

Н. І. Вінтоняк, Р. С. Хапко

Гібридний метод розв'язування обернених граничних задач теорії потенціалу в частково необмежених областях з тріщиною

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. Л. Макаровим)

We consider an inverse boundary-value problem for the crack reconstruction in semiinfinite domains. The numerical solution is realized through the hybrid method. It consists in the iterative procedure, where some functional is minimized on each step of the iteration. The functional is formed from the corresponding nonlinear operator equation. The results of numerical experiments are presented.

1. Постановка задачі. Важливою проблемою багатьох прикладних застосувань є визначення місцезнаходження і форми тріщини в частково необмеженому тілі. Одним із способів швидкого неруйнівного тестування об'єктів та виявлення дефектів матеріалів є технологія термічного зображення. Вона полягає в нагріванні границі тіла, після чого здійснюється моніторинг теплового потоку. За цими температурно-потоківими вимірами робиться висновок про внутрішню структуру тіла.

Проблема ідентифікації тріщини за відомими температурою та потоком на границі області зводиться в стаціонарному випадку до розв'язування оберненої граничної задачі для рівняння Лапласа.

Припустимо, що $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ — частково необмежена область з границею Γ_χ , $\Gamma_\xi \subset D_1$ — розімкнена крива (тріщина), $D = D_1 \setminus \Gamma_\xi$. Під частково необмеженою областю розумітимемо одну з таких канонічних областей: півплощина, смуга, півсмуга і квадрант. Будемо також вважати, що $\Gamma_\xi \in C^2$. Нехай для заданої функції f обмежена функція $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D \tag{1}$$

і граничні умови Діріхле

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_\xi, \quad u = f \quad \text{на } \Gamma_\chi. \tag{2}$$

Обернена гранична задача полягає в наступному: за відомим тепловим потоком

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{на } \Sigma_\chi \subset \Gamma_\chi \tag{3}$$

знайти форму тріщини Γ_ξ . Тут ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі; Σ_χ — непорожня підмножина.

Питання єдиності форми тріщини (так званої ідентифіковності) за відомими функціями f і g досліджено в роботі [1].

Чисельне розв'язування сформульованої оберненої граничної задачі (1)–(3) може бути здійснено методом Ньютона, який передбачає розв'язування певної кількості прямих задач

на кожному кроці ітерації. Власне це приводить до значних затрат обчислювальних ресурсів і робить такий підхід неефективним. В [2] запропоновано так званий гібридний метод для розв'язування обернених задач теорії потенціалу, пов'язаних з реконструкцією внутрішньої частини двозв'язної границі обмеженої області. Його важливою перевагою є відсутність необхідності в розв'язуванні прямих задач. В [3, 4] цей метод використано для розв'язування обернених граничних задач дифракції. Метою даної роботи є розробка гібридного методу реконструкції тріщини для випадку частково необмежених областей. Часткова необмеженість області і розімкненість кривої, що реконструюється, вносять суттєву специфіку в гібридний метод порівняно з випадком обмеженої області [2]. Ідея методу полягає в послідовному здійсненні двох кроків. Спочатку, фіксуючи певну апроксимацію для Γ_ξ , шукається густина деякого інтегрального рівняння першого роду з неперервним ядром, отриманого за допомогою додаткової інформації про потік (3). На другому кроці для задоволення однорідної граничної умови на Γ_ξ фіксується густина і змінюється апроксимація для тріщини. Обидва кроки повторюються до виконання певного критерію зупинки ітераційного процесу. Можливість застосування методу підтверджена чисельними експериментами.

2. Апроксимація інтегральних операторів для оберненої граничної задачі. Для функцій $f \in C(\Gamma_\chi)$, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)w(x)$ і

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - x_{-1}^*||x - x_1^*|}}, \quad \tilde{\varphi} \in C(\Gamma_\xi), \quad x \in \Gamma_\xi,$$

де x_{-1}^* , x_1^* — граничні точки тріщини Γ_ξ , розглянемо такі інтегральні оператори:

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Gamma_\xi} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \quad (Bf)(x) = \int_{\Gamma_\chi} f(y) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \Gamma_\chi,$$

$$(N\varphi)(x) = \int_{\Gamma_\xi} \varphi(y) G(x, y) ds(y), \quad (Cf)(x) = \int_{\Gamma_\xi} f(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \Gamma_\xi,$$

$$(S\varphi)(x) = \int_{\Gamma_\xi} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \quad (Qf)(x) = \int_{\Gamma_\chi} f(y) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \Gamma_\xi.$$

Тут G — функція Гріна граничної задачі Діріхле для рівняння Лапласа в області D_1 ; ν — одинична нормаль до Γ_ξ та Γ_χ відповідно. Зауважимо, що оператор N має логарифмічну особливість в ядрі, оператор B — гіперсингулярну особливість, а ядра інших операторів є неперервними.

