УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВ S_φ^p В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ

We continue the study of approximation characteristics of the spaces S_φ^p introduced earlier. In particular, we establish direct and inverse theorems on the approximation of elements of these spaces. We also find the exact values of upper bounds of m-term approximations q-ellipsoids in the spaces S_φ^q in metrics of the spaces S_φ^p.

Продовжуються дослідження апроксимативних властивостей просторів S_φ^p, введених раніше. Зокрема, встановлено прямі та обернені теореми наближення елементів цих просторів, а також знайдено точні значення верхніх меж m-членних наближень q-еліпсоїдів у просторах S_φ^q в метриках просторів S_φ^p.

1. Пространства S_φ^p. В работе [1] введены пространства S_φ^p следующим образом.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит φ, определено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\bar{z}$ — число, комплексно сопряженное с z;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2; y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — произвольные числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $f \in \mathfrak{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k \in \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\},$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathfrak{X}) = \left\{ f \in \mathfrak{X}: \sum_{k=1}^\infty \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{1}$$

Элементы $x, y \in S_\varphi^p$ считаются тождественными, если при всех $k \in \mathcal{N}$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Таким образом, множество S_φ^p порождается пространством $\mathfrak{X}$, системой φ и числом p.

Для векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определим расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho(x, y)_p \overset{\mathrm{df}}{=} \| x - y \|_p = \| x - y \|_{\varphi, p} =$$
$$= \| \widehat{(x-y)}_\varphi(k) \|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{1/p}.$$

Нулевым элементом пространства S_φ^p называется вектор θ, для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in \mathcal{N}$. Расстояние $\rho(\theta, x)$, $x \in S_\varphi^p$, называется нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_p$. Таким образом,

$$\|x\|_p = \|x\|_{\varphi,p} = \rho(\theta, x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\hat{x}_{\varphi}(k)\right|^p\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Множество S_{φ}^{p} — линейное метрическое пространство: операции сложения векторов и умножения их на числа, определенные во всем $\mathfrak{X}$, остаются пригодными и для любой пары $x, y \in S_{\varphi}^{p}$, и для любых чисел λ и μ: $\lambda x + \mu y = z \in S_{\varphi}^{p}$. В самом деле, поскольку $z \in \mathfrak{X}$, то $\hat{z}(k) = \lambda\hat{x}(k)+\mu\hat{y}(k)$, и если $p \geq 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\|z\|_p \leq \lambda\|x\|_p + \mu\|y\|_p;$$

если же $p \in (0, 1)$, то, так как для любых двух чисел a и b

$$|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \quad 0 \leq p < 1,$$

имеем

$$\|z\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda\hat{x}(k)+\mu\hat{y}(k)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\lambda^p\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}(k)|^p + \mu^p\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{y}(k)|^p\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq 2^p(\lambda\|x\|_p + \mu\|y\|_p),$$

т. е. всегда $z \in S_{\varphi}^{p}$.

Ясно, что при $p \geq 1$ норма, введенная равенством (2), удовлетворяет всем необходимым аксиомам, поэтому при $p \geq 1$ S_{φ}^{p} — линейное нормированное пространство, содержащее ортонормированную систему φ.

Ясно также, что при $p = 2$ пространство S_{φ}^{2} при условии его полноты является гильбертовым. При всех остальных $p \in (0, \infty)$ пространства S_{φ}^{p} наследуют важнейшие свойства гильбертовых пространств — равенство Парсеваля в виде соотношения (2) и минимальное свойство частных сумм ряда Фурье, которое формулируется следующим образом.

Предложение 1. *Пусть* $f \in S_{\varphi}^{p}$, $p \in (0, \infty)$,

$$S[f] = S[f]_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}(k)\varphi_k \tag{3}$$

— ряд Фурье элемента f *по системе* φ *и*

$$S_n(f) = S_n(f)_{\varphi} = \sum_{k=1}^{n}\hat{f}(k)\varphi_k, \quad k \in \mathcal{N},$$

— частные суммы этого ряда.

Среди всех сумм вида

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$$

при данном $n \in \mathcal{N}$ *наименее уклоняется от* f *частная сумма* $S_n(f)$:

$$\inf_{\alpha_k}\|f-\Phi_n\|_p = \|f-S_n(f)\|_p.$$

При этом

$$\|f-S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^{n}\left|\hat{f}(k)\right|^p. \tag{4}$$

Доказательство этого утверждения следует из равенства (2), согласно которому

$$\| f - \Phi_n \|_p^p = \sum_{k=1}^{n} \left| \hat{f}(k) - \alpha_k \right|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \hat{f}(k) \right|^p.$$

При $n \to 0$ правая часть в (4) стремится к нулю. Отсюда следует, что *для любого элемента f из S_φ^p его ряд Фурье* (3) *сходится к f*, т. е. система φ полна в S_φ^p и S_φ^p сепарабельно.

Отметим еще одно из важнейших свойств пространств S_φ^p : *если система $\varphi' = \{\varphi_k'\}_{k=1}^{\infty}$ получена из системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ путем любой перестановки членов последней, то*

$$S_\varphi^p = S_{\varphi'}^p, \quad \text{и} \quad \|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p} \quad \forall f \in S_\varphi^p, \tag{5}$$

что непосредственно следует из (1) и (2).

Это замечание позволяет обобщить утверждение предложения 1 следующим образом.

Предложение 2. *Пусть $\{ g_\alpha \}$ — семейство ограниченных подмножеств множества $\mathcal{N}$, зависящих от параметра α и таких, что любое число $n \in \mathcal{N}$ принадлежит всем множествам g_α с достаточно большими индексами α. Пусть, далее, $f \in S_\varphi^p$ и*

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \hat{f}(k) \varphi_k$$

— частная сумма ряда $S[f]_\varphi$, соответствующая множеству g_α. Тогда среди всех сумм вида

$$\Phi_\alpha = \sum_{k \in g_\alpha} c_k \varphi_k$$

наименее уклоняется от f частная сумма $S_\alpha(f)$, т. е.

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_\alpha\|_p = \|f - S_\alpha(f)\|_p.$$

При этом

$$\| f - S_\alpha(f) \|_p^p = \| f \|_p^p - \sum_{k \in g_\alpha} \left| \hat{f}(k) \right|^p$$

и

$$\lim_{\alpha \to \infty} \|f - S_\alpha(f)\|_p = 0.$$

2. ψ-Интегралы и характеристические последовательности. Аппроксимационные характеристики и полученные ранее результаты. Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$, ряд Фурье которого имеетвид (3), существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}(k) \varphi_k, \tag{6}$$

т. е. когда

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}(k), \quad k \in \mathcal{N}, \tag{7}$$

то вектор F будем называть ψ-интегралом вектора f и записывать $F = \mathcal{J}^\psi f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ будем обозначать множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, ψS_φ^p — множество ψ-интегралов всех векторов, принадлежащих S_φ^p.

Если f и F связаны соотношением (6) (или (7)), то иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и писать $f = D^\psi F = F^\psi$.

В дальнейшем предполагается, что система ψ подчинена условию

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{8}$$

Понятно, что это условие обеспечивает включение $\psi S_\varphi^p \subset S_\varphi^p$. Ясно, что для такого включения необходимым и достаточным является условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|$, $k \in \mathcal{N}$.

Конструкция агрегатов, используемых для приближения элементов $f \in \in \psi S_\varphi^p$, определяется характеристическими последовательностями $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ системы ψ, которые задаются следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющих условию (8). Тогда через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ обозначаем множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию; через $g(\psi) = g_1, g_2, \ldots$ — систему множеств

$$g_n = g_n^\psi = \{k \in \mathcal{N} : |\psi_k| \ge \varepsilon_n\}$$

и через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ — последовательность чисел $\delta_n = |g_n|$, где $|g_n|$ — количество чисел $k \in \mathcal{N}$, содержащихся в множестве g_n.

