УДК 517.929

Д. Х. Хусанов (Ташкент. техн. ун-т, Узбекистан)

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕАВТОНОМНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

We present conditions for the existence, uniqueness, and continuous dependence of solutions of functional differential equations of neutral type on initial data.

Наведено умови існування, єдиності та неперервної залежності від початкових даних розв'язків функціонально-диференціального рівняння нейтрального типу.

Пусть $R=(-\infty, +\infty)$ — действительная ось, $R^+=[0, +\infty)$, R^p — действительное евклидово пространство p-векторов x с нормой $|x|$, $h>0$ — некоторое действительное число, $C_{[\alpha,\beta]}$ — банахово пространство непрерывных функций $\varphi:[\alpha, \beta]\to R^p$ с нормой $\|\varphi\|=\sup(|\varphi(s)|, \alpha\le s\le\beta)$, $C_H=(\varphi\in C_{[-h,0]}: \|\varphi\|<H)$, для непрерывной функции $x:(-\infty, +\infty)\to R^n$ и каждого $t\in R$ функция $x_t\in C_{[-h,0]}$ определяется равенством $x_t(s)=x(t+s)$ для $-h\le s\le 0$.

Определение 1. *Пусть* $\Gamma\subset R^+\times C_{[-h,0]}$ *открыто и* $F:\Gamma\to R^n$, $G:\Gamma\to R^n$ — *заданные непрерывные функции. Дифференциальное уравнение вида*

$$\frac{d}{dt}[x(t)-G(t,x_t)] = F(t,x_t) \tag{1}$$

называется функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа (НФДУ), определенным на Γ.

Определение 2. *Функция* $x(t)$ *называется решением уравнения* (1) *на* $[\alpha-h, \alpha+A)$, *если* $\alpha\in R$, $A>0$ *таковы, что* $x_t\in C_{[\alpha-h,\alpha+A)}$, *причем* $(t,x_t)\in\Gamma$ *при* $t\in[\alpha, \alpha+A)$, *выражение* $x(t)-G(t,x_t)$ *имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению* (1) *на* $[\alpha, \alpha+A)$.

Для заданных $\alpha\in R$, $\varphi\in C_{[-h,0]}$, $(\alpha,\varphi)\in\Gamma$ *функция* $x(t,\alpha,\varphi)$ *является решением, начинающимся в точке* (α,φ), *если имеется* $A>0$ *такое, что* $x(t,\alpha,\varphi)$ — *решение уравнения* (1) *на* $[\alpha-h, \alpha+A)$ *и* $x_t(\alpha,\varphi)$ *при* $t=\alpha$ *равно* φ, *т. е.* $x_\alpha(\alpha,\varphi)=\varphi$.

Приведем доказательства теорем существования, единственности и непрерывной зависимости решений НФДУ, используя следующие определения и теоремы из [1].

Определение 3. *Если* B — *ограниченное множество в банаховом пространстве* X, *то мера Куратовского* $L(B)$ *некомпактности множества* B *есть* $L(B)=\inf\{d:B$ *имеет конечное покрытие с диаметром* $<d\}$.

Свойства меры $L(B)$ *таковы:*

1) $L(B)=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{cl}(B)$ — *компакт;*

2) $L(A\cup B)=\max(L(A),L(B))$.

Определение 4. *Пусть* L — *мера Куратовского некомпактности множества в пространстве* X *и* $T:X\to X$ — *непрерывное отображение. Пусть* T *также ограничено, т. е. отображает ограниченные множества в ограниченные множества. Отображение* T *называется* L*-сжимающим, если имеется постоянная* k, $0\le k<1$, *такая, что* $L(TB)\le kL(B)$, *где* B — *ограниченное множество из* X.

Теорема Дарбу. *Если* B — *замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства и отображение* $T:B\to B$ L*-сжимающее, то* T *имеет в* B *неподвижную точку.*

Покажем, что можно выбрать γ и β так, чтобы отображение $T = S + U$: $A(\gamma, \beta) \to A(\gamma, \beta)$.

Поскольку F — непрерывная функция, то существуют $\bar{\bar{\beta}}$ и $\bar{\bar{\gamma}} > 0$, для которых $|F(\alpha + t, \varphi + \psi)| < M$ при $|t| < \bar{\bar{\gamma}}$, $\|\psi\| < \bar{\bar{\beta}}$, где M — константа. Выберем $\bar{\beta}$, $0 < \bar{\beta} < \bar{\bar{\beta}}$, и $\bar{\gamma} < \bar{\bar{\gamma}}$ так, чтобы $\|\tilde{\varphi}_t - \varphi\| < \bar{\bar{\beta}} - \bar{\beta}$ при $t \in I_{\bar{\gamma}}$. Такой выбор возможен в силу определения функции $\tilde{\varphi}_t(t)$. Таким образом, $\|y_t + \tilde{\varphi}_t - \varphi\| < \bar{\beta} + \bar{\bar{\beta}} - \bar{\beta} = \bar{\bar{\beta}}$ для всех $y \in A(\bar{\gamma}, \bar{\beta})$.

