УДК 517.9

Р. І. Петришин, Т. М. Сопронюк (Чернівец. ун-т)

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ОЦІНКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ ЛІНІЙНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

We investigate the properties of oscillating sums and integrals depending on parameters. We use the mentioned properties in finding the estimate of the normal fundamental matrix of a linear system with quickly oscillating coefficients and impulse influence at fixed times.

Досліджено властивості осциляційних сум та інтегралів, залежних від параметрів. Вказані властивості використано для встановлення оцінки нормальної фундаментальної матриці лінійної системи зі швидко осцилюючими коефіцієнтами та імпульсним впливом у фіксовані моменти часу.

Розглядається лінійна система диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left(A(\tau)+\tilde{A}(\varphi,\tau)\right)x, \quad \tau \neq \tau_j, \\ \Delta x|_{\tau=\tau_j} &= \varepsilon\left(B_j + B(\varphi,\tau_j)\right)x, \end{aligned} \tag{1}$$

в якій $\tau \in I = (t, \infty)$, $x \in R^n$, $\varphi \in R^m$, $j \in N$, $\tau_{j+1} - \tau_j = \theta\varepsilon$, $\tau_1 > t$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, матриці B_j сталі, матриці $A(\tau)$, $\tilde{A}(\varphi,\tau)$, $\dfrac{\partial}{\partial\tau}\tilde{A}(\varphi,\tau)$ і $B(\varphi,\tau)$ неперервні по $(\varphi,\tau) \in R^{m+1}$ і 2π-періодичні по кожній із координат φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, вектора φ, причому

$$\begin{gathered} \sup_I \|A(\tau)\| + \sum_{k\neq 0}\left[\sup_I \|A_k(\tau)\| + \frac{1}{\|k\|}\sup_I \left\|\frac{\partial}{\partial\tau}A_k(\tau)\right\|\right] \le \sigma_1 < \infty, \\ \sup_j \left\|B_j\right\| + \sum_k \left[\sup_I \|B_k(\tau)\|\|k\|^2 + b_k\|k\|\right] \le \sigma_1, \\ \sup_I \|A_0(\tau)\| \le \alpha_1, \quad \sup_I \|B_0(\tau)\| \le \alpha_2, \quad \|B_k(\tau) - B_k(\bar{\tau})\| \le b_k|\tau - \bar{\tau}| \end{gathered} \tag{2}$$

для всіх $\tau, \bar{\tau} \in I$. Тут $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ — коефіцієнти Фур'є при гармоніках $e^{i(k,\varphi)}$ матриць $\tilde{A}(\varphi,\tau)$ і $B(\varphi,\tau)$, $b_k = \text{const}$, i — уявна одиниця, $(k,\varphi) = k_1\varphi_1 + \ldots + k_m\varphi_m$ — скалярний добуток векторів, $\|k\| = \sqrt{(k,k)}$, норма матриці узгоджена з евклідовою нормою вектора, числа α_1 і α_2 досить малі, $\Delta x|_{\tau=\tau_j} = x(\tau_j+0) - x(\tau_j-0)$. Надалі вважатимемо, що в точках τ_j розриву першого роду розглядувані в даній статті функції $f(\tau)$ неперервні зліва, тобто $f(\tau_j) = \lim\limits_{\tau\to\tau_j-0} f(\tau)$.

