $B_0 = \{x\}$, $B_1, \ldots, B_m$ підмножин E таких, що для $k = \overline{0, m-1}$ B_{k+1} досяжне з B_k за допомогою Q, тобто $\exists y \in B_k : Q(\delta_y)(B_{k+1}) > 0$.

Теорему доведено.

Будемо говорити, що множина $A \subset E$ досяжна з точок $x, y \in E$, якщо вона досяжна з кожної з цих точок.

Теорема 4. *Якщо напівгрупа* $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ *має властивості* $1-5$, *то для* x, $y \in E$, $x \ne y$ *процеси* $\eta^x(t) = T_t^0(\delta_x)$ *і* $\eta^y(t) = T_t^0(\delta_y)$ *незалежні, якщо існує розклад* (10) – (13) *напівгрупи* $\left\{T_t^s\right\}_{0 \le s \le t}$, *в якому для кожної множини* $A \in$ $\in E$, *досяжної з* x, y *в сенсі* (14), *виконується рівність* $\lambda_A = 0$.

Доведення. Безпосередньо з розкладу (10) – (13) отримуємо

$$\eta^x(t) = \prod_{\substack{\alpha = \overline{1, m},\\ N^\alpha(s) < k \le N^\alpha(t)}} G_k^\alpha,$$

де α пробігає всі множини, досяжні з x,

$$\eta^y(t) = \prod_{\substack{\beta = \overline{1, m},\\ N^\beta(s) < k \le N^\beta(t)}} G_k^\beta,$$

де β пробігає всі множини, досяжні з y і, отже, η^x і η^y незалежні.

Теорему доведено.

Умова теореми 4 не є необхідною для незалежності процесів η^x і η^y.

Приклад. Нехай $E = \{0, 1, 2, 3\}$ — напівгрупа $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$, що допускає розклад (10) – (13), при цьому

$$G^{\{0\}}(\delta_0) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2), \qquad G^{\{3\}}(\delta_3) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2),$$

$$G^{\{1,2\}}(\delta_1) = \delta_2, \qquad G^{\{1,2\}}(\delta_2) = \delta_1,$$

$$\lambda_{\{0\}} = \lambda_{\{3\}} = \lambda_{\{1,2\}} = \lambda > 0,$$

для всіх інших множин $\alpha \subset E$ $\lambda_\alpha = 0$. Розглянемо процеси $\eta^0(t)$ і $\eta^3(t)$:

$$\eta^0(t) = \delta_0 \mathbf{1}_{\{N^{\{0\}}(t) = 0\}} + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)\mathbf{1}_{\{N^{\{0\}}(t) > 0\}},$$

$$\eta^3(t) = \delta_3 \mathbf{1}_{\{N^{\{3\}}(t) = 0\}} + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)\mathbf{1}_{\{N^{\{3\}}(t) > 0\}}.$$

Легко бачити, що вони незалежні. Однак множина $\{1, 2\}$ є досяжною з 0 і з 3 в сенсі (14) і $\lambda_{\{1,2\}} > 0$. В той же час справедлива наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай* $\{T_t^s\}_{0 \le s \le t}$ *має властивості* $1-5$. *Якщо для* $x \ne y$ *процеси* η^x *і* η^y *незалежні, тоді для будь-якої множини* $\alpha \subset E$ *такої, що* $\{x, y\} \subset \alpha$, *виконується* $\lambda_\alpha = 0$.

Доведення. Дійсно,

$$\lambda_\alpha = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\left\{T_h^0 \in \mathcal{L}_+(M)_\alpha\right\} \le \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\left\{\eta^x(h) \ne \delta_x, \eta^y(h) \ne \delta_y\right\} =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\left\{\eta^x(h) \ne \delta_x\right\} \mathrm{P}\left\{\eta^y(h) \ne \delta_y\right\} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} O(h) O(h) = 0.$$

Приклади. 1. Нехай у розкладі (10)–(13) ненульові лише інтенсивності переходу для двоточкових множин: $\lambda_{\{x, y\}} \neq 0$, $x \neq y$, при цьому відповідні $G^{\{x, y\}}$ детерміновані: $G^{\{x, y\}}(\delta_x) = \delta_y$, $G^{\{x, y\}}(\delta_y) = \delta_x$. Якщо в початковий момент часу в кожній точці множини E зосереджена або нульова маса, або маса $1/N$ і всього „зайнято" N точок, то процес відповідає наступній інтерпретації („процес з забороною" [6]). Маса, зосереджена в точці x:

а) чекає протягом випадкового часу, експоненційно розподіленого з параметром $\lambda_x = \sum_{y \neq x} \lambda_{\{x, y\}}$;

б) вибирає іншу точку y з імовірністю $\dfrac{\lambda_{\{x, y\}}}{\lambda_x}$;

в) якщо y зайнято, то залишається в x, в іншому випадку — переходить в y.

2. Процес „голосування". Простір E має вигляд $E = \left\{x_v^k\right\}_{k=\overline{1, d},\, v=\overline{0,1}}$. Для кожної точки $k=\overline{1, d}$ визначено „окіл" $U_k \subset \{1, \ldots, d\} \setminus \{k\}$. У розкладі (10) ненульові тільки інтенсивності переходу λ_k для множин $V_k = \left\{x_v^k\right\}_{i \in U_k \cup \{k\},\, v=\overline{0,1}}$. Відповідні G^k — детерміновані:

$$G^k\left(\delta_{x_v^k}\right) = \frac{1}{|U_k|} \sum_{i \in U_k} \delta_{x_v^i}, \quad v = \overline{0,1},$$

$$G^k\left(\delta_{x_v^i}\right) = \left(1 - \frac{1}{|U_k|}\right)\delta_{x_v^i} + \frac{1}{|U_k|}\delta_{x_v^k}, \quad i \in U_k, \quad v = \overline{0,1}.$$

Цей процес має інтерпретацію для міри $\mu \in M_+$, $\mu\left(\left\{x_1^k\right\}\right)$ — впевненість k-ї особи в необхідності голосувати „за", $\mu\left(\left\{x_0^k\right\}\right)$ — відповідно „проти". Тоді k-та особа:

а) чекає протягом випадкового часу, експоненційно розподіленого з параметром λ_k;

б) змінює свою думку на „середню думку сусідів";

в) впливає на думку сусідів.

1. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – 346 p.
2. *Darling R. W. R.* Ergodicity of measure-valued Markov chain induced by random transformations // Probab. Th. Rel. Fields. – 1998. – **77**. – P. 221–229.
3. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы. – Киев: Наук. думка, 1978. – 200 с.
4. *Скороход А. В.* Лекції з теорії випадкових процесів. – Київ: Либідь, 1990. – 168 с.
5. *Lu. G., Mukherjea A.* Invariant measures and Markov chains with random transition probabilities // Probab. Math. Statist. – 1997. – **2**. – P. 115–138.
6. *Лиггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. – М.: Мир, 1989. – 550 с.

Одержано 21.04.2000