Використовуючи можливість представлення розв'язку граничної задачі (1), (2) у вигляді потенціалу простого шару з густиною φ і функцією Гріна в якості фундаментального розв'язку, з умови (3) отримуємо інтегральне рівняння першого роду

$$(K\varphi)(x) = g(x) + (Bf)(x), \quad x \in \Sigma_\chi. \quad (4)$$

Тоді слід функції u на Γ_ξ можна обчислити за формулою

$$u(x) = (N\varphi)(x) - (Cf)(x), \quad x \in \Gamma_\xi, \quad (5)$$

а його нормальну похідну на Γ_ξ подати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + (S\varphi)(x) - (Qf)(x), \quad x \in \Gamma_\xi \setminus \{x_{-1}^*, x_1^*\}. \quad (6)$$

Через неперервність ядра оператора K рівняння (4) є некоректно поставленою задачею. Для його чисельного розв'язування потрібно застосувати метод, що має регуляризуючі властивості. Можливість використання регуляризуючого методу Тихонова [5] забезпечується справедливістю такого твердження.

Теорема 1. *Оператор $K: L^2(w; \Gamma_\xi) \rightarrow L^2(\Gamma_\chi)$ ін'єктивний і має щільну множину значень.*

Доведення. Очевидно, що $\varphi \in L^2(w; \Gamma_\xi)$, $(K\varphi)(x) \in L^2(\Gamma_\chi)$. Ін'єктивність оператора можна показати за допомогою теореми Гольмгрена, принципу максимуму для гармонійних функцій і властивостей потенціалу простого шару. Обґрунтування щільності множини значень оператора K здійснюється через доведення ін'єктивності спряженого оператора $K^*: L^2(\Gamma_\chi) \rightarrow L^2(w; \Gamma_\xi)$.

Нехай криві Γ_ξ , Γ_χ і Σ_χ мають параметричні подання $\Gamma_\xi = \{\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)), -1 \leq t \leq 1\}$, $\Gamma_\chi = \{\chi(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t)), -\infty \leq t \leq \infty\}$ і $\Sigma_\chi = \{\chi(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t)), \sigma_1 \leq t \leq \sigma_2\}$ відповідно.

Параметризація операторів K , N і S здійснюється з використанням \cos -заміни [6] для позбавлення кореневої особливості в густині. В результаті перетворень отримуємо відповідні параметризовані оператори

$$\begin{aligned} (K\psi)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\sigma) H_1^{(1)}(s, \sigma) d\sigma, \quad s \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ (N\psi)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\sigma) \left[c_\pi \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} + H_2^{(1)}(s, \sigma) \right] d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi], \\ (S\psi)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\sigma) H_3^{(1)}(s, \sigma) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

де $\psi(s) := \tilde{\varphi}(\cos s)$; c_π — константа, яка залежить від вигляду частково необмеженої області. Ядра $H_\ell^{(1)}$ ($\ell = 1, 2, 3$) є неперервними, і їх гладкість залежить від гладкості тріщини Γ_ξ . Тут і далі для параметризованих операторів використано ті ж позначення, що і для відповідних граничних операторів.

Залежно від вигляду області D_1 , під час параметризації операторів B , C та Q здійснюються відповідні заміни (див. [7, 8]) для отримання інтегралів, визначених на всій дійсній осі:

$$\begin{aligned} (Bf)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{[f(\sigma)H_{1,1}^{(2)}(s, \sigma)]'_\sigma}{s-\sigma} + f(\sigma)H_{1,2}^{(2)}(s, \sigma) \right] d\sigma, \quad s \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ (Cf)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)H_2^{(2)}(s, \sigma) d\sigma, \quad (Qf)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)H_3^{(2)}(s, \sigma) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

де \tilde{f} отримана з f шляхом відповідної заміни, $H_{1,1}^{(2)}$, $H_{1,2}^{(2)}$, $H_\ell^{(2)}$ ($\ell = 2, 3$) — гладкі функції.