Оценим

$$|G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t + y_t) - G(\alpha, \varphi)| = |G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t + y_t) - G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t) +$$

$$+ G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t) - G(\alpha, \varphi)| \le \lambda \|y_t\| + |G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t) - G(\alpha, \varphi)| \le$$

$$\le \lambda \bar{\beta} + |G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t) - G(\alpha, \varphi)|.$$

Поскольку $\lambda < 1$, то существует число $n \in R$ такое, что $\lambda + 1/n \le 1$. Выберем $\gamma < \bar{\gamma}$ так, чтобы $|G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t) - G(\alpha, \varphi)| \le \bar{\beta}/2n$ при $|t| < \gamma$ и $M\gamma < \bar{\beta}/2n$. Такой выбор возможен в силу непрерывности G и определения $\tilde{\varphi}_t$. Переобозначим $\beta = \bar{\beta}$. Тогда $|T(y)(t)| \le \lambda\beta + \beta/n \le \beta$ для всех $t \in I_\gamma$.

Таким образом, существуют γ и β такие, что $T = S + U : A(\gamma, \beta) \to A(\gamma, \beta)$.

В силу определения γ и β также имеем $|U(y)(t)| \le (\lambda + 1/2n)\beta$, $t \in I_\gamma$, где $\lambda + 1/2n < 1$. Так как $L(A(\gamma, \beta)) = \beta$, где L — мера Куратовского некомпактности множества, то U — L-сжатие на $A(\gamma, \beta)$. Для отображения $S(y)(t)$ находим оценку

$$|S(y)(t) - S(y)(\tau)| = \left| \int_\tau^t F(\alpha + s, \tilde{\varphi}_s + y_s) ds \right| \le M|t - \tau|, \quad |S(y)(t)| < \beta$$

для $t \in I_\gamma$.

Следовательно, в силу свойств меры Куратовского $S + U$ — L-сжатие на $A(\gamma, \beta)$. Согласно теореме Дарбу, на множестве $A(\gamma, \beta)$ имеется неподвижная точка отображения $T = S + U$, являющаяся решением уравнения (1) с начальной точкой (α, φ).

Теорема доказана.

Теорема 2 (непрерывная зависимость решения от начальных данных). *Пусть $\Gamma \subset R \times C$ открыто, функции $F, G : \Gamma \to R^n$ непрерывны на Γ, причем $G(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|G(t_2, \varphi_2) - G(t_1, \varphi_1)| \le N|t_2 - t_1| + \lambda\|\varphi_2 - \varphi_1\|, \tag{5}$$

где $(t_i, \varphi_i) \in \Gamma$, $i = 1, 2, N$, $\lambda \in (0, 1)$ — константы.

Пусть $x^0(t) = x^0(t, \alpha^0, \varphi^0)$ — решение уравнения (1), которое существует и единственно на $[\alpha^0 - h, b]$, $(\alpha^0, \varphi^0) \in \Gamma$. Если $(\alpha^k, \varphi^k) \in \Gamma$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию $\alpha^k \to \alpha^0$, $\varphi^k \to \varphi^0$ при $k \to \infty$, а $x^k(t) = x(t, \alpha^k, \varphi^k)$ — решение уравнения (1), то для $\varepsilon > 0$ существует $k_1(\varepsilon)$ такое, что $x^k(t)$, $k \ge k_1(\varepsilon)$, определено на $[\alpha^0 - h + \varepsilon, b]$ и $x^k \to x_0$ равномерно на $[\alpha^0 - h + \varepsilon, b]$ при $k \to +\infty$.

Доказательство. Очевидно, что множество $W^0 \subset \Gamma$, $W^0 = \{(t, x_t^0) : t \in \in [\alpha, b]\}$, компактно в $R \times C_{[-h, 0]}$. Выберем V^0-окрестность W^0, в которой F

ограничена. Положим $W = W^0 \cup \{(\alpha^k, \varphi^k) : k \geq k_0\}$, где k_0 настолько велико, что $W \subset V^0$. Пусть

$$V^0 = \{(\alpha + t, \varphi + \psi) : (\alpha, \varphi) \in W, \ |t| < \bar{\bar{\gamma}}, \ \|\psi\| < \bar{\bar{\beta}}\},$$

$$T(\alpha, \varphi, y)(t) = G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t + y_t) - G(\alpha, \varphi) + \int_0^t F(\alpha + s, \tilde{\varphi}_s + y_s)\, ds$$

