УДК 519.21

А. Г. Кукуш (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
З. Цванциг (Ун-т Гамбурга, Германия)

ОБ АДАПТИВНОЙ ОЦЕНКЕ НАИМЕНЬШЕГО КОНТРАСТА В МОДЕЛИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ *

We consider implicit nonlinear functional model with errors in variables. On the basis of a concept of deconvolution, we suggest a new adaptive estimate of the least contrast of regression parameter. We formulate sufficient conditions of consistency of estimator. We consider a number of examples in the framework of L_1- and L_2-approaches.

Розглядається неявна нелінійна функціональна модель з похибками в змінних. На базі ідеї деконволюції запропоновано нову адаптивну оцінку найменшого контрасту параметра регресії. Сформульовано достатні умови консистентності оцінки. Розглянуто декілька прикладів у рамках L_1- та L_2-підходів.

Цель данной работы — построить состоятельные оценки параметров регрессии в неявной функциональной модели с ошибками в переменных. В этой модели с увеличением количества наблюдений возрастает число мешающих параметров при фиксированном количестве оцениваемых параметров. Давно известно, что к таким моделям обычные процедуры оценивания неприменимы [1]. В линейных моделях метод наименьших квадратов приводит к состоятельным и эффективным оценкам параметров регрессии. В нелинейном случае подобные оценки несостоятельны.

1. Адаптивные оценки наименьшего контраста. Рассмотрим *модель с неявными функциональными связями*

$$G(\zeta_i, \beta_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $\zeta_i \in D \subset \boldsymbol{R}^s$, $\zeta = \zeta(n) = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in D^n$ — *детерминированный* мешающий параметр, β_0 — параметр регрессии, принадлежащий компактному множеству $B \subset \boldsymbol{R}^p$, и $G\colon D \times B \to \boldsymbol{R}$ — заданная функция. Наблюдаются s-мерные векторы

$$Z_i = \zeta_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где ε_i независимы и одинаково распределены, причем

$$\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{E}\|\varepsilon_1\|^2 < \infty.$$

Модель с явными функциональными связями включается в (2) при $s \ge 2$, $\zeta_i = (\zeta_{1i}; \zeta_{2i})$, $\zeta_{1i} \in \boldsymbol{R}$, $\zeta_{2i} \in \boldsymbol{R}^{s-1}$, $G(\zeta_i, \beta_0) = \zeta_{1i} - g(\zeta_{2i}, \beta_0)$. Тогда наблюдения $Z_i = (y_i; x_i)$ подчиняются классической явной модели

$$(y_i; x_i) = (g(\xi_i, \beta_0); \xi_i) + (\varepsilon_{1i}; \varepsilon_{2i}) \tag{3}$$

с неизвестными детерминированными точками плана

$$\xi_i \in F \subset \boldsymbol{R}^{s-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для неявной модели (1) введем функцию контраста, зависящую от неизвестных мешающих параметров.

Назовем функцию $C_n\colon D^n \times B \to \boldsymbol{R}_+$, $n = 1, 2, \dots$, *контрастом* для β в точке β_0, если для некоторой строго возрастающей функции $\rho\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$, где $\rho(0) = 0$, выполняется следующее условие отделимости:

i) $\exists n_0 \ge 1 \;\; \forall n \ge n_0 \;\; \forall \beta \in B\colon C_n(\zeta, \beta) - C_n(\zeta_0, \beta_0) \ge \rho(\|\beta - \beta_0\|)$.

* Поддержана грантом DFG 436UKR 17/10/96 и 436UKR 17/29/96.