Учитывая условие (8), последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ можно определить с помощью следующих соотношений:

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \sup_{k\in\mathcal{N}} |\psi_k|, \quad g_1 = \{k \in \mathcal{N} : |\psi_k| = \varepsilon_1\}, \\ \varepsilon_n = \sup_{k \,\overline{\in}\, g_{n-1}} |\psi_k|, \quad g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathcal{N} : |\psi_k| = \varepsilon_n\}. \end{gathered} \tag{9}$$

Заметим, что любое число $n^* \in \mathcal{N}$ принадлежит всем множествам g_n^ψ с достаточно большими номерами n и всегда

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty. \tag{10}$$

В дальнейшем ради удобства через $g_0 = g_0^\psi$ обозначаем пустое множество и считаем, что $\delta_0 = 0$.

Пусть множество S_φ^p порождается пространством X, системой φ и числом p, $p > 0$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (8). Пусть, далее,

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} = S_{g_n^\psi}(f) = \sum_{k \in g_n^\psi} \hat{f}(k)\varphi_k, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad S_{0,\psi}(f)_\varphi = \theta, \tag{11}$$

где g_n^ψ — элементы последовательности $g(\psi)$, а θ — нулевой вектор пространства S_φ^p;

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi}\|_p, \tag{12}$$

$$E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi}} \alpha_k \varphi_k \right\|_p \tag{13}$$

и

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_n} \|x - u\|_Y$$

— поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Y с нормой $\|\cdot\|_Y$. Здесь $\mathcal{F}_n$ — множество всех подпространств размерности $n \in \mathcal{N}$ пространства Y.

Следуя С. Б. Стечкину [2], приведем еще такое определение. Пусть $n \in \mathcal{N}$, γ_n — произвольный набор из n натуральных чисел и

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k,$$

где α_k — некоторые комплексные числа.

Величина

$$e_n(f)_p = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_p \tag{14}$$

называется наилучшим n-членным приближением элемента $f \in S_\varphi^p$ в пространстве S_φ^p.

Пусть, наконец,

$$U_\varphi^p = \{ f \in S_\varphi^p : \|f\|_p \le 1 \} \tag{15}$$

и ψU_φ^p — множество ψ-интегралов всех элементов из U_φ^p. Заметим, что если

$$\psi_k \ne 0 \quad \forall k \in \mathcal{N}, \tag{16}$$

то

$$\psi U_\varphi^p = \left\{ f \in S_\varphi^p : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}(k)}{\psi_k} \right|^p \le 1 \right\}, \tag{17}$$

т. е. множество ψU_φ^p является p-эллипсоидом в пространстве S_φ^p с полуосями, равными $|\psi_k|$.

В [1], в частности, доказаны следующие утверждения.

Теорема А. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система чисел, для которой выполняются условия (8) и (16). Тогда при любых $n \in \mathcal{N}$ и $p \in (0, \infty)$ справедливы равенства*

$$\sup_{f \in \psi U_\varphi^p} E_n(f)_{\psi,p} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^p} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n,$$

$$\sup_{f \in \psi U_\varphi^p} e_n^p(f)_p = \sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{k=1}^{l} \overline{\psi}_k^{-p} \right)^{-1} = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \overline{\psi}_k^{-p} \right)^{-1}, \tag{18}$$

где ε_n — n-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$, $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, задающаяся соотношениями

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_n \quad \text{при} \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

δ_n — *члены характеристической последовательности* $\delta(\psi)$, *а* l^* — *некоторое натуральное число.*

Если $p \in [1, \infty)$, *то при любых* $n \in \mathcal{N}$

$$d_{\delta_{n-1}}(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p) = d_{\delta_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p) = \ldots$$
$$\ldots = d_{\delta_n^{-1}}(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p) = \sup_{f \in \psi U_\varphi^p} \mathcal{E}_n^\psi(f) = \varepsilon_n. \tag{19}$$

Отметим еще, что, как показано в [1], при всех $p \in [1, \infty)$ и $n \in \mathcal{N}$

$$\sup_{f \in \psi U_\varphi^p} e_n^p(f)_p < d_n(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p).$$

В настоящей работе продолжаются начатые в [1] исследования аппроксимационных характеристик пространств S_φ^p.

3. Приближение индивидуальных элементов из множеств ψS_φ^p. Основными в этом пункте являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \psi S_\varphi^p$, $p > 0$, *и последовательность* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* (8). *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}$$

сходится и при любом $n \in \mathcal{N}$ *справедливо равенство*

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^\infty (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}, \tag{20}$$

в котором величины $E_n(x)_{\psi,p}$ *определяются равенством* (13), *а* ε_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — *элементы характеристической последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in S_\varphi^p$, $p > 0$, *и последовательность* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* (8). *Пусть, далее,*

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k^{-1} E_k(f)_{\psi,p} = 0. \tag{21}$$

Тогда для того чтобы выполнялось включение

$$f \in \psi S_\varphi^p, \tag{22}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^\infty (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}. \tag{23}$$

Если этот ряд сходится, то при любом $n \in \mathcal{N}$ *выполняется равенство*

$$E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p} E_n^p(f)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^\infty (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}, \tag{24}$$

в котором величины $E_n(x)_{\psi,p}$ *и* ε_k *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

В теореме 1 устанавливается связь между наилучшим приближением элемента f и наилучшими приближениями его производных. Подобные утверждения в теории приближений, как хорошо известно, принято называть прямыми теоремами. Теорема 2 в этом смысле является обратной: в ней по свойствам наилучшего приближения элемента f указывается о наличии у него производных и дается информация о наилучшем приближении этих производных.

$$S[f] = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}(i)\varphi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{i_k} \hat{f}^{\psi}(i_k)\varphi_{i_k}$$

и

$$S_{g_{n-1}^{\psi}}(f) = \sum_{k=1}^{\delta_{n-1}} \hat{f}(i_k)\varphi_{i_k}.$$

Поэтому

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \mathscr{E}_n^p(f)_{\psi,p} = \sum_{k=\delta_{n-1}}^{\infty} \overline{\psi}_k^p \left|\hat{f}^{\psi}(i_k)\right|^p = \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{k=\delta_{\nu-1}}^{\delta_\nu - 1} \overline{\psi}_k^p \left|\hat{f}^{\psi}(i_k)\right|^p =$$

$$= \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon_\nu^p \Delta_\nu, \tag{33}$$

где

$$\Delta_\nu = \sum_{k=\delta_{\nu-1}}^{\delta_\nu - 1} \left|f^{\psi}(i_k)\right|^p = \left(\sum_{k=\delta_{\nu-1}}^{\infty} - \sum_{k=\delta_\nu}^{\infty}\right)\left|f^{\psi}(i_k)\right|^p =$$

$$= E_{\nu-1}^p(f^{\psi})_{\psi,p} - E_\nu(f^{\psi})_{\psi,p}. \tag{34}$$

Далее воспользуемся следующим утверждением для числовых рядов.

Лемма 1. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tag{35}$$

сходится и последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$\lim_{n\to\infty} c_n A_{n+1} = 0, \quad A_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k. \tag{36}$$

Тогда ряды

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k c_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{k-1})A_k, \quad n \in \mathcal{N},$$

сходятся одновременно и в случае их сходимости

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k c_k = c_n \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{k-1})A_k. \tag{37}$$

Доказательство леммы получается путем предельного перехода в равенстве

$$\sum_{k=n+1}^{m} (c_k - c_{k-1})A_k = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k c_k - c_n A_n + c_m A_{m+1},$$

справедливом при всех достаточно больших значениях m.