Припустимо, що $\varphi = \varphi_t^\tau(\psi,\varepsilon)$ є розв'язком імпульсної задачі Коші

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\varphi,\tau), \quad \tau \neq \tau_j, \\ \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} &= \varepsilon\Phi_j(\varphi), \quad \varphi|_{\tau=t} = \psi, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, функції b, $\dfrac{\partial b}{\partial\varphi}$ та Φ_j неперервні по $(\varphi,\tau) \in R^{m+1}$ і обмежені сталою σ_1, а частоти $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau))$ та їх похідні до деякого порядку $p \ge m$ рівномірно неперервні на I і [1]

© Р. І. ПЕТРИШИН, Т. М. СОПРОНЮК, 2001

$$\le \sup_{(r,\tau_1]} u(\tau) - \inf_{(r,\tau_1]} u(\tau) + \sum_{j=1}^{q-1} \left(\sup_{(\tau_j,\tau_{j+1}]} u(\tau) - \inf_{(\tau_j,\tau_{j+1}]} u(\tau) \right) + \sup_{(\tau_q, r+T]} u(\tau) -$$

$$- \inf_{(\tau_q, r+T]} u(\tau) + \varepsilon \sum_{r \le \tau_j < r+T} \left\| \left(B_j + B_j(\varphi_t^{\tau_j}, \tau_j) \right) \right\| u(\tau_j) + \frac{1}{T} \int_r^{r+T} u(\xi) d\xi.$$

Оскільки

$$\sup_{(\tau_j,\tau_{j+1}]} u(\tau) - \inf_{(\tau_j,\tau_{j+1}]} u(\tau) \le \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left| \frac{du(\xi)}{d\xi} \right| d\xi,$$

$$\left| \frac{d}{d\xi} \left\| \Omega_t^{\xi} \right\| \right| \le \left\| \frac{d}{d\xi} \Omega_t^{\xi} \right\|,$$

то на підставі (1), (2) одержуємо нерівність

$$\sup_{[r,r+T]} u(\tau) \le \left(\sup_{\varphi,\tau} \left\| A(\tau) + \tilde{A}(\varphi,\tau) \right\| + \frac{1}{T} \right) \int_r^{r+T} u(\xi) d\xi +$$

$$+ \varepsilon \sup_{\varphi,\tau,j} \left\| B_j + B(\varphi,\tau) \right\| \sum_{r \le \tau_j < r+T} u(\tau_j),$$

що і доводить лему при $c_1(T) = \sigma_1 + \alpha_1 + T^{-1}$, $c_2 = \sigma_1 + \alpha_2$.

Розглянемо довільні $\bar{\tau} \ge t$, $\bar{t} \ge t$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in [0, T]$, де T — додатна стала, і дослідимо поведінку осциляційного інтеграла [1]

$$J_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\tau} \Phi(y,\varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{y} (k, \omega(z)) dz \right\} dy. \tag{10}$$

Тут i — уявна одиниця, k — ненульовий вектор з цілочисловими координатами, матриця $\Phi(y,\varepsilon)$ при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ неперервно диференційовна по $y \in [\bar{t}, \bar{t}+T]$ за винятком точок $\bar{\tau}_j = \bar{\tau}_j(\varepsilon)$, причому

$$\Delta\Phi(y,\varepsilon)\big|_{y=\bar{\tau}_j} = \tilde{\Phi}_j(\varepsilon), \qquad \bar{\tau}_{j+1} - \bar{\tau}_j \ge \sigma_2(\varepsilon) = \text{const} > 0,$$

$$\sup_{\substack{y \in [\bar{t}, \bar{t}+T] \\ y \ne \bar{\tau}_j}} \left(\| \Phi(y,\varepsilon) \| + \left\| \frac{\partial}{\partial y} \Phi(y,\varepsilon) \right\| \right) < \infty. \tag{11}$$

При виконанні (4) у випадку гладкої матриці Φ у монографії [1] одержано оцінку вигляду $\|J_k\| \le c\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$. Такого ж характеру оцінку можна встановити і для кусково-гладкої матриці при виконанні умов (11).