Далее C_n будет получено усреднением:

$$C_n(\zeta, \beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(\zeta_i, \beta), \tag{4}$$

где функция $c\colon D \times B \to \boldsymbol{R}_+$. Основная проблема — найти оценку для $C_n(\zeta, \beta)$, не зависящую от ζ и основанную на наблюдениях (2). Первоначальная идея — подставить в (4) наблюдения $Z_1, \ldots, Z_n$ вместо мешающих параметров $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. В результате получается так называемая *наивная оценка наименьшего контраста* β_{naive},

$$\beta_{\text{naive}} \in \arg\min_{\beta \in B} C_n(Z_1, \ldots, Z_n; \beta),$$

однако эта оценка несостоятельна. Главная идея данной статьи — предложить взамен адаптивную процедуру. Ищется борелевская функция $q\colon \boldsymbol{R}^s \times B \to \boldsymbol{R}$, полунепрерывная снизу относительно $\beta \in B$ и такая, что

$$\forall \zeta_1 \in D \;\; \forall \beta \in B\colon \; \mathrm{E}_{\zeta_1} q(Z_1, \beta) = c(\zeta_1, \beta). \tag{5}$$

Адаптивной оценкой наименьшего контраста (АОНК) параметра β_0 называется случайный вектор

$$\beta_{\text{ad}} \in \arg\min_{\beta \in B} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(Z_i, \beta), \tag{6}$$

Измеримое решение данной оптимизационной задачи всегда существует [2].

Оценка (6) напоминает оценку Стефански [3] для явной модели (3). Он также использовал уравнения в свертках типа (5) для построения критерия оценивания, однако этот критерий основывался на состоятельной процедуре оценивания в классической схеме нелинейной регресии, т. е. в ситуации, когда точки плана ξ_i известны. Накамура [4] применил подобный подход к обобщенной нелинейной модели с ошибками в переменных. Бузас и Стефански [5] распространили метод адаптивной считающей функции на широкий класс обобщенных линейных моделей. Хенфельт и Куинг-Йи Лианг [6] предложили использовать функцию условного квазимаксимального правдоподобия в обобщенной линейной модели. В работе Фазекаша и Кукуша [7] рассматривался адаптивный критерий, связанный с наивной оценкой наименьших квадратов в модели (3). Предлагаемый подход (5), (6) является более общим и основан на контрасте $C_n(\zeta, \beta)$.

Для нахождения q из уравнения (5) необходимо знание закона распределения ошибок ε_i. Только для полиномиальных моделей достаточно знания нескольких моментов распределения. Лишь в некоторых случаях уравнение (5) может быть решено явно. Таковы неявная полиномиальная модель, явная экспоненциальная модель и нелинейная гладкая неявная модель с ошибками, имеющими распределение Лапласа. В [3] решение дано в виде ряда для случая нормально распределенных ошибок. Можно также использовать метод преобразования Фурье [8].

Поскольку уравнение (5) не всегда разрешимо в явном виде, нам потребуется аппроксимационное решение. Назовем семейство функций $q_\mu\colon \boldsymbol{R}^s \times B \to \boldsymbol{R}$, $\mu > 0$, *аппроксимационным решением* уравнения (5), если

$$\forall \mu > 0\colon \sup_{\beta \in B} \sup_{\zeta_1 \in D} \left| \mathrm{E}_{\zeta_1} q_\mu(Z_1, \beta) - c(\zeta_1, \beta) \right| \le \mu. \tag{7}$$

Пусть функция q_μ является борелевской и непрерывной снизу по β. Тогда *аппроксимационная адаптивная оценка наименьшего контраста* β_μ (ААОНК) определяется как случайный вектор, удовлетворяющий соотношению

$$\beta_\mu \in \arg\min_{\beta\in B} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_\mu(Z_i,\beta), \quad \mu > 0. \tag{8}$$

2. Состоятельность. Введем два моментных условия на $q(Z_i,\beta)$:

ii) $\exists C>0\ \exists k\in[1,+\infty)\ \forall\beta\in B$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{E}\left|q(Z_i,\beta)-\mathrm{E}q(Z_i,\beta)\right|^{2k}\right)^{1/k} \le C^{1/k}$;

iii) существуют случайная величина $\mathrm{M}_{(n)}$, постоянная C и действительное число $k\ge1$ такие, что при всех n и при всех $\beta,\beta'\in B$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|q(Z_i,\beta)-\mathrm{E}q(Z_i,\beta)-q(Z_i,\beta')+\mathrm{E}q(Z_i,\beta')|^2 \le \mathrm{M}_{(n)}\|\beta-\beta'\|^2,$$

причем $\mathrm{EM}_{(n)}^{k}\le C$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* i), *а также* ii), iii) *с фиксированным* $k\ge1$. *Тогда*:

а) *если* $k>p/2$, *то*

$$\forall\tau>0\ \forall n\ge1:\ \mathrm{P}_{\beta_0}(\|\beta_{\mathrm{ad}}-\beta_0\|>\tau) \le \mathrm{const}\cdot\rho^{-2k}(\tau)\cdot n^{-k+p/2};$$

б) *если* $k>p/2+1$, *то* $\beta_{\mathrm{ad}}\to\beta_0$ *п. н.*

Рассмотрим аналоги ii), iii) для функций q_μ из (7):

iv) $\exists c>0\ \exists k\in[1,\infty)\ \exists\gamma_1=\gamma_1(k)>0\ \forall\mu\le\mu_0\ \forall\beta\in B$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{E}\left|q_\mu(Z_i,\beta)-\mathrm{E}q_\mu(Z_i,\beta)\right|^{2k}\right)^{1/k} \le \frac{c^{1/k}}{\mu^{\gamma_1(k)/k}};$$

v) существуют случайная величина $\mathrm{M}_{(n,\mu)}$, постоянная c, действительное число $k\ge1$ и $\gamma_2=\gamma_2(k)>0$ такие, что при всех n, всех $\mu\le\mu_0$ и при каждых $\beta,\beta'\in B$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|q_\mu(Z_i,\beta)-\mathrm{E}q_\mu(Z_i,\beta)-q_\mu(Z_i,\beta')+\mathrm{E}q_\mu(Z_i,\beta')\right|^2 \le \mathrm{M}_{(n,\mu)}\cdot\|\beta-\beta'\|^2,$$

причем $\mathrm{EM}_{(n,\mu)}^{k}\le c/\mu^{\gamma_2(k)}$.

Теорема 2. *Пусть в соотношении* (8) $\mu=\mu(n)=an^{-r}$, $r>0$, $a>0$. *Предположим, что выполнено условие* i), *а также* iv), v) *с фиксированным* k: $k\ge1$, $k=p/2+\delta$, $\delta>0$. *Положим*

$$r = \frac{2k(\delta-\chi)}{\gamma_1(k)(2k-p)+\gamma_2(k)p}.$$

Тогда:

а) *если* $\chi>0$, *то*

$$\forall\tau>0\ \forall n>\left(\frac{2a}{\rho(\tau)}\right)^{1/r}:\quad \mathrm{P}_{\beta_0}\left(\left\|\beta_{\mu(n)}-\beta_0\right\|>\tau\right) \le \mathrm{const}\cdot\left(\rho(\tau)-an^{-r}\right)^{-2k}n^{-\chi};$$

б) *если* $\chi>1$, *то* $\beta_{\mu(n)}\to\beta_0$ *п. н.*

3. Примеры. ***3.1. Адаптивная оценка наименьших квадратов в явной модели.*** Для модели (3) положим

$$c(\zeta_i,\beta) = G^2(\zeta_i,\beta) = (g(\xi_i,\beta_0)-g(\zeta_i,\beta))^2$$

и потребуем выполнения условия отделимости i) с

$$\rho(t) = at^2, \quad t\ge0, \quad a>0. \tag{9}$$

АОНК β_{lse} является измеримым решением оптимизационной задачи:

$$\beta_{\text{lse}} \in \arg\min_{\beta \in B} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - f(x_i, \beta))^2 + h(x_i, \beta) - f^2(x_i, \beta) \right],$$

где f удовлетворяет уравнению в свертках:

$$\forall \xi_1 \, \forall \beta \in B: \quad \mathrm{E}_{\xi_1} f(x_1, \beta) = g(\xi_1, \beta), \tag{10}$$

а h удовлетворяет подобному уравнению с функцией $g^2(\xi_1, \beta)$ в правой части. Данная оценка изучалась в [7].