В рассматриваемом случае положим $\alpha_k = \Delta_k$ и $c_k = \varepsilon_k^p$. Поскольку $\|f^{\psi}\|_p \le \le 1$, то в силу (34)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f^{\psi}(k)\right|^p = \left\|f^{\psi}\right\|_p^p \le 1,$$

и поскольку $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то и

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n A_{n+1} = 0,$$

т. е. все условия леммы выполнены. Из включения $\psi S_\varphi^p \subset S_\varphi^p$ следует оценка $E_n(f)_{\psi,p} \le \|f\|_{\varphi,p}$, что обеспечивает сходимость всех рядов в (33). Поэтому согласно лемме ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p (f^\psi)_{\psi,p}$$

сходится и справедливо равенство (20).

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала выполняется включение (22). Тогда элемент f имеет ψ-производную f^ψ, принадлежащую S_φ^p, при этом согласно (7)

$$\hat{f}^\psi(k) = \frac{\hat{f}(k)}{\psi_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В таком случае, выбирая числа i_k в соответствии с (32), имеем

$$S[f^\psi] = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}^\psi(i)\varphi_i = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{i_k})^{-1} \hat{f}(i_k)\varphi_{i_k} \tag{38}$$

и

$$S_{g_{n-1}^\psi}(f^\psi) = \sum_{k=1}^{\delta_{n-1}} (\psi_{i_k})^{-1} \hat{f}(i_k)\varphi_{i_k}.$$

Поэтому

$$E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \mathscr{E}_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi}_k^{-p} \left|\hat{f}(i_k)\right|^p = \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon_\nu^{-p} \Delta_\nu, \tag{39}$$

где

$$\Delta_\nu = \sum_{i=\delta_{\nu-1}}^{\delta_\nu - 1} \left|\hat{f}(j_i)\right|^p = E_{\nu-1}^p(f)_{\psi,p} - E_\nu^p(f)_{\psi,p}.$$

Полагая $\alpha_k = \Delta_k$ и $c_k = \varepsilon_k^{-p}$, видим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^p < \infty$$

и

$$c_n A_{n+1} = c_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = \varepsilon_n^{-p} E_n^p(f)_{\psi,p}. \tag{40}$$

Учитывая (21), заключаем, что условия леммы 1 выполнены. Ряд в (39) сходится, значит, согласно лемме сходится и ряд (23) и выполняется равенство (24). *Необходимость* условий теоремы 2 установлена. Покажем их *достаточность*. Пусть выполнены условия (22) и (23) и пусть, как и выше, $\alpha_k = \Delta_k$ и $c_k = \varepsilon_k^{-p}$. Поскольку $f \in S_\varphi^p$, то в силу (39)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=\delta_{k-1}}^{\delta_k - 1} \left|\hat{f}(j_i)\right|^p = \|f\|_p^p < \infty,$$

т. е. ряд (35) сходится; условие (36) обеспечивается в силу (40) соотношением (21). Согласно условию (23) сходится ряд в правой части (37). Следовательно, согласно лемме сходится и ряд слева в (37) и выполняется равенство (37). Но в рассматриваемом случае согласно (39)

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k c_k = \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon_\nu^{-p} \Delta_\nu = \mathscr{E}_n^p(f^\psi)_{\psi,p}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где f^ψ — элемент, ряд Фурье которого имеет вид (38). При $n = 1$ имеем

$$\mathscr{E}_1^p(f^\psi) = \left\| f^\psi \right\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k c_k < \infty,$$

т. е. $f^\psi \in S_\varphi^p$, что и требовалось доказать.

Отметим, что в случае гильбертова пространства функций, заданных на отрезке, утверждения, подобные теоремам 1 и 2, были доказаны автором ранее в [3].

4. Наилучшие n-членные приближения в разных метриках. В настоящем пункте рассматриваются величины $e_n(f)_p$, $p > 0$, определяемые равенством (14), в случае, когда приближаемый элемент принадлежит множеству ψU_φ^q, $q > 0$. Точнее, рассматриваются величины

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p = e_n(\psi U_\varphi^q; S_\varphi^p) = \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} e_n(f)_p =$$

$$= \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \| f - P_{\gamma_n} \|_p, \quad 0 < q \le p. \tag{41}$$

По-прежнему, предполагается, что системы чисел ψ удовлетворяют условиям (8). В таком случае, как уже отмечалось, $\psi U_\varphi^p \subset S_\varphi^p$. Поэтому если $0 < q \le p$, то в силу (27) и (28) имеем естественное включение $\psi U_\varphi^q \subset \psi U_\varphi^p \subset S_\varphi^p$ и, следовательно, величина (41) имеет смысл.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — *система чисел, удовлетворяющая условиям* (8) *и* (16), p *и* q — *произвольные числа, такие, что* $0 < q \le p$. *Тогда при любом* $n \in \mathcal{N}$ *справедливо равенство*

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p = \sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{k=1}^{l} \overline{\psi}_k^{-q} \right)^{-p/q} = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \overline{\psi}_m^{-q} \right)^{-p/q},$$

где $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ — *последовательность, задающаяся соотношениями*

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_n \quad \text{при} \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{42}$$

ε_n *и* δ_n — *члены характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$, *а* l^* — *некоторое натуральное число.*

Доказательство. Согласно (2), если $f \in S_\varphi^p$, то

$$\left\| f - P_{\gamma_n} \right\|_p^p = \sum_{k \,\overline{\in}\, \gamma_n} \left| \hat{f}(k) \right|^p + \sum_{k \in \gamma_n} \left| \hat{f}(k) - \alpha_k \right|^p \ge$$

$$\ge \sum_{k \,\overline{\in}\, \gamma_n} \left| \hat{f}(k) \right|^p = \| f \|_p^p - \sum_{k \in \gamma_n} \left| \hat{f}(k) \right|^p.$$

Отсюда заключаем, что

$$e_n^p(f) = \| f \|_p^p - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \left| \hat{f}(k) \right|^p.$$

Пусть i_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — натуральные числа, определяемые формулой (32). Тогда согласно (42) и (7) для любого элемента $f \in \psi U_\varphi^q$ имеем

$$e_n^p(f)_p = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi}_k^p \left| \hat{f}^{\psi}(i_k) \right|^p - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \overline{\psi}_k^p \left| \hat{f}^{\psi}(i_k) \right|^p \tag{43}$$

и, следовательно,

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p = \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi}_k^p \left| \hat{f}^{\psi}(i_k) \right|^p - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \overline{\psi}_k^p \left| \hat{f}^{\psi}(i_k) \right|^p \right) \le$$

$$\le \sup_{|m| \le 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi}_k^p m_k^r - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \overline{\psi}_k^p m_k^r \right), \quad r = \frac{p}{q}, \quad |m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k, \quad m_k \ge 0. \tag{44}$$

Для нахождения значений правой части (44) воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел,* $\alpha_k > 0 \ \ \forall k \in \mathcal{N}$, *для которой*

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0, \tag{45}$$

и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность неотрицательных чисел* $m_k \ge 0 \ \ \forall k \in \in \mathcal{N}$, *удовлетворяющая условию*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1. \tag{46}$$

(В таком случае будем писать $\alpha \in \mathcal{A}$ *и* $m \in \mathcal{M}$.*)*

Пусть, далее, r — *любое число,* $r \ge 1$,

$$S^{(r)}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r, \qquad S_{\gamma_n}^{(r)}(m) = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \tag{47}$$

где γ_n — *произвольный набор из* n *натуральных чисел,*

$$\mathcal{E}_n(m) = \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)}(m) = S^{(r)}(m) - \sup_{\gamma_n} S_{\gamma_n}^{(r)}(m)$$

и

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)} = \sup_{|m| \le 1} \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)}(m).$$

Тогда для любого натурального n *существует число* $l^* > n$ *такое, что*

$$\mathcal{E}_n = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r}. \tag{48}$$

Число l^* *определяется равенством*

$$\sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r} = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r}.$$

При этом для последовательности $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, *у которой*

