УДК 517.9

Н. А. Перестюк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. Н. Станжицкий (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

We establish conditions for the existence of periodic solutions for systems of differential equations with a random right-hand side and a random pulse influence at fixed times. We consider the cases of a small pulse perturbation and weakly nonlinear systems.

Встановлено умови існування періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною та випадковою імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Розглянуто випадки малого імпульсного збурення та слабконелінійні системи.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений со случайной правой частью и случайным импульсным воздействием в фиксированные моменты времени вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \xi(t)), \qquad t \neq t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i+0) - x(t_i-0) = I_i(x, \eta_i), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in Z$. Относительно функций $f(t, x, y)$, $I_i(x, z)$, $y \in R^k$, $z \in R^l$, и моментов t_i будем считать, что f периодическая по t с периодом T и при некотором натуральном p выполняется равенство

$$I_{i+p}(x, z) = I_i(x, z), \qquad t_{i+p} = t_i + T. \tag{2}$$

Пусть $\xi(t)$ — стохастически непрерывный случайный процесс, η_i — последовательность случайных величин, заданные на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) и принимающие значения соответственно в R^k, R^l. Будем считать также, что $\xi(t)$ и η_i периодически связаны, т. е. для $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$, $l_1, \ldots, l_r \in Z$, $A_1, \ldots, A_m \in B(R^k)$, $B_1, \ldots, B_r \in B(R^l)$, где $B(R^k)$, $B(R^l)$ — борелевские σ-алгебры на R^k, R^l,

$$\mathrm{P}\left\{\xi(s_1+T) \in A_1, \ldots, \xi(s_m+T) \in A_m, \eta_{l_1+p} \in B_1, \ldots, \eta_{l_r+p} \in B_r\right\} =$$
$$= \mathrm{P}\left\{\xi(s_1) \in A_1, \ldots, \xi(s_m) \in A_m, \eta_{l_1} \in B_1, \ldots, \eta_{l_r} \in B_r\right\}.$$

Будем также считать, что функции $f(t, x, y)$, $I_i(x, z)$ измеримы по совокупности переменных и выполнены условия:

1) существует случайный локально интегрируемый на $\mathbb{R}$ процесс $B(t)$ и последовательность случайных величин $L_i(\omega)$ такие, что

$$|f(x_1, \xi(t)) - f(x_2, \xi(t))| \leq B(t)|x_1 - x_2|, \quad |I_i(x_1, \eta_i) - I_i(x_2, \eta_i)| \leq L_i|x_1 - x_2|$$
$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n;$$

2) для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^s |f(t, 0, \xi(t))|dt < \infty\right\} = 1;$$

3) отображение $A_i : A_i x = x + I_i(x, z)$ для каждого $z \in R^l$ определено на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и областью его значений есть все пространство $\mathbb{R}^n$.

Если под решением системы (1) понимать случайный процесс $x(t, \omega)$, что с вероятностью 1 на интервалах $(t_i, t_{i+1}]$ удовлетворяет первому из соотношений (1), а при $t = t_i$ — условиям скачка (второму из соотношений (1)), то, как следует из результатов работ [1, с. 26; 2, с. 7–12], нетрудно получить, что решение задачи Коши $x(t, t_0, x_0(\omega))$ системы (1) существует, единственно при $t \in \mathbb{R}$ для произвольного $t_0 \in \mathbb{R}$ и произвольной случайной величины $x_0(\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ и представляет собой кусочно абсолютно непрерывный случайный процесс с точками разрыва t_i.

В [1, с. 76] для дифференциальных уравнений типа (1) при отсутствии импульсного воздействия получены условия существования периодических в узком смысле (в смысле конечномерных распределений) и периодически связанных с $\xi(t)$ его решений. Результаты из [1] обобщены на стохастические уравнения Ито, а также на уравнения с запаздыванием в [3].

Цель данной работы — получить аналогичные результаты для уравнений типа (1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия* 1–3.

Тогда для существования T-периодического и периодически связанного с $\xi(t)$ и η_i ее решения необходимо и достаточно, чтобы эта система имела решение $y(t)$, которое равномерно по $k = 1, 2, \ldots$ (или $k = -1, -2, \ldots$) удовлетворяет условию

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}\{|y(iT)| > r\} \to 0 \tag{3}$$

при $r \to \infty$.