3.2. ААОНК в явной модели частного вида. Приведем пример модели, где вследствие негладкости функции регрессии естественно возникает аппроксимационное решение (7). Пусть в явной модели (3) $s = 2$ и при фиксированных $A > 0$, $d > 0$

$$g(\xi_i, \beta_0) = \beta_0 |\xi_i|, \quad \beta_0 \in B = [-d, d], \quad |\xi_i| \le A, \quad i \ge 1. \tag{11}$$

Предположим также, что $\{\varepsilon_{1i}\}$ и $\{\varepsilon_{2i}\}$ независимы, $\mathrm{E}\varepsilon_{1i} = 0$, $\mathrm{E}\varepsilon_{1i}^2 = \sigma^2 < \infty$, причем ε_{2i} имеют каноническое распределение Лапласа с плотностью $p(u) = e^{-|u|}/2$. Положим

$$c(\zeta_i, \beta_0) = (g(\xi_i, \beta_0) - g(\xi_i, \beta))^2 + \sigma^2 = \xi_i^2 (\beta_0 - \beta)^2 + \sigma^2. \tag{12}$$

Для построения АОНК нужно решить два уравнения в свертках:

$$\mathrm{E} f(\xi + \varepsilon_{2i}, \beta) = \beta |\xi|, \quad \beta, \xi \in \boldsymbol{R}, \tag{13}$$

$$\mathrm{E} h(\xi + \varepsilon_{2i}, \beta) = \beta^2 \xi^2, \quad \beta, \xi \in \boldsymbol{R}. \tag{14}$$

Поскольку $D\varepsilon_{2i} = 2$, то функция $h(x, \beta) = \beta^2 (x^2 - 2)$ удовлетворяет (14). Формальное решение (13) выражается через δ-функцию Дирака:

$$f(x, \beta) = \beta(|x| - 2\delta(x)), \tag{15}$$

поскольку интегрированием по частям можно проверить, что

$$\int |\xi + t| p(t)\, dt - 2p(\xi) = |\xi|, \quad \xi \in \boldsymbol{R}. \tag{16}$$

Мы аппроксимируем δ-функцию δ-образным семейством $\delta_\mu(t) = \mu^{-1} \omega(\mu^{-1} t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, $\mu > 0$, где ω — непрерывная плотность вероятности с ограниченным носителем $\operatorname{supp} \omega = [-1, 1]$. Тогда аппроксимационный критерий включает приближение функции (15)

$$f_\mu(x, \beta) = \beta\left(|x| - 2\delta_\mu(x)\right). \tag{17}$$

Полагаем

$$\begin{aligned} q_\mu(y_i, x_i, \beta) &= \left(y_i - f_\mu(x_i, \beta)\right)^2 + h(x_i, \beta) - f_\mu^2(x_i, \beta) = \\ &= y_i^2 - 2 y_i f_\mu(x_i, \beta) + \beta^2 (x_i^2 - 2). \end{aligned} \tag{18}$$

Покажем, что q_μ удовлетворяет (7) с точностью до постоянного множителя.

Лемма 1. *При всех* $\mu > 0$

$$\sup_{|\beta| \le d} \sup_{|\xi| \le A} \left| \mathrm{E} q_\mu(\beta_0 |\xi| + \varepsilon_{1i}, \xi + \varepsilon_{2i}) - \xi^2 (\beta_0 - \beta) - \sigma^2 \right| \le \mathrm{const} \cdot \mu. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{y}_i = \beta_0 |\xi| + \varepsilon_{1i}$, $\tilde{x}_i = \xi + \varepsilon_{2i}$. Из (18) имеем

$$\mathrm{E} q_\mu(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i, \beta) = \xi^2 (\beta_0 - \beta)^2 + \sigma^2 - 2\beta_0 |\xi| \left(\mathrm{E} f_\mu(\tilde{x}_i, \beta) - \beta |\xi|\right). \tag{20}$$

Далее, с учетом (16) при $|\beta| \le d$ получаем

$$\left| \mathrm{E} f_\mu(\tilde{x}_i, \beta) - \beta |\xi| \right| = 2d \left| \mathrm{E} \delta_\mu(\xi + \varepsilon_{2i}) - p(\xi) \right| \le d\mu. \tag{21}$$

Из соотношений (20), (21) следует искомое неравенство (19).

Определим теперь для данной частной модели ААОНК β_μ как измеримое решение оптимизационной задачи (8), где $Z_i = (y_i, x_i)$, а функция q_μ задана равенством (18). Непосредственное применение теоремы 2 позволяет выписать условия состоятельности оценки β_μ.