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_k^{-1/r}\left(\sum\limits_{i=1}^{l^*}\alpha_i^{-1/r}\right)^{-r}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l^*, \end{cases}$$

выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(m') = (l^* - n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}.$$

Предположим, что лемма доказана. Полагая $\overline{\psi}_k^p = \alpha_k$, $k \in \mathcal{N}$, видим, что согласно (8) и (42) так выбранные числа α_k удовлетворяют требованиям леммы, поэтому в силу (44) и (48)

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p \leq \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)} = (l^* - n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r} = (l^* - n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q},$$

и для завершения доказательства теоремы остается показать, что в множестве ψU_φ^q имеется элемент f_*, для которого

$$e_n^p(f_*)_p = (l^* - n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q}. \tag{49}$$

Для этого положим

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}\varphi_{i_k},$$

где числа i_k выбраны согласно (32) и

$$c_{i_k}^q = \begin{cases} \overline{\psi}_k^{-q}\left(\sum\limits_{i=1}^{l^*}\overline{\psi}_i^{-q}\right)^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l^*. \end{cases} \tag{50}$$

Элемент h, являясь линейной комбинацией конечного числа элементов φ_j, принадлежит пространствам S_φ^p при любом $p > 0$, а поскольку

$$\| h \|_{\varphi, q}^q = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}^q = 1,$$

то $h \in U_\varphi^q$. Поэтому, полагая $f_* = \mathcal{J}^\Psi h$, видим, что $f_* \in \psi U_\varphi^q$ и $f_*^\Psi = h$. Согласно (50)

$$c_{i_k}^q = \begin{cases} \overline{\psi}_k^{-p}\left(\sum\limits_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_i^{-q}\right)^{-p/q}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l^*, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\overline{\psi}_k^p c_{i_k}^p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{l^*} \overline{\psi}_i^{-q}\right)^{-p/q}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l. \end{cases}$$

Поэтому в силу (43) для $e_n^p(f_*)$ справедливо равенство (49), что и завершает доказательство теоремы.

Доказательство леммы 2. В силу (46) ряд в (47) сходится при любом $r \geq 1$. Следовательно, при $k \to \infty$ всегда $\alpha_k m_k^r \to 0$. Поэтому найдется, по крайней мере, одно множество $\gamma_n^* = \gamma_n^*(m, r)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{\gamma_n} S_{\gamma_n}^{(r)}(m) = S_{\gamma_n^*}^{(r)}(m) = \sum_{k \in \gamma_n^*} \alpha_k m_k^r.$$

Пусть

$$\mu = \mu_n(m, r) = \min_{k \in \gamma_n^*} \alpha_k m_k^r.$$

Докажем следующее утверждение.

Предложение 3. *Если $\alpha \in \mathcal{A}$, то для любой последовательности $m \in \mathcal{M}$ можно указать последовательность $\nu \in \mathcal{M}$, для которой $|\nu| = |m|$, и число $l > n$ такое, что*

$$\alpha_k \nu_k^r = \begin{cases} \mu, & k = 1, 2, \ldots, l; \\ \lambda\mu, & k = l + 1; \\ 0, & k > l + 1, \end{cases}$$

где $\lambda \in [0, 1)$; при этом будет выполняться неравенство

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha, r)}(m) \leq \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)}(\nu). \tag{51}$$

Доказательство этого утверждения опирается на следующие факты.

Факт 1. *Если $\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{M}$, и $r \geq 1$, то при любых натуральных k и s, $s > k \geq 1$, справедливо неравенство*

$$\alpha_k (m_k + m_s)^r \geq \alpha_k m_k^r + \alpha_s m_s^r. \tag{52}$$

Действительно, соотношение (52) вытекает из неравенства

$$a^r + b^r \leq (a + b)^r,$$

справедливого для всех $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $r \geq 1$ с учетом того, что $\alpha_k \geq \alpha_s$.

Факт 2. *Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{M}$, $r \geq 1$ и $s > k \geq 1$. Пусть, кроме того,*

$$\alpha_k m_k^r < \alpha_s m_s^r$$

и $m_s = \overline{m}_s + \overline{\overline{m}}_s$, где значение $\overline{m}_s$ определяется условием

$$\alpha_k m_k^r = \alpha_s \overline{m}_s^r. \tag{53}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\alpha_k (m_k + \overline{\overline{m}}_s)^r + \alpha_s \overline{m}_s^r \geq \alpha_k m_k^r + \alpha_s m_s^r. \tag{54}$$

В самом деле, согласно (53) и (54) необходимо показать, что

$$\alpha_k (m_k + \overline{\overline{m}}_s)^r \geq \alpha_s m_s^r,$$

или

$$\alpha_k^{1/r}(m_k+\overline{\overline{m}}_s) \ge \alpha_s^{1/r}(\overline{m}_s+\overline{\overline{m}}_s).$$

Последнее неравенство с учетом (53) сводится к неравенству $\alpha_k^{1/r}\overline{\overline{m}}_s \ge \alpha_s^{1/r}\overline{\overline{m}}_s$, которое заведомо выполняется, поскольку $\alpha\in\mathcal{A}$.

Факт 3. *Пусть* $\alpha\in\mathcal{A}$, $m\in\mathcal{M}$, $r\ge 1$, $s>k\ge 1$ *и*

$$\alpha_k m_k^r > \alpha_s m_s^r. \tag{55}$$

Тогда при любом $x\in(0, m_s)$

$$\alpha_k(m_k+x)^r+\alpha_s(m_s-x)^r > \alpha_k m_k^r + \alpha_s m_s^r. \tag{56}$$

Доказательство. Производная $f'(x)$ функции

$$f(x) = \alpha_k(m_k+x)^r+\alpha_s(m_s-x)^r-\alpha_k m_k^r-\alpha_s m_s^r,$$

равная $\alpha_k r(m_k+x)^{r-1}-\alpha_s r(m_s-x)^{r-1}$, неотрицательна при всех $x\in[0, m_s]$. Действительно, согласно (55) с учетом неравенства $\alpha_k\ge\alpha_s$ имеем

$$\frac{m_s}{m_k} < \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_s}\right)^{1/r} < \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_s}\right)^{1/(r-1)}$$

или

$$\alpha_s^{1/(r-1)}m_s < \alpha_k^{1/(r-1)}m_k.$$

Поэтому

$$\alpha_s^{1/(r-1)}(m_s-x) \le \alpha_s^{1/(r-1)}m_s \le \alpha_k^{1/(r-1)}m_k \le \alpha_k^{1/(r-1)}(m_k+x)$$

и, следовательно,

$$\alpha_k(m_k+x)^{r-1}-\alpha_s(m_s-x)^{r-1} > 0.$$

Значит, в самом деле $f'(x)>0$ при всех $x\in(0, m_s)$, а поскольку $f(0)=0$, то при всех $x\in(0, m_s]$ $f(x)>0$, откуда и следует (56).

Отправляясь от фактов $1-3$, последовательность $\nu=\{\nu_k\}$, $k\in\mathcal{N}$, можно построить, например, таким образом. Первый шаг состоит в следующем.