(все обозначения такие же, как в теореме о существовании решения), где $(\alpha, \varphi) \in W$. Покажем, что можно выбрать γ и β так, что $T : W \times A(\gamma, \beta) \to A(\gamma, \beta)$. Для $(t, \psi) \in V^0$ имеем константу M такую, что $|F(\alpha + t, \varphi + \psi)| < M$ при $(\alpha, \varphi) \in W$, $|t| < \bar{\bar{\gamma}}$, $\|\psi\| < \bar{\bar{\beta}}$. Выберем $\bar{\beta}$, $0 < \bar{\beta} < \bar{\bar{\beta}}$, и $\bar{\gamma} < \bar{\bar{\gamma}}$ так, чтобы $\|\tilde{\varphi}_t - \varphi\| < \bar{\bar{\beta}} - \bar{\beta}$ для всех $(t, \alpha, \varphi) : (\alpha, \varphi) \in W$, $t \in I_{\bar{\gamma}}$. Поскольку W — компакт, то такой выбор возможен. Таким образом, $\|y_t + \tilde{\varphi}_t - \varphi\| < \bar{\bar{\beta}}$ для всех $y \in A(\bar{\gamma}, \bar{\beta})$.

Переобозначим $\dot{\beta} = \bar{\beta}$. В силу непрерывности G, определения $\tilde{\varphi}_t$ и компактности W можно выбрать $\gamma < \bar{\gamma}$ такое же, как и при доказательстве теоремы о существовании решения. Тогда получим $|T(\alpha, \varphi, y)(t)| \leq \beta$ для всех $t \in I_\gamma$, $y \in A(\gamma, \beta)$, $(\alpha, \varphi) \in W$. Таким образом, $T : W \times A(\gamma, \beta) \to A(\gamma, \beta)$. Значит, в силу теоремы 1 для любой точки $(\alpha, \varphi) \in W$ на отрезке $[\alpha - h, \alpha + \gamma]$ существует решение $x(\alpha, \varphi, t)$, начинающееся в (α, φ).

Определим для произвольного $\Delta > 0$ велечину

$$\rho(\Delta) = \max_{t \geq 0} |y(t + \Delta, \alpha, \varphi) - y(t, \alpha, \varphi)|,$$

где $(\alpha, \varphi) \in W$; $M_1 = M + N$.

В силу (4) и (5) имеем

$$\rho(\Delta) = \max_{t \geq 0} |y(t + \Delta, \alpha, \varphi) - y(t, \alpha, \varphi)| = \max_{t \geq 0} \Bigg| G(t + \Delta + \alpha, \tilde{\varphi}_{t+\Delta} + y_{t+\Delta}) -$$

$$- G(t + \alpha, \varphi_t + y_t) + \int_t^{t+\Delta} F(s + \alpha, \tilde{\varphi}_s + y_s)\, ds \Bigg| \leq M_1 \Delta +$$

$$+ \max_{t \geq 0} \lambda \|\tilde{\varphi}_{t+\Delta} + y_{t+\Delta} - \varphi_t - \tilde{y}_t\| \leq M_1 \Delta + \lambda \max_{t \geq 0} (\|\tilde{\varphi}_{t+\Delta} - \tilde{\varphi}_t\| + \lambda \|y_{t+\Delta} - y_t\|) \leq$$

$$\leq \lambda \rho(\Delta) + \lambda \max_{\delta \leq \Delta} |y(\delta)| + \lambda \max_{0 \leq t \leq h} \|\tilde{\varphi}_{t+\Delta} + \tilde{\varphi}_t\| + M_1 \Delta.$$

Из (4) и (5) следует

$$\max_{\delta \leq \Delta} |y(\delta)| \leq \max_{\delta \leq \Delta} \left| G(\delta + \alpha, \tilde{\varphi}_\delta + y_\delta) - G(\alpha, \varphi) + \int_0^\delta F(s + \alpha, \tilde{\varphi}_s + y_s)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \lambda \max_{\delta \leq \Delta} |y(\delta)| + \lambda \max_{\delta \leq \Delta} \|\tilde{\varphi}\delta - \varphi\| + M_1 \Delta.$$

Значит,

$$\rho(\Delta) \leq \left(\frac{\lambda}{1 - \lambda}\right)^2 \max_{\delta \leq \Delta} \|\tilde{\varphi}\delta - \varphi\| + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \max_{0 \leq t \leq h} \|\tilde{\varphi}_{t+\Delta} - \tilde{\varphi}_t\| + M_1 \Delta \left(\frac{1}{1 - \lambda}\right)^2. \quad (6)$$

Поскольку φ принадлежит компактному множеству в $C_{[-h,0]}$, в силу определения $\tilde{\varphi}_t$ заключаем, что $y(t, \alpha, \varphi) \in K \subset C_{[-h,\gamma]}$ для всех $(\alpha, \varphi) \in W$, где K — компактное множество в $C_{[-h,\gamma]}$.