Теорема 1. *Якщо виконуються припущення* (4), (11), *то при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *для всіх* $\bar{\tau} \in I$, $\bar{t} \in I$, $\tau \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і* $k \ne 0$ *має місце нерівність*

$$\|J_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \le \sigma_3 \varepsilon^{\frac{1}{p+1}} \left(\sup_{y \in [\bar{t}, \bar{t}+T]} \|\Phi(y,\varepsilon)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|k\|} \sup_{y \in [\bar{t}, \bar{t}+T]} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \Phi(y,\varepsilon) \right\| + \frac{1}{\|k\|} \sum_{\bar{t} \le \bar{\tau}_j < \bar{t}+T} \left\| \tilde{\Phi}_j(\varepsilon) \right\| \right) \tag{12}$$

з деякою сталою $\sigma_3 = \sigma_3(T)$, *не залежною від* ε, k, $\bar{t}$, $\bar{\tau}$.

Доведення. Скористаємось методом, запропонованим у роботі [1] при доведенні теорем 1.1 та 1.2. При виконанні умови (4) відрізок $[\bar{t}, \bar{t}+\tau]$ можна подати у вигляді

$$[\bar{t}, \bar{t}+\tau] = \bigcup_{s=0}^{l-1} [\bar{t}+2\delta s, \bar{t}+2\delta(s+1)] \cup [\bar{t}+2\delta l, \bar{t}+\tau],$$

де δ — стала, не залежна від ε і k, l — ціла частина числа $\tau/2\delta$, причому існує таке $r = r(s, \bar{t}, k) \geq 1$, що [1, с. 20]

$$\left|\frac{d^r}{dy^r}(k, \omega(y))\right| \geq \frac{\|k\|}{2p\sigma_1} \qquad \forall y \in [\bar{t}+2\delta s, \bar{t}+2\delta(s+1)].$$

Подамо далі інтеграл (10) у вигляді суми інтегралів по вказаних відрізках. Для оцінки інтеграла

$$P(s) = \int\limits_{\bar{t}+2\delta s}^{\bar{t}+2\delta(s+1)} F(y, \varepsilon)\, dy,$$

де F — підінтегральна функція інтеграла (10), розіб'ємо відрізок $[\bar{t}+2\delta s, \bar{t}+2\delta(s+1)]$ на „резонансну" D_1 і „нерезонансну" D_2 множини [1, с. 17]. При цьому D_1 складається з $d_1 \leq 2^p - 1$ відрізків, довжина кожного з яких не перевищує 2μ, $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$, а множина D_2 — із $d_2 \leq 2^p$ відрізків, на кожному з яких виконуються нерівності

$$|(k, \omega(y))| \geq \frac{\|k\|}{2p\sigma_1}\mu^p, \qquad \frac{d}{dy}(k, \omega(y)) \neq 0. \tag{13}$$

У зв'язку з цим

$$\|P(s)\| \leq \left\|\int\limits_{D_1} F(y, \varepsilon)\, dy\right\| + \left\|\int\limits_{D_2} F(y, \varepsilon)\, dy\right\| \leq$$

$$\leq (2^p - 1)2\mu \sup_y \|\Phi(y, \varepsilon)\| + \sum_{r=1}^{d_2} \left\|\int\limits_{\beta_r}^{\bar{\beta}_r} F(y, \varepsilon)\, dy\right\|, \tag{14}$$

де $[\beta_r, \bar{\beta}_r]$ — складовий відрізок множини D_2. Нехай на $[\beta_r, \bar{\beta}_r]$ знаходяться q моментів імпульсного впливу, які для зручності позначимо через $\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_q$. Інтегруючи частинами кожний доданок рівності

$$\int\limits_{\beta_r}^{\bar{\beta}_r} F\, dy = \int\limits_{\beta_r}^{\bar{\tau}_1} F\, dy + \sum_{i=1}^{q-1} \int\limits_{\bar{\tau}_j}^{\bar{\tau}_{j+1}} F\, dy + \int\limits_{\bar{\tau}_q}^{\bar{\beta}_r} F\, dy$$