Доказательство данной теоремы аналогично таковому для систем без импульсов из работы [1]. Оно сводится к построению начального распределения для периодического решения. Такое построение проводится путем случайного сдвига аргумента с последующим усреднением полученных вероятностных мер. Далее, используя критерий компактности Скорохода в пространстве функций без разрывов второго рода, из полученной последовательности случайных процессов выделяется слабо сходящаяся подпоследовательность, для которой на другом вероятностном пространстве строится уже сходящаяся по вероятности подпоследовательность, одинаково распределенная с данной. По ней на исходном вероятностном пространстве уже строится начальное распределение искомого периодического решения.

Используя данный результат, исследуем существование периодических решений некоторых классов систем со случайным импульсным воздействием, а именно систем с малым возмущением, линейных систем и близких к ним.

I. Периодические режимы в системах с малым постоянным и импульсным случайными возмущениями. Установим связь между асимптотически устойчивым компактным инвариантным множеством детерминированной автономной системы и периодическими решениями возмущенной системы, полученной из детерминированной в результате малого непрерывного и импульсного случайного возмущений.

Итак, пусть в некоторой области $D \in \mathbb{R}^n$ задана автономная система

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \tag{4}$$

Предположим, что функция F липшицева в этой области, а система (4) имеет в ней асимптотически устойчивое компактное инвариантное множество S.

Рассмотрим возмущенную периодическую импульсную систему, полученную из (4) добавлением малого случайного импульсного и непрерывного воздействий:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x) + \varepsilon g(t, x, \xi(t)), \qquad t \neq t_i, \\ \Delta x|_{t=t_i} &= \varepsilon I_i(x, \eta_i), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функции $g(t, x, y)$, $I_i(x, z)$ ограничены при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, $y \in R^k$, $z \in R^l$, удовлетворяют вместе со случайным процессом $\xi(t)$, последовательностью случайных величин η_i и моментами импульсного воздействия условиям периодичности, указанным выше. Пусть также система (5) удовлетворяет условиям существования и потраекторной единственности решения задачи Коши в области D.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для системы* (5) *выполнены приведенные выше условия.*

Тогда система (5) *при достаточно малых значениях параметра* ε *имеет* T*-периодическое, периодически связанное с* $\xi(t)$ *и* η_i *решение* $x(t)$, *удовлетворяющее с вероятностью* 1 *условию*

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \rho(x(t), S) < \delta(\varepsilon), \qquad \delta(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Теорема 2, таким образом, утверждает, что асимптотически устойчивое положение равновесия порождает периодическое (в узком смысле) решение возмущенной системы. Для систем без импульсов близкий результат получен в [1].

Доказательство. Как следует из [2, с. 16],

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t F(x(s)) + \varepsilon g(s, x(s), \xi(s))\, ds + \varepsilon \sum_{0 < t_i < t} I_i(x(t_i), \eta_i). \tag{7}$$

Обозначим через $y(t, x_0)$ решение системы (4). Поскольку S — асимптотически устойчивое многообразие системы (4), то для любого $\mu > 0$ можно указать такие положительные числа $\nu > 0$, $A > 0$, что

$$\rho(y(t, x_0), S) < \frac{\mu}{2} \tag{8}$$

при $t \geq 0$, а

$$\rho(y(t, x_0), S) < \frac{\nu}{2} \tag{9}$$

при $t \geq A$, если только $\rho(x_0, S) \leq \nu$.

Пусть $\tau_D(x_0)$ — момент выхода решения $x(t, x_0)$ на границу области D. Обозначим через $A_1 = mT$ ближайшее к A число, кратное периоду T и такое, что $A_1 \geq A$. Оценим на отрезке $[0, A_1]$ разность между $y(t, x_0)$ и $x(t, x_0)$ — решениями невозмущенной и возмущенной систем. Поскольку $g(t, x, y)$ и $I_i(x,$

z) ограничены некоторой константой $K > 0$, то при $t \le \tau_D(x_0)$ с вероятностью 1 имеем

$$|x(t, x_0) - y(t, x_0)| \le \int_0^t |F(x(s, x_0)) - F(y(s, x_0))| ds + \varepsilon(KA_1 + KmP).$$