Для апроксимації параметризованих операторів K , N і S скористаємося тригонометричними квадратурами [6, 9, 10]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(s_j),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(s) f(s_j).$$

Тут R_j — відомі вагові функції, $s_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, 2M-1$, $M \in \mathbb{N}$.

Далі, враховуючи парність підінтегральних функцій, запишемо відповідні напівдискретизовані оператори

$$(K_M \psi)(s) = \frac{\psi(s_0)}{2M} H_1^{(1)}(s, s_0) + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M-1} \psi(s_j) H_1^{(1)}(s, s_j) + \frac{\psi(s_M)}{2M} H_1^{(1)}(s, s_M), \quad s \in [\sigma_1, \sigma_2],$$

$$(N_M \psi)(s) = \psi(s_0) \left[c_\pi R_0(s) + \frac{1}{2M} H_2^{(1)}(s, s_0) \right] + \psi(s_M) \left[c_\pi R_M(s) + \frac{1}{2M} H_2^{(1)}(s, s_M) \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M-1} \psi(s_j) \left[c_\pi R_j(s) + c_\pi R_{2M-j}(s) + \frac{1}{M} H_2^{(1)}(s, s_j) \right], \quad s \in [0, 2\pi]$$

i

$$(S_M \psi)(s) = \frac{\psi(s_0)}{2M} H_3^{(1)}(s, s_0) + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M-1} \psi(s_j) H_3^{(1)}(s, s_j) + \frac{\psi(s_M)}{2M} H_3^{(1)}(s, s_M), \quad s \in [0, 2\pi].$$

Для апроксимації операторів B , C та Q використаємо sinc-квadrатури [7, 8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) d\sigma \approx h_\infty \sum_{i=-M_1}^{M_1} f(ih_\infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\sigma)}{s-\sigma} d\sigma \approx \sum_{i=-M_1}^{M_1} f(ih_\infty) R_{i,\infty}(s).$$

Тут $R_{i,\infty}$ — відомі вагові функції; $h_\infty = c/\sqrt{M_1}$, $M_1 \in \mathbb{N}$, $c > 0$.

Отримуємо апроксимації

$$(B_{M_1} f)(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-M_1}^{M_1} [\tilde{f}(ih_\infty) H_{1,1}^{(2)}(s, ih_\infty) R_{i,\infty}(s) + h_\infty \tilde{f}(ih_\infty) H_{1,2}^{(2)}(s, ih_\infty)], \quad s \in [\sigma_1, \sigma_2],$$

$$(C_{M_1} f)(s) = \frac{h_\infty}{2\pi} \sum_{i=-M_1}^{M_1} \tilde{f}(ih_\infty) H_2^{(2)}(s, ih_\infty), \quad s \in [0, 2\pi]$$

i

$$(Q_{M_1} f)(s) = \frac{h_\infty}{2\pi} \sum_{i=-M_1}^{M_1} \tilde{f}(ih_\infty) H_3^{(2)}(s, ih_\infty), \quad s \in [0, 2\pi].$$

Для одержаних наближень справедливі такі оцінки похибок [6–8].

Теорема 2. Нехай $0 \leq q \leq p$ і $p > 1/2$. Для $\psi \in H_e^p[0, 2\pi]$ мають місце оцінки

$$\|(S - S_M)\psi\|_{q+1} \leq C_1 M^{q-p}, \quad \|(N - N_M)\psi\|_q \leq C_2 M^{q-p}, \quad \|(K - K_M)\psi\|_q \leq C_3 M^{q-p}.$$

Для $f \in \mathbf{H}(D_d)$ мають місце оцінки

$$\|(B - B_{M_1})f\|_\infty \leq C_4 e^{-C_5 M_1}, \quad \|(Q - Q_{M_1})f\|_\infty \leq C_6 e^{-C_7 M_1}$$

і

$$\|(C - C_{M_1})f\|_\infty \leq C_8 M_1^{1/2} e^{-C_9 M_1}.$$

Тут $C_\ell > 0$, $\ell = 1, \dots, 9$, $H_e^p[0, 2\pi]$ – простір Соболева парних 2π -періодичних функцій; $\mathbf{H}(D_d)$ – простір функцій, аналітичних в смугі D_d і таких, що $|f(z)| \leq C|e^{\beta z}|(1+|e^z|)^{-2\beta}$, $C > 0$, $\beta > 0$ (див. [8]).