і використовуючи (13), (14), одержуємо

$$\left\|\int\limits_{\beta_r}^{\bar{\beta}_r} F\, dy\right\| \leq \frac{1}{\|k\|} 2p\sigma_1 \varepsilon \mu^{-p} \left[4 \sup_{[\beta_r, \bar{\beta}_r]} \|\Phi(y, \varepsilon)\| + \right.$$

$$\left. + (\bar{\beta}_r - \beta_r) \sup_{[\beta_r, \bar{\beta}_r]} \left\|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(y, \varepsilon)\right\| + \sum_{j=1}^{q} \|\tilde{\Phi}_j(\varepsilon)\|\right].$$

Тоді з (14) отримуємо нерівність

$$\|J_k\| \le \left(\frac{T}{2\delta}+1\right)\left[\left(2^{p+1}-2\right)\mu + \frac{1}{\|k\|}2^{p+3}\sigma_1 p\varepsilon\mu^{-p}\right]\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|\Phi(y,\varepsilon)\| +$$

$$+\frac{1}{\|k\|}2\sigma_1 pT\varepsilon\mu^{-p}\sup_{[\bar t,\bar t+T]}\left\|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(y,\varepsilon)\right\| + \frac{1}{\|k\|}2\sigma_1 p\varepsilon\mu^{-p}\sup_{\bar t\le\tau_j<\bar t+T}\left\|\tilde\Phi_j(\varepsilon)\right\|,$$

звідки і випливає оцінка (12) при $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$ і

$$\sigma_3(T) = \max\left\{\left(\frac{T}{2\delta}+1\right)\left(2^{p+1}-2+2^{p+3}\sigma_1 p\right);\ 2\sigma_1 pT\right\}.$$

Малість $\varepsilon_0 > 0$ визначається можливістю використання відмічених вище результатів з [1]. Теорему доведено.

Розглянемо тепер осциляційну суму

$$\bar J_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon) = \varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_j<\bar t+\tau}\Psi(\tau_j,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_j}\left(k,\omega(z)\right)dz\right\}, \tag{15}$$

де, як і вище, $\bar t\ge t$, $\bar\tau\ge t$, $\tau\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $0\ne k$ — вектор з цілочисловими координатами, а моменти імпульсної дії справджують умову $\tau_{j+1}-\tau_j = \varepsilon\theta$, в якій θ — додатна стала, не залежна від ε.

Теорема 2. *Нехай*: 1) *виконується нерівність* (4); 2) *матриця* $\Psi(y,\varepsilon)$ *неперервна по* $y\in[\bar t,\ \bar t+T]$, *крім точок* $y=\tau_j$, *причому*

$$\Delta\Psi\big|_{y=\tau_j} = \Psi_j(\varepsilon), \qquad \sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|\Psi(y,\varepsilon)\| < \infty,$$

а на кожному півінтервалі $(\tau_j,\tau_{j+1}]$ $\Psi(y,\varepsilon)$ *задовольняє умову Ліпшиця по* y *зі сталою* $L(\varepsilon)$, *не залежною від* j. *Тоді існує таке досить мале* $\varepsilon_1 > 0$, *що для всіх* $\bar t\ge t$, $\bar\tau\ge t$, $\tau\in[0,T]$, $k\ne 0$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0\le\varepsilon_1$, *справедлива оцінка*

$$\left\|\bar J_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon)\right\| \le \sigma_4\|k\|\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}\left(\sup_{[\bar t,\bar t+T]}\|\Psi(y,\varepsilon)\|+\sum_{\bar t\le\tau_j<\bar t+T}\left\|\Psi_j(\varepsilon)\right\|+L(\varepsilon)\right), \tag{16}$$

в якій стала $\sigma_4=\sigma_4(T)$ *не залежить від* $\bar t$, $\bar\tau$, k *і* ε.