Отсюда, используя неравенство Гроноулла–Беллмана, получаем оценку

$$|x(t, x_0) - y(t, x_0)| \le \varepsilon(KA_1 + KmP) \exp\{LA_1\}, \tag{10}$$

справедливую для всех $t \le \tau_D(x_0)$. Выберем ε так, чтобы

$$\varepsilon(KA_1 + KmP) \exp\{LA_1\} < \frac{\nu}{2}. \tag{11}$$

Тогда

$$\rho(x(t, x_0), S) \le |x(t, x_0) - y(t, x_0)| + \rho(y(t, x_0), S) \le \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} < \mu \tag{12}$$

для $x_0 \in \nu$ -окрестности множества S, а число $\mu > \nu$ выбрано настолько малым, чтобы μ-окрестность множества S принадлежала D. Покажем, что $\tau_D(x_0)$ для $x_0 \in \nu$-окрестности множества S с вероятностью 1 больше A_1. Пусть это не так. Тогда существует множество $B \in F$ такое, что $P(B) > 0$ и для любого $\omega \in B$ решение $x(t, x_0, \omega)$ выходит на границу области D за время, меньшее A_1. Но тогда существует момент времени $t_0(\omega)$ такой, что

$$\rho(x(t_0(\omega), x_0, \omega), S) = \mu. \tag{13}$$

А поскольку в момент $t_0(\omega)$ $x(t_0(\omega), x_0, \omega) \in D$, то из неравенства (12) при $t = t_0(\omega)$ получаем

$$\mu = \rho(x(t_0(\omega), x_0, \omega), S) < \mu.$$

Полученное противоречие и доказывает, что решения системы (5), начинающиеся в ν-окрестности множества S, до момента A_1 находятся в области D. А поэтому для любого $t \in [0, A_1]$ справедливо неравенство (12), а при $t = A_1$ из (9) и (12) имеем

$$\rho(x(A_1, x_0), S) < \nu. \tag{14}$$

Таким образом, решение $x(t, x_0)$ системы (5), выйдя из ν-окрестности множества S, не выходит с вероятностью 1 из его μ-окрестности для $t \in [0, A_1]$, а при $t = A_1$ опять попадает в ν-окрестность этого множества.

Рассмотрим далее поведение решения $x(t, x_0)$ на отрезке $[A_1, 2A_1]$. Для этого будем сравнивать его с решением $y_1(t)$ системы (4) таким, что $y_1(A_1) = x(A_1, x_0)$.

Используя, следуя [4], равномерность по x_0 из ν-окрестности множества S предела в определении асимптотической устойчивости компактного многообразия системы (4) и то, что на любом отрезке длины mT число импульсов постоянно, можно, аналогично предыдущему, для разности $x(t, x_0) - y_1(t)$ получить на отрезке $[A_1, 2A_1]$ оценку (10), а затем и (12) и (14). Таким образом, решение $x(t, x_0)$, находясь при $t = A_1$ с вероятностью 1 в ν-окрестности множества S, при $t \in [A_1, 2A_1]$ не выходит из μ-окрестности этого множества, попадая в момент $t = 2A_1$ опять в ν-окрестность множества S.

Продолжая этот процесс, получаем, что решение $x(t, x_0)$, выходящее из ν-окрестности множества S, не выходит из μ-окрестности этого множества. Последнее означает, что система (5) имеет ограниченное при $t \geq 0$ решение, которое не выходит из μ-окрестности множества S. Отсюда следует выполнение для $x(t, x_0)$ условия (3), достаточного для существования T-периодического решения. Из построения такого решения следует его принадлежность μ-окрестности множества S. Выбирая $\mu = \mu(\varepsilon)$ монотонным по ε, получаем оценку (6).

Теорема доказана.

Доказанная теорема гарантирует существование периодического решения возмущенной системы в случае, когда эти возмущения малы с вероятностью 1. Рассмотрим теперь случай, когда возмущения правой части и импульсные малы лишь в среднем. Тогда для устойчивости инвариантного множества при постоянно действующих возмущениях, которую мы фактически использовали при доказательстве теоремы 2, как следует из [1, с. 48], уже не достаточно его асимптотической устойчивости. От этого множества нужно потребовать более сильной экспоненциальной устойчивости.