Если $\alpha_1 m_1^r<\mu$, то через s_1 обозначим наибольшее из натуральных чисел (больших 1), для которого

$$A_1 = \alpha_1\left(\sum_{i=1}^{s_1-1}m_i\right)^r \le \mu.$$

В таком случае $m_{s_1}>0$ и

$$\alpha_1\left(\sum_{i=1}^{s_1}m_i\right)^r > \mu. \tag{57}$$

Рассмотрим последовательность $m^{(1)}=\{m_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, у которой

$$m_k^{(1)} = \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{s_1-1}m_i, & k=1;\\ 0, & 1<k<s_1;\\ m_k, & k\ge s_1.\end{cases}$$

В силу условия $\alpha_1 m_1^r < \mu$ числа $1, 2, \ldots, s_1 - 1$ не включены в γ_n^*, поэтому слагаемые $\alpha_i m_i^r$ с такими номерами входят в сумму, определяющую величину $\mathscr{E}_n(m)$:

$$\mathscr{E}_n(m) = \sum_{k \overline{\in} \gamma_n^*} \alpha_k m_k^r.$$

Отсюда, опираясь на факт 1 (см. (52)), заключаем, что

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(m^{(1)}).$$

При этом возможны два случая:

$$A_1 < \mu \tag{58}$$

и

$$A_1 = \mu. \tag{59}$$

Если выполнено (58), то возможны два варианта:

$$A_1 < \alpha_{s_1} m_{s_1}^r \tag{60}$$

и

$$A_1 \ge \alpha_{s_1} m_{s_1}^r. \tag{61}$$

Предположим, что выполнено условие (60). Тогда значение m_{s_1} представим в виде $m_{s_1} = \overline{m}_{s_1} + \overline{\overline{m}}_{s_1}$, где число $\overline{m}_{s_1}$ определяется условием

$$A_1 = \alpha_{s_1} \overline{m}_{s_1}^r.$$

В таком случае согласно факту 2 (см. (54)) выполняется неравенство

$$\alpha_1 \left(\sum_{i=1}^{s_1-1} m_i + \overline{\overline{m}}_{s_1} \right)^r + \alpha_{s_1} \overline{m}_{s_1}^r \ge A_1 + \alpha_{s_1} m_{s_1}^r..$$

Поэтому если положить $m^{(1a)} = \{m_k^{(1a)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(1a)} = \begin{cases} m_1^{(1)} + \overline{\overline{m}}_s, & k = 1; \\ m_k^{(1)}, & k \neq s_1; \\ \overline{m}_{s_1}, & k = s_1, \end{cases}$$

то будем иметь

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(m^{(1)}) \le \mathscr{E}_n(m^{(1a)}). \tag{62}$$

В этом случае также возможны два варианта:

$$\alpha_1 (m_1^{(1a)})^r < \mu \tag{63}$$

и

$$\alpha_1 (m^{(1a)})^r \ge \mu. \tag{64}$$

Пусть выполняется (63). Тогда в силу (57) найдется число x, $x \in (0, \overline{\overline{m}}_{s_1})$, такое, что $\alpha_1 (m_1^{(1a)} + x)^r = \mu$. Определим последовательность $m^{(1б)} = \{m_k^{(1б)}\}_{k=1}^{\infty}$, положив

$$m_k^{(1б)} = \begin{cases} m_1^{(1a)} + x, & k = 1; \\ m_k^{(1)}, & k \neq s_1; \\ \overline{m}_{s_1} - x, & k = s_1. \end{cases}$$

Замечая, что согласно построению $\alpha_1(m_1^{(1a)})^r > \alpha_{s_1}\overline{m}_{s_1}^r$, и используя факт 3 (см. (56)), заключаем, что

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1a)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1б)}). \tag{65}$$

Если вместо (63) выполняется условие (64), то полагаем $m^{(1б)} = m^{(1a)}$. Пусть теперь вместе с (58) выполняется условие (61). Тогда согласно факту 3 найдем число x', $x' \in (0, m_{s_1})$, такое, что

$$\alpha_1(m_1^{(1a)} + x')^r = \mu,$$

и определим последовательность $\{m_k^{(1б')}\}_{k=1}^{\infty}$, положив

$$m_k^{(1б')} = \begin{cases} m_1^{(1a)} + x', & k = 1; \\ m_k^{(1)}, & k \neq s_1; \\ m_{s_1} - x', & k = s_1. \end{cases}$$

Ясно, что и в этом случае будет выполняться неравенство

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1a)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1б')}). \tag{66}$$

Если вместо (58) выполняется условие (59), то полагаем $m^{(1б')} = m^{(1)}$. Наконец, если в начале первого шага $\alpha_1 m_1^r \geq \mu$, то полагаем $m^{(1б')} = m$.

Из этих построений видно, что для любой последовательности $m \in \mathcal{M}$ можно указать последовательность $\nu^{(1)} = \{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{M}$, для которой

$$\nu_k^{(1)} = \begin{cases} \nu_1^{(1)}, \quad \alpha_1(\nu_1^{(1)})^r \geq \mu, & k = 1; \\ 0, & 1 < k < s_1; \\ m_{s_1} - y_1, & k = s_1; \\ m_k, & k > s_1, \end{cases}$$

где y_1 — некоторое (вполне определенное) число из промежутка $[0, m_{s_1}]$, зависящее от того, в каком сочетании выполняются соотношения (58) – (61), (63) и (64).

На этом первый шаг в построении искомой последовательности ν завершен. Второй шаг заключается в том, чтобы, отправляясь от последовательности $\nu^{(1)}$, построить последовательность $\nu^{(2)} \in \mathcal{M}$, для которой

$$\nu_k^{(2)} = \begin{cases} \nu_1^{(1)}, & k = 1; \\ \nu_2^{(2)}, \quad \alpha_2(\nu_2^{(2)})^r \geq \mu, & k = 2; \\ 0, & 2 < k < s_2; \\ \nu_{s_2}^{(1)} - y_2, & k = s_2; \\ m_k, & k > s_2, \end{cases}$$

где $s_2 > s_1$ и y_2 — некоторое число из промежутка $[0, m_{s_2}]$, и, кроме того,

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(\nu^{(1)}) \le \mathscr{E}_n(\nu^{(2)}). \tag{67}$$

Этого можно достичь, если для системы чисел $\nu_k^{(1)}$, $k \ge 2$, провести рассуждения, подобные тем, которые проводились на первом шаге для последовательности m.

Продолжая эту процедуру, на некотором шаге (пусть его номер будет j) построим последовательность $\nu^{(j)} = \{\nu_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathscr{M}$, у которой

$$\nu_k^{(j)} = \begin{cases} \nu_k^{(j-1)}, & k = 1, 2, \ldots, j-1; \\ \nu_j^{(j)}, \quad \alpha_j(\nu_j^{(j)})^r \ge \mu, & k = j; \\ 0, & j < k < s_j; \\ \nu_{s_j}^{(j-1)} - y_j, & k = s_j; \\ m_k, & k > s_j, \end{cases}$$

где y_j — некоторое число из промежутка $[0, m_j]$. Для этой последовательности будем иметь

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(\nu^{(1)}) \le \ldots \le \mathscr{E}_n(\nu^{(j)}) \tag{68}$$

и, кроме того,

$$\alpha_j \left(\sum_{k \ge j} \nu^{(j)} \right)^r = \alpha_j \left(\nu_{s_j}^{(j-1)} - y_j + \sum_{k > j} m_k \right)^r < \mu.$$

На следующем шаге положим $\nu^{(j+1)} = \{\nu_k^{(j+1)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$\nu_k^{(j+1)} = \begin{cases} \nu_k^{(j)}, & k = 1, 2, \ldots, j; \\ \sum\limits_{k > j} \nu_k^{(j)}, & k = j+1; \\ 0, & k > j+1. \end{cases}$$

Принимая во внимание соотношения (62), (65) – (68), а также факт 1, заключаем, что $|\nu^{(j+1)}| = |m|$, т. е. $\nu^{(j+1)} \in \mathscr{M}$,

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(\nu^{(j+1)}) \tag{69}$$

и, кроме того,

$$\alpha_k(\nu_k^{(j+1)})^r = \alpha_k(\nu_k^{(j)})^r \ge \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, j, \quad \alpha_{j+1}(\nu_{j+1}^{(j+1)})^r < \mu.$$

Ясно также, что число j удовлетворяет условию $j \ge n$. Теперь величину

$$\beta = \sum_{k=1}^{j} \left((\nu_k^{(j+1)})^r - \frac{\mu}{\alpha_k} \right) + \nu_{j+1}^{(j+1)}$$

представим в виде

$$\beta = \beta_{j+1} + \beta_{j+2} + \ldots + \beta_{j+l}, \quad \beta_{j+i} \ge 0, \quad i = \overline{1, l},$$

где числа β_s и l подобраны так, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_{j+i}\beta_{j+i}^r = \mu, \quad i = \overline{1, l-1},$$

$$\alpha_{j+l}\beta_{j+l}^r < \mu,$$

и положим $\nu = \{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$\nu_k = \begin{cases} (\mu/\alpha_k)^{1/r}, & k = 1, 2, \ldots, j+l-1; \\ \beta_{j+l}, & k = j+l; \\ 0, & k > j+l. \end{cases}$$

Последовательность ν является искомой. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $l = j+l-1$ и $\lambda = \alpha_{j+l}\beta_{j+l}^r$ и заметить, что в силу соотношения (69) выполняется неравенство (51) и $|\nu| = |m|$.