Теорема 3. *Пусть в модели* (3) *выполнены соотношения* (11), *а величины* ε_{2i} *имеют каноническое распределение Лапласа. Предположим дополнительно, что выполнены следующие условия*:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^n \xi_i^2 > 0$;

2) *при некотором фиксированном действительном* $k \ge 1$ $\mathrm{E}|\varepsilon_{1i}|^{4k} < \infty$.

При $\chi \in (0,\ k-1/2)$ *положим*

$$r = \frac{1}{2} - \frac{1+2\chi}{4k}.$$

Пусть при определении ААОНК $\mu = \mu(n) = an^{-r}$, $a > 0$. *Тогда*:

а) $\beta_{\mu(n)} \to \beta_0$ *по вероятности*;

б) *при* $k > 3/2$ *и* $\chi \in (1,\ k-1/2)$ $\beta_{\mu(n)} \to \beta_0$ *п. н.*

Доказательство. Согласно лемме 1 функции (18) и (12) удовлетворяют соотношению (7) с точностью до постоянного множителя в правой части. Это дает возможность применить теорему 2 к оценке $\beta_{\mu(n)}$. Нужно проверить условие i), а также при $p = 1$ условия iv), v).

Согласно условию 1 при $n \ge n_0$, $|\beta| \le d$ имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[c(\zeta_i,\beta) - c(\zeta_i,\beta_0)\right] = (\beta-\beta_0)^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \ \ge\ \mathrm{const}\cdot(\beta-\beta_0)^2,$$

где $\mathrm{const} > 0$, и условие отделимости i) выполнено с функцией $\rho(t) = \mathrm{const}\cdot t^2$.

Далее, установим iv) при $\gamma_1(k) = 2k$. Для этого достаточно проверить, что при $\mu \le \mu_0$, $|\beta| \le d$, $|\xi| \le A$

$$\mathrm{E}\left|q_\mu(\tilde y_i, \tilde x_i, \beta)\right|^{2k} \le \frac{\mathrm{const}}{\mu^{2k}}, \tag{22}$$

где $\tilde y_i$, $\tilde x_i$ определены в доказательстве леммы 1. Проверка (22) основана на том, что $\delta_\mu(x) \le \mathrm{const}\cdot\mu^{-1}$, а также на том, что в силу условия 2 $\mathrm{E}\left(\tilde y_i^2\right)^{2k} \le$ $\le \mathrm{const}$ (см. определение q_μ в (18)).

Наконец, для проверки v) при $\gamma_2(k) = 2k$ достаточно установить, что при $\mu \le \mu_0$, $|\xi| \le A$

$$\mathrm{E}\sup_{|\beta|\le d}\left|\frac{\partial q_\mu(\tilde y_i, \tilde x_i, \beta)}{\partial\beta}\right|^{2k} \le \frac{\mathrm{const}}{\mu^{2k}}. \tag{23}$$

Поскольку

$$\frac{\partial q_\mu(\tilde y_i, \tilde x_i, \beta)}{\partial\beta} = -2\tilde y_i\left(|\tilde x_i| - 2\delta_\mu(\tilde x_i)\right) + 2\beta\left(\tilde x_i^2 - 2\right),$$

то и (23) доказывается аналогично (22).

Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Тогда в этой теореме в данном случае $\delta = k - 1/2$,

$$r = \frac{k-1/2-\chi}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1+2\chi}{4k}.$$

Утверждения теоремы 3 следуют теперь из утверждений а), б) теоремы 2. Доказательство завершено.