Итак, снова рассмотрим систему (5) с выполнением тех же условий, кроме ограниченности $g(t, x, y)$ и $I_i(x, z)$. Обозначим

$$a(t, \omega) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(t, x, \xi(t))|, \qquad b_i(\omega) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |I_i(x, \eta_i(\omega))|.$$

Предположим также, что случайный процесс $a(t)$ и последовательность случайных величин b_i имеют конечные математические ожидания и существует $C > 0$ такое, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathrm{M} a(t) + \sup_{i = \overline{1, p}} \mathrm{M} b_i \leq C.$$

Будем также считать, что функции F, g, I_i заданы и липшицевы по x в $\mathbb{R}^n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть инвариантное множество системы* (4) *экспоненциально устойчиво в целом.*

Тогда система (5) *при достаточно малых значениях параметра* ε *имеет* T*-периодическое, периодически связанное с* $\xi(t)$ *и* η_i *решение* $x(t)$, *удовлетворяющее условию*

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathrm{M} \rho(x(t), S) < \delta(\varepsilon), \qquad \delta(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку инвариантное множество S системы (4) экспоненциально устойчиво в целом, то для решения $y(t, x_0)$ этой системы выполнена оценка

$$\rho(y(t, x_0), S) \leq K \exp\{-\gamma(t - \tau)\} \rho(y(\tau, x_0), S) \tag{16}$$

для любых $t \geq \tau \geq 0$, с не зависящими от t, τ, x_0 положительными постоянными γ, K. Выберем число $A > 0$, кратное периоду T $(A = mT)$, настолько большим, чтобы

$$K \exp\{-\gamma A\} < \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Снова обозначим через $x(t, x_0)$ решение системы (5). Оценим на отрезке $[0, A]$ в среднем расстояние от этого решения до множества S. Аналогично теореме 1 имеем

$$\mathrm{M} | x(t, x_0) - y(t, x_0) | \leq \int_0^t L \mathrm{M} | x(s, x_0) - y(s, x_0) | ds +$$

$$+ \varepsilon\int_0^A \mathrm{M}|g(s, x(s, x_0)), \xi(s)|ds + \sum_{0<t_i<A} \mathrm{M}|I_i(x(t_i, x_0), \eta_i)| \le$$

$$\le L\int_0^t |x(s, x_0) - y(s, x_0)|ds + \varepsilon\int_0^A \mathrm{M}a(t)dt + \sum_{0<t_i<A} \mathrm{M}b_i \le$$

$$\le L\int_0^t |x(s, x_0) - y(s, x_0)|ds + \varepsilon(AC + mpC).$$

Отсюда получаем оценку

$$\mathrm{M}|x(t, x_0) - y(t, x_0)| \le \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\}, \tag{18}$$

справедливую для $t \in [0, A]$.

Поэтому для $t \in [0, A]$ имеем

$$\mathrm{M}\rho(x(t, x_0), S) \le \rho(y(t, x_0), S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \le$$
$$\le K\exp\{-\gamma t\}\rho(x_0, S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\}. \tag{19}$$

Потребовав, чтобы $\rho(x_0, S) < \nu(\varepsilon)$, где $\nu(\varepsilon)$ — достаточно малая монотонно зависящая от ε величина, окончательно получаем

$$\mathrm{M}\rho(x(t, x_0), S) < \delta(\varepsilon) \tag{20}$$

для некоторой функции $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ и $t \in [0, A]$.

Для оценки поведения решения $x(t, x_0)$ на $[A, 2A]$ рассмотрим решение системы (4) $y_1(t)$ такое, что

$$y_1(A) = x(A, x_0).$$

Аналогично предыдущему, учитывая (16), находим

$$\mathrm{M}\rho(x(t, x_0), S) \le \rho(y_1(t), S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \le$$
$$\le K\exp\{-\gamma(t - A)\}\mathrm{M}\rho(y_1(A), S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \le$$
$$\le K\exp\{-\gamma(t - A)\}\delta(\varepsilon) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \le (K + 1)\delta(\varepsilon).$$

А при $t = 2A$, учитывая (17), имеем

$$\mathrm{M}\rho(x(t, x_0), S) \le \left(\frac{1}{2} + 1\right)\delta(\varepsilon).$$

На отрезке $[2A, 3A]$ рассмотрим решение $y_2(t)$ системы (4) такое, что $y_2(2A) = x(2A, x_0)$. Тогда для $t \in [2A, 3A]$

$$\mathrm{M}\rho(x(t, x_0), S) \le K\exp\{-\gamma(t - 2A)\}\mathrm{M}\rho(y_2(2A), S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \le$$
$$\le K\left(\frac{1}{2} + 1\right)\delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) = \left(K\left(\frac{1}{2} + 1\right) + 1\right)\delta(\varepsilon).$$