Предложение 3 доказано. Продолжим доказательство леммы. При данном натуральном n обозначим через $\mathcal{M}_n$ подмножество последовательностей m из $\mathcal{M}$, для которых при некотором натуральном l, $l > n$, справедливо представление

$$\alpha_k m_k^r = \begin{cases} \mu, & k = 1, 2, \ldots, l; \\ \lambda\mu, & k = l+1, \quad \lambda \in [0,1); \\ 0, & k > l+1, \end{cases} \tag{70}$$

где μ — некоторое положительное число.

Поскольку построенная выше последовательность ν принадлежит $\mathcal{M}_n$, то из (51) вытекает равенство

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha,r)} = \sup_{m\in\mathcal{M}} \mathcal{E}_n^{(\alpha,r)}(m) = \sup_{m\in\mathcal{M}_n} \mathcal{E}_n^{(\alpha,r)}(m), \tag{71}$$

означающее, что для нахождения значения величины $\mathcal{E}_n^{(\alpha,r)}$ достаточно ограничиться последовательностями из $\mathcal{M}_n$.

Если $m \in \mathcal{M}_n$, то согласно (70)

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha,r)}(m) = \sum_{k=n+1}^{l} \mu + \lambda\mu = (l-n+\lambda)\mu. \tag{72}$$

При этом

$$|m| = \sum_{k=1}^{l+1} m_k = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{\mu}{\alpha_k}\right)^{1/r} + \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha_{l+1}}\right)^{1/r} = \mu^{1/r}\left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r} + \left(\frac{\lambda}{\alpha_{l+1}}\right)^{1/r}\right).$$

Отсюда получаем

$$\mu = |m|^r \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r} + \left(\frac{\lambda}{\alpha_{l+1}}\right)^{1/r}\right)^{-r}.$$

Поэтому в силу (72)

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha,r)}(m) = (l-n+\lambda)|m|^r \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r} + \left(\frac{\lambda}{\alpha_{l+1}}\right)^{1/r}\right)^{-r}. \tag{73}$$

При фиксированных $r \geq 1$ и $n \in \mathcal{N}$ и натуральных $l > n$ рассмотрим функции

$$f(l) = (l-n)\left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}$$

и

$$\sup_{l>n} f(l) = \max_{l\in(n,l_0]} f(l) = f(l^*) = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^r.$$

Таким образом,

$$\mathscr{E}_n^{(\alpha,r)} \le (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}, \tag{78}$$

и для завершения доказательства леммы остается показать, что это соотношение не может быть строгим неравенством. Для этого рассмотрим последовательность $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, у которой

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_k^{-1/r}\left(\sum\limits_{i=1}^{l^*}\alpha_i^{-1/r}\right)^{-1}, & k = 1,2,\ldots,l^*; \\ 0, & k > l^*. \end{cases}$$

Ясно, что $|m'| = 1$ и $m' \in \mathcal{M}$. Согласно (72) при $n < l^*$

$$\mathscr{E}_n^{(\alpha,r)}(m') = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{1/r}\right)^{-r}.$$

Объединяя это соотношение с соотношением (78), завершаем доказательство всех утверждений леммы.

***Замечание* 1.** В доказательстве леммы 2 условие (45) используется только для установления соотношения (77). Поэтому все рассуждения из этого доказательства вплоть до получения соотношения (75) остаются в силе и без предположения (45). В частности, неравенство (75) будет выполняться, если последовательность α принимает любые постоянные значения c, $c > 0$. При $c = 1$ и $r > 1$ в силу (75) имеем

$$\mathscr{E}_n^{(1,r)} \le \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}1\right)^{-r} = \sup_{l>n}\frac{l-n}{l^r} = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r n^{r-1}}, \tag{79}$$

где $\mathscr{E}_k^{(1,r)} = \mathscr{E}_n^{(\alpha,r)}$ при $\alpha_k \equiv 1$.

В данном случае

$$l^* = \frac{rn}{r-1}$$

и экстремальная последовательность m'_k имеет вид

$$m'_k = \begin{cases} \dfrac{1}{l^*}, & k = 1,2,\ldots,l^*; \\ 0, & k > l^*. \end{cases}$$

Для такой последовательности согласно (72) (при $\alpha_k \equiv 1$) находим

$$\mathscr{E}_n^{(1,r)}(m') = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r n^{r-1}},$$

т. е. соотношение (79) в действительности является равенством.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2′. *Пусть* $m \in \mathcal{M}$ *и* r — *любое число,* $r > 1$,

$$\mathscr{E}_n^{(1,r)}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k^r - \sup_{\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_n} m_k^r,$$

где γ_n — *произвольный набор из* n *натуральных чисел и*

$$\mathscr{E}_n^{(1,r)} = \sup_{m\in\mathcal{M}} \mathscr{E}_n^{(1,r)}(m).$$

Тогда для любого натурального n *выполняется равенство*

$$\mathscr{E}_n^{(1,r)} = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r n^{r-1}}. \tag{80}$$

На основании этой леммы можно установить следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* p *и* q — *произвольные числа, для которых* $0 < q < p$. *Тогда при любом* $n \in \mathcal{N}$ *справедливо равенство*

$$e_n^p(U_\varphi^q)_p = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r n^{r-1}}, \quad r = \frac{p}{q}, \tag{81}$$

где $e_n(U_\varphi^q)_p$ — *величина, определяющаяся соотношением* (41), — *величина наилучшего* n*-членного приближения единичного шара* U_φ^q *пространства* S_φ^q *в метрике пространства* S_φ^p.

Доказательство. Согласно (41), (43), (15) и (80)

$$e_n^p(U_\varphi^q)_p = \sup_{f\in U_\varphi^q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^p - \sup_{\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_n} \left|\hat{f}(k)\right|^p \right) \le$$

$$\le \sup_{m\in\mathcal{M}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k^r - \sup_{\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_n} m_k^r \right) = \mathscr{E}_n^{(1,r)},$$

т. е. всегда

$$e_n^p(U_\varphi^q)_p \le \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r n^{r-1}}.$$

С другой стороны, пусть

$$f_* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

где числа c_k такие, что

$$c_k^q = \begin{cases} \dfrac{1}{l^*}, & k = 1, 2, \ldots, l^*, \quad l^* = \dfrac{rn}{r-1}; \\ 0, & k > l^*. \end{cases}$$

Ясно, что $f_* \in U_\varphi^q$ и в силу (43)

$$e_n^p(f_*) = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r n^{r-1}},$$

что и доказывает равенство (81).

5. Аппроксимационные характеристики периодических функций многих переменных. Здесь в качестве примера рассматривается одна из возможных конкретизаций построений предыдущих пунктов.