Доведення. З роботи [4] і припущення (4) випливає нерівність

$$\left|\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_j<\bar t+\tau}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_j}\left(k,\omega(z)\right)dz\right\}\right| \le \bar\sigma_4\|k\|\varepsilon^{\frac{1}{p+1}} \tag{17}$$

зі сталою $\bar\sigma_4$, не залежною від $\bar t$, $\bar\tau$, k i ε, але залежною від T.

Методом математичної індукції легко довести рівність

$$\sum_{j=1}^{r}M_jN_j = M_r\sum_{j=1}^{r}N_j - \sum_{j=1}^{r-1}\left(M_{j+1}-M_j\right)\sum_{s=1}^{j}N_s, \tag{18}$$

в якій M_j, N_j — матриці, для яких визначені записані у (18) операції. Нехай $\tau_1,\ldots,\tau_r$ — моменти імпульсного впливу на $[\bar t,\ \bar t+\tau)$. Тоді, використовуючи співвідношення (17), (18), отримуємо

$$\|\bar J_k\| \le \varepsilon\left(\|\Psi(\tau_r,\varepsilon)\|\left|\sum_{j=1}^{r}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_j}\left(k,\omega(z)\right)dz\right\}\right| +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{r-1}\left\|\Psi(\tau_{j+1},\varepsilon)-\Psi(\tau_j,\varepsilon)\right\|\left|\sum_{s=1}^{j}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_j}(k,\omega(z))\,dz\right\}\right|\Bigg)\le$$

$$\le\|k\|\overline{\sigma}_4\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}\left[\sup_{[\bar t,\bar t+T]}\|\Psi(y,\varepsilon)\|+\sum_{j=1}^{r-1}\left(\left\|\Psi(\tau_{j+1},\varepsilon)-\Psi(\tau_j+0,\varepsilon)\right\|+\left\|\Psi_j(\varepsilon)\right\|\right)\right].$$

На підставі того, що $\Psi(y,\varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшиця, з останньої нерівності одержуємо оцінку (16) зі сталою $\sigma_4(T)=\overline{\sigma}_4\cdot(1+T)$. Теорему доведено.

Розглянемо зображення (8) при $\tau>t+1$. Подамо $[t,\tau]$ у вигляді об'єднання відрізків $[t+s,t+s+1]$ одиничної довжини і останнього відрізка $[t+q,\tau]$, для якого $1\le\tau-t-q<2$. Тут q — ціла частина числа $\tau-t-1$. Тоді за допомогою (2), (5) дістанемо нерівність

$$\left\|\Omega_t^\tau\right\|\le Ke^{-\gamma(\tau-t)}+\alpha_1K\int_t^\tau e^{-\gamma(\tau-\xi)}\left\|\Omega_t^\xi\right\|d\xi+\alpha_2K\varepsilon\sum_{t\le\tau_j<\tau}e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\|+$$

$$+\sum_{k\ne0}\left[\sum_{s=0}^{q-1}\left(\left\|J_{s,k}\right\|+\left\|\overline{J}_{s,k}\right\|\right)+\left\|\int_{t+q}^{\tau}\Phi_k(\tau,t,\xi,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_t^\xi(k,\omega(z))\,dz\right\}d\xi\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|\varepsilon\sum_{t+q\le\tau_j<\tau}\Psi_k(\tau,\tau_j,t,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_t^{\tau_j}(k,\omega(z))\,dz\right\}\right\|\right],\tag{19}$$

де

$$\Phi_k(\tau,t,\xi,\varepsilon)=Q(\tau,\xi,\varepsilon)A_k(\xi)\exp\left\{i\left(k,\theta_t^\xi\right)\right\}\Omega_t^\xi,$$

$$\Psi_k(\tau,\tau_j,t,\varepsilon)=Q(\tau,\tau_j,\varepsilon)B_k(\tau_j)\exp\left\{i\left(k,\theta_t^{\tau_j}\right)\right\}\Omega_t^{\tau_j},$$

$$\theta_t^\xi=\varphi_t^\xi-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^\xi\omega(z)\,dz,$$

$$J_{s,k}=\int_{t+s}^{t+s+1}\Phi_k(\tau,t,\xi,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_t^\xi(k,\omega(z))\,dz\right\}d\xi,$$

$$\overline{J}_{s,k}=\varepsilon\sum_{t+s\le\tau_j<t+s+1}\Psi_k(\tau,\tau_j,t,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_t^{\tau_j}(k,\omega(z))\,dz\right\}.$$