При $t = 3A$ аналогично получаем

$$\mathrm{M}\rho(x(3A, x_0), S) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\delta(\varepsilon).$$

Продолжая этот процесс на отрезке $[(k - 1)A, kA]$, имеем

$$\mathrm{M}\rho(x(t, x_0), S) \le \left(K\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) + 1\right)\delta(\varepsilon), \tag{21}$$

а при $t = kA$

$$\mathrm{M}\,\rho(x(kA, x_0), S) \leq \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)\delta(\varepsilon). \tag{22}$$

Тогда из (21) и (22) следует существование положительной постоянной C_1 такой, что для $t \geq 0$

$$\mathrm{M}\,\rho(x(t, x_0), S) \leq C_1\,\delta(\varepsilon). \tag{23}$$

Из формулы (23) и неравенства Чебышева следует выполнение для $x(t, x_0)$ условия (3), а поэтому и существование $x(t)$ — периодического и периодически связанного с $\xi(t)$ и η_i решения системы (5). Строя начальное значение этого решения приемом, описанным в [1], нетрудно видеть, что $\mathrm{M}\rho(x(0), S)$ можно сделать столь угодно малым, потребовав достаточной малости ε и $\nu(\varepsilon)$ (здесь $x(0)$ — начальное значение периодического решения). Проводя для него на $[0, T]$ оценки, аналогичные (18) и (19), убеждаемся в конечности $\mathrm{M}\rho(x(t), S)$ и справедливости оценки типа (20).

Теорема доказана.

II. Периодические решения линейных и близких к ним импульсных систем. В работе [5] рассматривались условия (необходимые и достаточные) существования периодических в узком смысле решений систем линейных дифференциальных уравнений и близких к ним, возмущенных периодическими случайными процессами. Рассмотрим сходные вопросы для импульсных систем.

Итак, пусть система (1) с выполненными для нее приведенными выше условиями имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x+\xi(t), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = B_i x+\eta_i. \tag{24}$$

Здесь $\xi(t)$ и η_i — случайный процесс и последовательность случайных величин, удовлетворяющих приведенным выше условиям, а также условиям

$$\int_0^T \mathrm{M}|\xi(t)|dt < \infty, \quad \sum_{i=1}^{p}\mathrm{M}|\eta_i| < \infty. \tag{25}$$

$A(t)$, B_i, $\xi(t)$ и η_i будем считать, вообще говоря, комплекснозначными. Обозначим через $X(t)$ матрицант линейной однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x. \tag{26}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы для любого указанного выше случайного процесса $\xi(t)$ и последовательности случайных величин η_i система* (24) *имела единственное с точностью до стохастической эквивалентности T-периодическое и периодически связанное с $\xi(t)$ и η_i решение $x(t)$ такое, что*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathrm{M}|x(t)| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы монодромии $X(T)$ системы (26) *не пересекался с единичной окружностью, т. е.*

$$\sigma(X(T)) \cap S = \varnothing, \tag{27}$$

где $S = \{\lambda \in C \mid \|\lambda\| = 1\}$.

Доказательство. Как следует из [2, с. 87], для систем типа (26) справедлив аналог теоремы Флоке – Ляпунова, согласно которому невырожденной, кусочно-гладкой, периодической заменой Ляпунова $x = \Phi(t)y$ систему (26) можно привести к системе с постоянными коэффициентами без импульсного воздействия

$$\frac{dy}{dt} = Py. \tag{28}$$

При этом справедливо равенство

$$\frac{1}{T}\ln|\rho_i| = \operatorname{Re}\lambda_i(P),$$

где ρ_i — мультипликаторы системы (26). В силу условий теоремы из последнего представления следует, что спектр матрицы P не пересекается с мнимой осью.