3.3. АОНК в явной модели с функцией регрессии, заданной в виде отношения. Пусть в модели (3) $s = 2$ и $g(\xi_i, \beta_0) = g_1(\xi_i, \beta_0)/g_2(\xi_i, \beta_0)$. Преобразуем ее в неявную модель (1) с функцией $G(\zeta_i, \beta) = g_2(\zeta_{2i}, \beta)\cdot\zeta_{1i} - g_1(\zeta_{2i}, \beta)$. Положим $c(\zeta_i, \beta) = G^2(\zeta_i, \beta)$ и построим АОНК согласно (8). Уравнение (7) можно решить, например, если g_2 — полином и g_1 — либо полином, либо экспоненциальная относительно ξ_i функция. Если $g_2(\xi_1, \beta)$ отделена от нуля, то условие i) с функцией (9) будет выполнено, когда

$$\forall n \ge 1 \colon \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(g(\xi_i, \beta_0) - g(\xi_i, \beta)\right)^2 \ \ge\ L\cdot\|\beta - \beta_0\|^2, \quad L > 0.$$

3.4. ААОНК типа L_1. Рассмотрим модель (3) с $s = 2$. Возможны два случая аппроксимационной адаптации в рамках L_1-подхода.

Предположим, что ε_{2i} имеют каноническое распределение Лапласа. Первая оценка основана на состоятельном L_1-оценивании в классической нелинейной регрессии. Функция контраста $c_0(\xi_i, \beta) = \mathrm{E}_{\beta_0}|y_i - g(\xi_i, \beta)|$, а соответствующее уравнение в свертках имеет вид

$$\mathrm{E}_{\zeta_i} q(\zeta_{1i}, x_i, \beta) = |\zeta_{1i} - g(\xi_i, \beta)|.$$

Функция c_0 порождает контраст C_n, удовлетворяющий i) с $\rho(t) = at^2$, $a > 0$ [9].

Теперь предположим, что $\{\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}\}$ независимы и одинаково распределены в соответствии с каноническим распределением Лапласа. Вторая оценка основана на функции контраста $c(\xi_i, \beta) = |g(\xi_i, \beta) - g(\xi_i, \beta_0)|$. Уравнение в свертках имеет вид $\mathrm{E}_{\zeta_i, \beta_0} q(x_i, y_i, \beta) = c(\xi_i, \beta)$. В условиях отделимости i) полагаем $\rho(t) = at$, $a > 0$.

Для обеих оценок уравнения в свертках лишь аппроксимационно разрешимы в смысле (7).

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на неравенстве Уиттла [10] и приведены в [11]. Там же более детально разобраны примеры 3.1, 3.3, 3.4.

1. *Neyman J., Scott E. L.* Consistent estimates based on partially consistent observations // Econometrica. – 1948. – **16**, № 1. – P. 1 – 32.
2. *Liese F., Vajda I.* Necessary and sufficient conditions for consistency of generalized M-estimates // Metrica. – 1995. – **42**. – P. 291 – 324.
3. *Stefanski L. A.* Correcting data for measurement error in generalized linear models // Communs Statist. Theory Meth. – 1989. – **18**, № 5. – P. 1715 – 1733.
4. *Nakamura T.* Corrected score function for error-in-variables models: Methodology and applications to generalized linear models // Biometrica. – 1990. – **77**, № 1. – P. 127 – 137.
5. *Buzas J. S., Stefanski L. A.* A note on corrected-score mean // Statist. Prob. Lett. – 1996. – **28**. – P. 1 – 8.
6. *Hanfelt J. J., Kuung-Yee Liang.* Approximate likelihoods for generalized linear error-in-variables models // J. R. Statist. Soc. B. – 1997. – **59**, № 3. – P. 627 – 637.
7. *Fazekas I., Kukush A.* Asymptotic properties of an estimator in nonlinear functional errors-in-variables models // Computers Math. Appl. – 1997. – **34**, № 10. – P. 23 – 39.
8. *Stefanski L. A., Carroll R. J.* Deconvoluting kernel density estimators // Statistics. – 1990. – **21**. – P. 169 – 184.
9. *Zwanzig S.* On L_1-norm estimators in nonlinear regression and in nonlinear error-in-variables models // Lect. Notes. Monograph Ser. – 1997. – **31**. – P. 101 – 118.
10. *Whittle P.* Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent variables // Theory Probab. and Appl. – 1960. – **5**. – P. 302 – 305.
11. *Kukush A., Zwanzig S.* On a corrected contrast estimator in the implicit nonlinear functional relation model // Technical Rept 97-12. – Hamburg: Inst. Math. Stochast. Univ. Hamburg, 1997. – 35 p.

Получено 25.05.2000