Згідно із зробленими припущеннями

$$\left\|\Delta\Phi_k\big|_{\xi=\tau_j}\right\|\le\varepsilon(2+\|k\|)(\sigma_1+\alpha_2)\left\|Q(\tau,\tau_j,\varepsilon)\right\|\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\|\sup_I\|A_k(\tau)\|,$$

тому на підставі теореми 1 має місце оцінка

$$\left\|J_{s,k}\right\|\le\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}\sigma_5\left(\sup_I\|A_k(\tau)\|+\frac{1}{\|k\|}\sup_I\left\|\frac{\partial A_k(\tau)}{\partial\tau}\right\|\right)e^{-\gamma(\tau-s-t-1)}\sup_{[t+s,t+s+1]}\left\|\Omega_t^\xi\right\|+$$

$$+\overline{\sigma}_5\varepsilon^{1+\frac{1}{p+1}}\sum_{t+s\le\tau_j<t+s+1}\left\|Q(\tau,\tau_j,\varepsilon)\right\|\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\|\sup_I\|A_k(\tau)\|,\tag{20}$$

де $\sigma_5=(1+3\sigma_1+\alpha_1)K\sigma_3(2)$, $\overline{\sigma}_5=3(\sigma_1+\alpha_2)\sigma_3(2)$.

Такою ж величиною оцінюється інтеграл по відрізку $[t+q, \tau]$ у правій частині (19).

Аналогічно доводимо, що

$$\left\| \Delta\Psi_k(\tau, \xi, t, \varepsilon)\big|_{\xi=\tau_j} \right\| \leq \varepsilon(\sigma_1+\alpha_2)(\|k\|+2)\left\|Q(\tau, \tau_j, \varepsilon)\right\|\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\|\sup_I\|B_k(\tau)\|.$$

Крім того, при зроблених обмеженнях на кожному півінтервалі $(\tau_j, \tau_{j+1}] \subset \subset [t+s, t+s+1]$ функція $\Psi_k(\tau, \xi, t, \varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшиця по ξ зі сталою $L(\tau, t, s, \varepsilon) = L$, яка справджує нерівність

$$L \leq \left[(\sigma_1+\alpha_1)(\|k\|+2)\sup_I\|B_k(\tau)\|+b_k\right]Ke^{-\gamma(\tau-t-s-1)}\sup_{[t+s,t+s+1]}\left\|\Omega_t^{\xi}\right\|,$$

тому згідно з теоремою 2 знаходимо

$$\left\|\bar{J}_{s,k}\right\| \leq \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}\sigma_6\left(\|k\|^2\sup_I\|B_k(\tau)\|+\|k\|b_k\right)e^{-\gamma(\tau-s-t-1)}\sup_{[t+s,t+s+1]}\left\|\Omega_t^{\xi}\right\| +$$

$$+\ \overline{\sigma}_6\varepsilon^{1+\frac{1}{p+1}}\|k\|^2\sum_{t+s\leq\tau_j<t+s+1}\left\|Q(\tau, \tau_j, \varepsilon)\right\|\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\|\sup_I\|B_k(\tau)\|. \tag{21}$$

Тут $\sigma_6 = (3(\sigma_1+\alpha_1)+1)K\sigma_4(2)$, $\overline{\sigma}_6 = 3(\sigma_1+\alpha_2)\sigma_4(2)$. Таку ж оцінку задовольняє останній доданок у правій частині нерівності (19).