Отже, з рівняння (4) із врахуванням отриманих апроксимацій операторів та методу регуляризації Тихонова, для знаходження апроксимації $\tilde{\psi}_M$ для

$$\psi_M = (\psi(s_0), \psi(s_1), \dots, \psi(s_M))^T$$

одержуємо рівняння другого роду

$$(\alpha I + \tilde{K}_M^* \tilde{K}_M) \tilde{\psi}_M = \tilde{K}_M^* (g + \tilde{B}_{M_1} f), \quad (7)$$

де $\alpha > 0$ – параметр регуляризації; \tilde{K}_M , \tilde{B}_{M_1} – відповідні дискретизовані оператори.

Наближені значення u на Γ_ξ обчислюються відповідно до (5) за формулою

$$u(\xi(\cos s)) \approx (N_M \tilde{\psi}_M)(s) - (C_{M_1} f)(s), \quad s \in [0, \pi]. \quad (8)$$

Згідно з (6), для нормальної похідної можна записати апроксимацію

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi(\cos s_i)) \approx -\frac{\tilde{\psi}(s_i)}{\sin s_i} + (S_M \tilde{\psi}_M)(s_i) - (Q_{M_1} f)(s_i), \quad i = 1, \dots, M-1. \quad (9)$$

3. Гібридний метод. Визначимо нелінійний оператор A , який відображає розімкнену криву Γ_ξ на слід функції u на Γ_ξ . В результаті, обернена гранична задача (1)–(3) зводиться до розв'язування нелінійного рівняння

$$A(\Gamma_\xi) = 0. \quad (10)$$

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3. Оператор $A: C^2[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$ є диференційований за Фреше і його похідна для випадку тріщини з параметричним представленням Γ_ξ має вигляд

$$A'_\xi h = (\text{grad } u_\xi, h),$$

де $h \in C^2$ – векторне поле (мале збурення) в \mathbb{R}^2 .

Доведення. Доведення ґрунтується на означенні похідної Фреше. Нехай h – деяке мале збурення, вибране таким чином, що розімкнена крива $\Gamma_{\xi, h} = \{\xi(t) + h(t), t \in [-1; 1]\}$ належить D_1 .

Згідно з формулою Тейлора

$$u(\xi + h)(t) = u(\xi(t)) + (\text{grad } u(\xi(t)), h(t)) + O(|h|^2), \quad t \in [-1; 1],$$

одержуємо

$$A(\xi + h) - A(\xi) = u_{\xi, h} - u_{\xi} = (\text{grad } u_{\xi}, h) + O(|h|^2).$$

Отже,

$$\|A(\xi + h) - A(\xi) - A'_{\xi}h\| = O(\|h\|_{C^2}), \quad \|h\|_{C^2} \rightarrow 0,$$

і доведення теореми впливає із означення похідної Фреше.

Лінеаризація рівняння (10) методом Ньютона приводить до лінійного рівняння

$$A'_{\xi}h + A(\Gamma_{\xi}) = 0$$

відносно корекції h з фіксованою біжучою апроксимацією тріщини Γ_{ξ} . Враховуючи результати теореми 3, до розв'язування отримуємо лінійне рівняння

$$u_{\xi} + (\text{grad } u_{\xi}, h) = 0, \tag{11}$$

де u_{ξ} — слід розв'язку задачі (1)–(2) на Γ_{ξ} . Наближене розв'язування рівняння (11) здійснюється за допомогою методу колокації з використанням многочленів Чебишева першого роду в якості базисних функцій і регуляризуючого методу найменших квадратів.

Описаний спосіб еквівалентний мінімізації відповідного квадратичного функціоналу, побудованого на основі цього рівняння.

Сформулюємо алгоритм гібридного методу реконструкції тріщини.