Пусть R^m — m-мерное, $m \geq 1$, евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_m)$ — его элементы, Z^m — целочисленная решетка в R^m — множество векторов $k = (k_1, \dots, k_m)$ с целочисленными координатами, $xy = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$, $|x| = \sqrt{(xx)}$ и, в частности, $kx = k_1 x_1 + \dots + k_m x_m$, $|k| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ — множество всех 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m,

$$Q^m = \{x : x \in R^m, \ -\pi \leq x_k \leq \pi, \ k = 1, \dots, m\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции f по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2} e^{ikx}, \qquad k \in Z^m, \tag{82}$$

т. е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(t) e^{-ikt}\, dt. \tag{83}$$

Если считать неразличимыми функции, эквивалентные относительно меры Лебега, то в качестве $\mathfrak{X}$ можно рассматривать пространство $L(R^m)$, а в качестве системы φ — тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{ik_s x}, \qquad k_s \in Z^m, \qquad s = 1, 2, \dots,$$

полученную из системы (82) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в таком случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(t) e^{-ik_s t}\, dt = \hat{f}(k_s) = \hat{f}_\tau(k_s).$$

Получающиеся при этом множества S_τ^p согласно (5) не зависят от нумерации системы (82) и в дальнейшем обозначаются через S^p.

Пусть теперь $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел — кратная последовательность. Для функций $f \in L$ наряду с (83) рассмотрим ряд

$$(2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \psi(k) \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Если этот ряд для данной функции f и системы ψ является рядом Фурье некоторой функции F из L, то F назовем ψ-интегралом функции f и будем писать $F(x) = \mathcal{J}^\psi(f; x)$. При этом иногда удобно функцию f называть ψ-производной функции F и писать $f(x) = D^\psi(F; x) = F^\psi(x)$. Множество ψ-интегралов всех функций $f \in L$ обозначаем через L^ψ. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L, то $L^\psi \mathfrak{N}$ обозначает множество ψ-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Ясно, что если $f \in L^\psi$, то коэффициенты Фурье функций f и f^ψ связаны соотношением

$$\hat{f}(k) = \psi(k)\hat{f}^{\psi}(k), \quad k \in Z^m.$$

В качестве $\mathfrak{N}$ будем рассматривать единичный шар U^p в пространстве S^p:

$$U^p = \{f\colon f \in S^p, \ \|f\|_p \le 1\}.$$

В таком случае полагаем $L^{\psi}U^p = L_p^{\psi} = L_p^{\psi}(R^m)$. Относительно системы ψ предполагается, что

$$\lim_{|k| \to \infty} \psi(k) = 0. \tag{84}$$

Заметим, что если $f \in L^{\psi}S^p$ и $|\psi(k)| \le C$, $k \in Z^m$, $C = \mathrm{const}$, то $f \in S^p$, т. е. условие (84) всегда гарантирует включение $L_p^{\psi} \subset S^p$.

Определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ следующим образом:

$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — множество значений величин $|\psi(k)|$, $k \in Z^m$, упорядоченное по их убыванию; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$g_n = g_n^{\psi} = \{k \in Z^m\colon |\psi(k)| \ge \varepsilon_n\};$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\delta_n = \delta_n^{\psi} = |g_n|$ — количество чисел $k \in Z^m$, принадлежащих множеству g_n.

Ввиду условия (84) в рассматриваемом случае последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ определяются равенствами (9) с учетом того, что в этом случае $k \in Z^m$. Как и раньше, считаем, что $g_0 = g_0^{\psi}$ — пустое множество и $\delta_0 = \delta_0^{\psi} = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in L^{\psi}$ рассмотрим тригонометрические полиномы

$$S_n(f;x) = S_{g_n^{\psi}}(f;x) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g_n^{\psi}} \hat{f}(k) e^{ikx}, \tag{85}$$

$$n \in N, \quad S_0(f;x) = 0,$$

где g_n^{ψ} — элементы последовательности $g(\psi)$.

Пусть p и q — произвольные числа, $p, q > 0$,

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_{S^p}, \tag{86}$$

$$\mathcal{E}_n(L_q^{\psi})_p = \sup_{f \in L_q^{\psi}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{87}$$

$$E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{a_k} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi}} a_k e^{ikx} \right\|_{S^p} \tag{88}$$

и

$$E_n(L_q^{\psi})_p = \sup_{f \in L_q^{\psi}} E_n(f)_{\psi,p}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{89}$$

Пусть, далее,

$$d_n(L_p^{\psi})_p = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L_p^{\psi}} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{S^p}, \quad n \in N, \quad d_0(L_p^{\psi})_p \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in L_p^{\psi}} \|f\|_{S^p},$$

где G_n — множество всех n-мерных подпространств в S^p, — поперечники по Колмогорову классов L_p^{ψ} и

$$e_n(L^{\psi}_q)_p = \sup_{f \in L^{\psi}_q} \inf_{k,\gamma_n} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in \gamma_n} a_k e^{ikx} \right\|_{S^p},$$

где γ_n — произвольный набор из n векторов $k \in Z^m$ — величина наилучшего n-членного приближения класса L^{ψ}_q в пространстве S^p.

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения — аналоги, а по существу — частные случаи теорем 1 – 4.

Теорема 1′. *Пусть $f \in L^{\psi}_p$, $p > 0$, и $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условию* (84). *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon^p_k - \varepsilon^p_{k-1}) E^p_k (f^{\psi})_{\psi,p}$$

сходится и при любых $n \in \mathcal{N}$ справедливо равенство

$$E^p_n(f)_{\psi,p} = \varepsilon^p_n E^p_n(f^{\psi})_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon^p_k - \varepsilon^p_{k-1}) E^p_k (f^{\psi})_{\psi,p},$$

где величины $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ определяются равенством (88), *а ε_k — элементы характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ системы ψ.*

Теорема 2′. *Пусть $f \in S^p$, $p > 0$, и система $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ удовлетворяет условию* (84). *Пусть, далее,*

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon^{-1}_k E_k(f)_{\varphi,p} = 0.$$

Тогда для того чтобы выполнялось включение

$$f \in L^{\psi}_p,$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon^{-p}_k - \varepsilon^{-p}_{k-1}) E^p_k (f)_{\psi,p}.$$

Если этот ряд сходится, то при любом $n \in \mathcal{N}$ справедливо равенство

$$E^p_n(f^{\psi})_{\psi,p} = \varepsilon^{-p}_n E^p_n(f)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon^{-p}_k - \varepsilon^{-p}_{k-1}) E^p_k (f)_{\psi,p},$$

в котором величины $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ и ε_k имеют тот же смысл, что и в теореме 1′.

Теорема 3′. *Пусть $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условию* (84) *и такая, что*

$$\psi(k) \neq 0 \qquad \forall\, k \in Z^m. \tag{90}$$

Тогда если $0 < q \le p < \infty$ и $n \in \mathcal{N}$, то

$$E_n(L^{\psi}_q)_p = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_q)_p = \varepsilon_n, \tag{91}$$

где ε_n — n-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ системы ψ.