Оскільки

$$e^{-\gamma(\tau-t-s-1)}\int_{t+s}^{t+s+1}\left\|\Omega_t^{\xi}\right\|d\xi \leq e^{\gamma}\int_{t+s}^{t+s+1}e^{-\gamma(\tau-\xi)}\left\|\Omega_t^{\xi}\right\|d\xi,$$

$$e^{-\gamma(\tau-t-s-1)}\sum_{t+s\leq\tau_j<t+s+1}\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\| \leq e^{\gamma}\sum_{t+s\leq\tau_j<t+s+1}e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\|,$$

то, враховуючи (2), (20), (21) і лему, із нерівності (19) дістаємо співвідношення

$$\left\|\Omega_t^{\tau}\right\| \leq Ke^{-\gamma(\tau-t)} + \left(\alpha_1 K+\sigma_7\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}\right)\int_t^{\tau}e^{-\gamma(\tau-\xi)}\left\|\Omega_t^{\xi}\right\|d\xi +$$

$$+\left(\alpha_2 K+\overline{\sigma}_7\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}\right)\varepsilon\sum_{t\leq\tau_j<\tau}e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|\Omega_t^{\tau_j}\right\|,$$

в якому $\sigma_7 = \sigma_1(\sigma_5+\sigma_6)e^{\gamma}c_1(2)$, $\overline{\sigma}_7 = \sigma_1(c_2(\sigma_5+\sigma_6)e^{\gamma}+\overline{\sigma}_5+\overline{\sigma}_6)$. На підставі леми 2.1 з роботи [2, с. 16] маємо оцінку

$$\left\|\Omega_t^{\tau}\right\| \leq 2K\exp\left\{\left(-\gamma+\alpha_1 K+\alpha_2 K\theta^{-1}+\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}\theta^{-1}\overline{\sigma}_7\right)(\tau-t)\right\}. \tag{22}$$

Оскільки за умовою (7) число $\gamma_0 = (\alpha_1+\alpha_2\theta^{-1})K$ менше від γ, то для довільного додатного $\gamma_1 < \gamma-\gamma_0$ з нерівності (22) одержуємо оцінку

$$\left\|\Omega_t^{\tau}(\psi, \varepsilon)\right\| \leq 2Ke^{-\gamma_1(\tau-t)} \quad \forall\,\tau > t+1, \quad \psi\in R^m, \quad \varepsilon\in(0, \varepsilon_0],$$

при

$$\varepsilon_0 < \left[\frac{\theta}{\overline{\sigma}_7}(\gamma-\gamma_0-\gamma_1)\right]^{p+1}.$$

Якщо ж $\tau \in [t, t+1]$, то з рівності (8) безпосередньо знаходимо

$$\left\|\Omega_t^\tau(\psi,\varepsilon)\right\| \leq K_1 e^{-\gamma_1} \leq K_1 e^{-\gamma_1(\tau-t)},$$

де

$$K_1 = 2Ke^{\gamma_1+K[\sigma_1+\alpha_1+2\theta^{-1}(\sigma_1+\alpha_2)]} > 2K.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* (2), (4), (5), (7), *то для довільного* $\gamma_1 << \gamma-\gamma_0$ *існують таке досить мале* $\varepsilon_0 > 0$ *і досить велике* $K_1 > 0$, *що справедлива оцінка* (6).

Зауваження. Суттєвим обмеженням в теоремі 3 є умова $\tau_{j+1}-\tau_j = \varepsilon\theta$. Зазначимо, що одержаний вище результат буде справедливим і при слабших припущеннях. Зокрема, досить вимагати, щоб послідовність $\{\bar{t}_j\}$, де $\bar{t}_j = \varepsilon^{-1}(\tau_{j+1}-\tau_j)$, була періодичною [2] з періодом, не залежним від ε.

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Астафьева М. Н.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1124 – 1126.

Одержано 06.04.2000