Рассмотрим $y^k(t) = x^k(\alpha^k + t) - \tilde{\varphi}^k(t)$, $t \geq -h$. Поскольку $y^k(t)$ принадлежат компактному множеству $K \subset C_{[-h,\gamma]}$, то существует подпоследовательность y^{k_n}, равномерно сходящаяся на $[-h, \gamma]$ к некоторой функции y^*. А так как $y^k = T(\alpha^k, \varphi^k, y^k)$, а T непрерывен, то $y^* = T(\alpha^0, \varphi^0, y^0) = y^0$. Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности y^{k_n} имеет сходящуюся подпоследовательность, которая сходится к y^0. Следовательно, последовательность y^k сходится к y^0. Учитывая, что $x^k = y^k + \tilde{\varphi}^k$, убеждаемся в справедливости теоремы на интервале $[\alpha^0 - h, \alpha^0 + \gamma]$.

Доказательство завершаем последовательным построением интервалов длины γ, что возможно в силу сделанных выше построений.

Теорема 3 (единственность решения). *Пусть Γ — открытое множество в $R \times C$, $F, G : \Gamma \to R$ — непрерывные функции, G удовлетворяет условию* (5) *и F удовлетворяет условию Липшица по φ*

$$|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leq L \| \varphi - \psi \|, \tag{7}$$

где L — константа, $(t, \varphi), (t, \psi) \in \Gamma$.

Если $(\alpha, \varphi) \in \Gamma$, то решение уравнения (1), *начинающееся в (α, φ), единственно.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — решения уравнения (1) на $[\alpha - h, \alpha + \gamma]$, причем $x_\alpha = y_\alpha = \varphi$. Тогда

$$x(t) - y(t) = G(t, x_t) - G(t, y_t) + \int_\alpha^t [F(s, x_s) - F(s, y_s)] ds, \qquad t \geq \alpha,$$

$$x_\alpha - y_\alpha = 0.$$

Выберем $\bar{\gamma}$ такое, что $L\bar{\gamma} + \lambda < 1$. Тогда для $t \in I_{\bar{\gamma}}$

$$|x(t) - y(t)| \leq \|x_t - y_t\| + \int_\alpha^t L \|x_s - y_s\| ds \leq$$

$$\leq \lambda \|x_t - y_t\| + L\bar{\gamma} \max_{\alpha \leq s \leq t} \|x_s - y_s\| \leq (\lambda + L\bar{\gamma}) \max_{\alpha \leq s \leq t} \|x_s - y_s\|.$$

Значит, $x(t) = y(t)$ для $t \in I_{\bar{\gamma}}$. Доказательство теоремы можно завершить, последовательно построив интервалы длины $\bar{\gamma}$.

Теорема 4. *Пусть Γ — открытое множество в $R \times C$, $F : \Gamma \to R^n$ вполне непрерывна, т. е. F непрерывна и отображает замкнутые ограниченные множества из Γ в ограниченные множества R^p, $G \subset C(\Gamma, R^p)$ удовлетворяет* (5) *и x — непродолжимое решение уравнения* (1) *на $[\alpha - h, b[$. Тогда для любого замкнутого ограниченного множества $U \subset \Gamma$ имеется t_U такое, что (t, x_t) не принадлежит U при $t_U \leq t < b$, при этом траектория (t, x_t) непродолжимого решения приближается к границе Γ при $t \to b^-$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы не верно. Тогда существует последовательность $t_k \to b^-$ такая, что $(t_k, x_{t_k}) \in U$ для всех k. Значит, $\{(t, x_t) : \alpha \leq t < b\} \subset W$, где $W \subset \Gamma$ ограничено, и все точки замыкания

$\overline{Q}$ множества $Q = \{(t, x_t)\colon \alpha \le t < b\}$ принадлежат Γ. В противном случае существовала бы последовательность (τ_k, x_{τ_k}), стремящаяся при $\tau_k \to b^-$ к границе Γ, а это противоречит существованию последовательности $\{t_k\}$, указанной выше. Значит, существует постоянная M такая, что $|F(t, \psi)| \le M$ для $(t, \psi) \in \overline{Q}$. Так же, как и в теореме 1, для $\Delta > 0$ получаем

$$|x(t+\Delta) - x(t)| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} \max_{-h \le s \le 0} |x(s+\Delta) - \varphi(s)| + \frac{M}{1-\lambda}\Delta.$$

Значит, $\{(t, x_t)\colon \alpha \le t < b\}$ принадлежит компактному множеству в Γ, а это противоречит теореме 3, что и доказывает теорему 4.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
2. *Павликов С. В., Хусанов Д. Х.* Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. – М., 1996. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ, NB-96-881.

Получено 20.06.2001