Задати початкове наближення тріщини ξ_0 .

Розв'язати систему рівнянь (7).

Знайти апроксимацію u_{ξ_k} на Γ_{ξ_k} за формулою (8).

Обчислити градієнт

$$\text{grad } u_{\xi_k} = \frac{\partial u_{\xi_k}}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{\partial u_{\xi_k}}{\partial \nu} \vec{\nu},$$

де $\vec{\theta}$ — одиничний вектор дотичної. Обчислення нормальної похідної здійснюється за формулою (9), тангенціальної — через диференціювання інтерполяційного тригонометричного многочлена, побудованого для u_{ξ_k} .

Знайти мінімум функціоналу

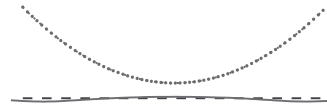
$$\|\sqrt{|1 - t^2|} [u_{\xi_k(t)} + (\text{grad } u_{\xi_k(t)}, h(t))]\|_{L^2[-1;1]}^2 - \beta \|\Gamma_{\xi_k+h}\|^2 \rightarrow \underbrace{\min}_h, \tag{12}$$

де $\beta \geq 0$ — параметр. Другий доданок у функціоналі (12) має забезпечити знаходження апроксимації тріщини максимальної довжини. Мінімізація функціоналу (12) здійснюється методом Левенберга–Маквардта. Зауважимо, що в першому доданку введено спеціальну вагову функцію для уникнення проблем при обчисленні апроксимації нормальної похідної в граничних точках тріщини (див. (9)).

Знайти нове наближення $\xi_{k+1} := \xi_k + h$.



Реконструкція параболи



Реконструкція відрізка

Рис. 1. Реконструкція тріщини у верхній півплощині

Виконувати ітераційний процес, поки $\|h\|_{L^2[-1;1]} < \epsilon$, де $\epsilon > 0$ — досить мале число.

4. Чисельні експерименти. Для чисельних експериментів за частково необмежену область взято верхню півплощину. Потік g на частині границі Σ_χ для відомої форми тріщини та граничної функції f генерується шляхом розв'язування методом граничних інтегральних рівнянь відповідної прямої граничної задачі. Гранична функція f та згенерований потік g беруться як вхідні дані для оберненої граничної задачі (1)–(3).

На рис. 1 показано результати роботи гібридного методу для двох прикладів: реконструкція тріщини у вигляді параболи і тріщини у вигляді відрізка, після виконання 10-ти ітерацій з граничною функцією $f = 1$. Тонкою суцільною лінією зображено отриманий наближений результат, штриховою — точний розв'язок, пунктирна лінія відповідає вибраному початковому наближенню.

Отже, як бачимо, запропонований метод дає можливість здійснити реконструкцію тріщини у частково необмеженій області за винятком граничних точок тріщини, що викликано особливостями обчислення. Недоліком методу є відсутність апіорної інформації про вибір параметрів регуляризації.

1. *Friedman A., Vogelius M.* Determining crack by boundary measurement // *Indiana Univ. Math. J.* – 1989. – **38**. – P. 527–556.
2. *Chapko R., Kress R.* A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory // *J. of Ill-Posed and Inverse Problems.* – 2005. – **13**. – P. 1–14.
3. *Kress R., Serranho P.* A hybrid method for two-dimensional crack reconstruction // *Inverse Problems.* – 2005. – **21**. – P. 773–784.
4. *Serranho P.* A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance // *Ibid.* – 2006. – **22**. – P. 663–680.
5. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1976.
6. *Kress R.* Linear integral equations. 2nd. ed. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
7. *Винтоняк Н., Ханко Р.* Про використання sinc квадратур для наближеного обчислення інтегралів з різними типами особливостей // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* – 2006. – Вип. 11. – С. 35–42.
8. *Stenger F.* Numerical methods based on sinc and analytic functions. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
9. *Ханко Р. С.* Метод квадратур для інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі // *Докл. АН України.* – 1993. – № 5. – С. 36–40.
10. *Chapko R., Kress R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind // In Agarwal, ed.: *World Scientific Series in Applicable Analysis.* – Vol. 2. Contributions in Numerical Mathematics. – Singapore: World Scientific, 1993. – P. 127–140.

Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 06.12.2006