Теорема 4′. *Пусть $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (84) *и* (90), *p и q — числа, для которых $0 < q \le p$. Тогда при любом $n \in \mathcal{N}$ выполняется равенство*

$$e_n^p(L_q^\psi)_p = \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}^{-q}\right)^{-p/q},$$

где $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_n \quad при \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ε_n *и* δ_n — *члены характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$, *а* l^* — *некоторое натуральное число.*

Доказательство. Отправляясь от заданной системы ψ, фигурирующей в теоремах $1'-4'$, перенумеруем все векторы $k \in Z^m$ так, чтобы числами s при $s \in (\delta_{n-1}, \delta_n]$ были перенумерованы векторы k из множеств $g_k^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ в каком-нибудь фиксированном порядке. Затем определим последовательность $\psi' = \{\psi'_s\}_{s=1}^{\infty}$, положив

$$\psi'_s = \psi(k_s), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{92}$$

Поскольку

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2}\sum_{k\in Z^m}\hat{f}(k)e^{ikx} = (2\pi)^{-m/2}\sum_{s=1}^{\infty}\hat{f}(k_s)e^{ik_s x},$$

то из (92) заключаем, что

$$\mathcal{J}^{\psi'}(f;x) = \mathcal{J}^{\psi}(f;x) \qquad \forall f \in L$$

и, следовательно, $L^{\psi'} = L^{\psi}$. Однако $L_p^{\psi'} = \psi' U^p$, где $\psi' U^p$ — множество, определяемое согласно равенству (17):

$$\psi' U^p = \{f \in L : f^{\psi'} \in U^p\},$$

в котором $U^p = U_\varphi^p$ и $\varphi = \{(2\pi)^{-m/2}e^{ik_s x}\}_{s=1}^{\infty}$. К тому же последовательности $\varepsilon(\psi')$ и $\varepsilon(\psi)$, а также $\delta(\psi')$ и $\delta(\psi)$ совпадают и справедливы равенства

$$S_{g_n^{\psi'}}(f) = S_{g_n^{\psi}}(f;x), \qquad \mathcal{E}_n(f)_{\psi',p} = \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p},$$

$$\mathcal{E}_n(\psi' U^q)_p = \mathcal{E}_n(L_q^\psi)_p, \qquad E_n(f)_{\psi',p} = E_n(f)_{\psi,p}$$

и

$$E_n(\psi' U^q)_p = E_n(L_q^\psi)_p,$$

в которых левые части определяются равенствами (11) – (13) и (31), а правые — соотношениями (85) – (89). Отсюда заключаем, что утверждения теорем $1'-3'$ следуют из теорем 1 – 3. Ясно также, что $e_n(L_q^\psi)_p = e_n(\psi' U^q)$ и $\overline{\psi}' = \overline{\psi}$. Поэтому и теорема $4'$ вытекает из теоремы 4.

Ради полноты изложения приведем переформулировку утверждения теоремы А для колмогоровских поперечников множеств L_p^ψ.

Теорема 6. *Пусть* $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in Z^m}$ — *система чисел, удовлетворяющая условиям* (84) *и* (90) *и* $p \in [1, \infty)$. *Тогда при любом* $n \in \mathcal{N}$

$$d_{\delta_{n-1}}(L_p^\psi; S^p) = d_{\delta_{n-1}+1}(L_p^\psi; S^p) = \ldots = d_{\delta_n - 1}(L_p^\psi; S^p) = \mathcal{E}_n(L_p^\psi)_p = \varepsilon_n, \tag{93}$$

где ε_n *и* δ_n — *члены характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$.

Замечание 2. Если последовательность ψ такова, что ряд

$$\sum_{k \in Z^m} \psi(k) e^{ikx}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathfrak{D}_\psi(t)$, то необходимым и достаточным условием включения $f \in L^\psi \mathfrak{N}$ является возможность представления f сверткой вида

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int_{Q^m} \varphi(x-t) \mathfrak{D}_\psi(t)\, dt,$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{N}$ и почти всюду $\varphi(x) = f^\psi(x)$. Таким образом, классы $L^\psi \mathfrak{N}$ охватывают классы функций, представимых свертками с фиксированными суммируемыми ядрами (см., например, [4], §1.9).

***Замечание* 3.** Как уже отмечалось, теорема А доказана в [1]. Там же приведены утверждения теорем 3′ и 4′ в случае, когда $p = q$, а также утверждение теоремы 5. Кроме того, там более детально обсуждаются следствия из общих утверждений для множеств L_p^ψ при конкретных заданиях систем $\psi(k)$, $k \in Z^m$, и отмечаются частные случаи этих утверждений, доказанные ранее в работах А. Н. Колмогорова [5] (равенства (91) и (93) при $m = 1$ и $q = p = 2$), В. Н. Тихомирова [6] (равенства (91) и (93) при $q = p = 2$) и К. И. Бабенко [7, 8] (равенства (91) и (93) при $q = p = 2$ и $m = 2$ в случае, когда $\psi(k) = \psi(k_1, k_2) = \psi_1(k_1)\psi_2(k_2)$ и

$$\psi_j(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j = 0; \\ (ik_j)^{r_j}, & k_j \neq 0, \end{cases} \quad j = 1, 2).$$

В [1] также обсуждается вопрос о связях между множествами S^p и множествами Лебега L_p периодических функций многих переменных, устанавливаемых на основании известной теоремы Хаусдорфа – Юнга.

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
2. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
3. *Степанец А. И.* Среднеквадратическая скорость сходимости ортогональных рядов // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 606 – 611.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Колмогоров А Н.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklass // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – S. 107 – 110.
6. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
7. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 247 – 250.
8. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Там же. – № 5. – С. 982 – 985.

Получено 04.05.01

Определение 5. *Если U — подмножество банахова пространства X и $\mathrm{T}: U \to X$, то оператор T называется вполне непрерывным, если T непрерывен и для любого ограниченного множества $\mathrm{B} \subset U$ замыкание множества TB компактно.*

Теорема 1 (о существовании решения). *Пусть Γ — открытое множество в $R \times C$ и $(\alpha, \varphi) \in \Gamma$, функции F и G непрерывны, причем функция $G: \Gamma \to R^n$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|G(t, \varphi) - G(t, \psi)| \leq \lambda \|\varphi - \psi\|, \tag{2}$$

где $(t, \varphi), (t, \psi) \in \Gamma$, $\lambda \in (0, 1)$ — константа.

Тогда существует решение (1), *начинающееся в точке* (α, φ).

Доказательство. Очевидно, что если $\alpha \in R$, $\varphi \in C_{[-h, 0]}$ заданы и F, G непрерывны, то решение уравнения (1), начинающееся в точке (α, φ), эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\begin{gathered} x(t) = x(\alpha) - G(\alpha, \varphi) + G(t, x_t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F(s, x_s)\, ds, \qquad t \geq \alpha, \\ x_\alpha = \varphi. \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $\tilde{\varphi}: [-h, +\infty) \to R^n$ определена формулами: $\tilde{\varphi}_0 = \varphi$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(0)$, $t \geq 0$. Если x — решение уравнения (1) на $[\alpha - h, \alpha + \delta]$ и $x_{t+\alpha} = \tilde{\varphi}_t + y_t$, то y удовлетворяет в силу (3) уравнению

$$\begin{gathered} y(t) = G(t + \alpha, \tilde{\varphi}, t + y_t) - G(\alpha, \varphi) + \int\limits_{0}^{t} F(s + \alpha, \tilde{\varphi}_s + y_s)\, ds, \qquad t \geq 0, \\ y_0 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Следовательно, нахождение решения $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (1) эквивалентно нахождению $\gamma > 0$ и функции $y \in C_{[-h, 0]}$ таких, что уравнение (4) имеет место при $0 \leq t \leq \gamma$.

Для любых $\gamma > 0$, $\beta > 0$ определим

$$I_\gamma = [0, \gamma], \qquad B_\beta = \{\varphi \in C : \|\psi\| \leq \beta\},$$

$$A(\gamma, \beta) = \{y \in C_{[-h, 0]} : y_0 = 0,\ y_t \in B_\beta,\ t \in I_\gamma\}.$$

Очевидно, что $A(\gamma, \beta)$ — замкнутое ограниченное выпуклое множество в $C_{[-h, \gamma]}$.

Обозначим

$$T(y)(t) = G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t + y_t) - G(\alpha, \varphi) + \int\limits_{0}^{t} F(\alpha + s, \tilde{\varphi}_s + y_s)\, ds.$$

Ясно, что $T: A(\gamma, \beta) \to C_{[-h, \gamma]}$ — непрерывный оператор.

Положим

$$U(y)(t) = G(\alpha + t, \tilde{\varphi}_t + y_t) - G(\alpha, \varphi), \qquad S(y)(t) = \int\limits_{0}^{t} F(\alpha + s, \tilde{\varphi}_s + y_s)\, ds.$$