Проведем замену

$$x = \Phi(t)y \tag{29}$$

в системе (24). Тогда при $t \neq t_i$ получим

$$\frac{dy}{dt} = Py + \Phi^{-1}(t)\xi(t).$$

А при $t = t_i$, учитывая, следуя [2], что $\Phi(t) = X(t)\exp\{-Pt\}$, имеем

$$x(t_i+0) - x(t_i) = X(t_i+0)\exp\{-Pt_i\}y(t_i+0) - X(t_i)\exp\{-Pt_i\}y(t_i) =$$
$$= B_i X(t_i)\exp\{-Pt_i\}y(t_i) + \eta_i,$$

откуда

$$X(t_i+0)\exp\{-Pt_i\}y(t_i+0) = (B_i+E)X(t_i)\exp\{-Pt_i\}y(t_i) + \eta_i.$$

Но поскольку согласно (26)

$$X(t_i+0) - X(t_i) = B_i X(t_i),$$

то

$$X(t_i+0)\exp\{-Pt_i\}\Delta y|_{t=t_i} = \eta_i,$$

или

$$\Delta y|_{t=t_i} = \Phi^{-1}(t_i+0)\eta_i.$$

Таким образом, при замене (29) система (24) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dt} = Py + \Phi^{-1}(t)\xi(t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = \Phi^{-1}(t_i+0)\eta_i. \tag{30}$$

Поскольку функция $\Phi(t)$, периодическая с периодом T и кусочно-непрерывна, — борелевская, то очевидно, что замена (29) переводит периодические процессы в периодические, а процесс $\Phi^{-1}\xi(t)$ является T-периодическим, периодически связанным с периодической последовательностью $\Phi^{-1}(t_i+0)\eta_i$. Обозначим

$$\Phi^{-1}(t)\xi(t) = \theta(t)$$

и

$$\Phi^{-1}(t_i+0)\eta_i = \zeta_i.$$

Тогда система (30) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = Py + \theta(t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = \zeta_i, \tag{31}$$

где спектр матрицы P не пересекается с мнимой осью.

Поэтому, согласно изложенному выше, задача исследования периодических решений системы (24) равносильна исследованию таковых для системы (31).

Докажем *необходимость* условий теоремы. По условиям теоремы уравнение (31) имеет единственное периодическое решение для любых $\theta(t)$, ζ_i, удовлетворяющих ее условиям. Положим $\zeta_i = 0$, а в качестве $\theta(t)$ рассмотрим случайный процесс

$$-\exp\{i(\alpha t+\tau)\}y_0, \tag{32}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{C}^n$, а τ — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$. Как следует из [1, с. 70], этот процесс будет стационарным, а значит, и периодическим с любым периодом.

Пусть $y(t)$ — T-периодическое решение системы (31) с процессом (32). Согласно условиям теоремы периодическим будет и процесс

$$\{y(t), \exp\{i(\alpha t+\tau)\}\}.$$

Рассмотрим теперь случайную величину τ_1, равномерно распределенную на $[0, T]$ и независимую от процесса $\{y(t), \exp\{i(\alpha t+\tau)\}\}$. Тогда из [1] следует, что процесс

$$\{y(t+\tau_1), \exp\{i(\alpha(t+\tau_1)+\tau)\}\}$$

стационарен. Обозначим $z(t) = y(t+\tau_1)$. Очевидно, что $z(t)$ удовлетворяет системе

$$\frac{dz}{dt} = Pz - \exp\{i(\alpha(t+\tau_1)+\tau)\}y_0.$$

Отсюда имеем

$$z(t)\exp\{-i\tau - i\alpha(t+\tau_1)\} - z(0)\exp\{-i\tau - i\alpha\tau_1\} =$$

$$= \int_0^t (P-i\alpha)z(s)\exp\{-i\tau - i\alpha(s+\tau_1)\}ds - y_0 t.$$

Переходя в последнем равенстве к математическим ожиданиям и учитывая, что процесс $z(t)\exp\{-i\tau - i\alpha(t+\tau_1)\}$ стационарен, получаем

$$(P-i\alpha)u = y_0. \tag{33}$$

Тут $u = \mathrm{M}z(0)\exp\{-i\tau - i\alpha\tau_1\}$. Таким образом, для любого $y_0 \in \mathbb{C}^n$ уравнение (33) имеет решение. Покажем его единственность. Действительно, пусть v — отличное от u решение уравнения (33). Тогда нетрудно убедиться, что процесс $y(t) + \exp\{i(\alpha t+\tau)(u-v))\}$ — отличное от $y(t)$ периодическое решение рассматриваемой системы, что приводит к противоречию с предположением о единственности такого решения.

Таким образом, для любого $y_0 \in \mathbb{C}^n$ уравнение (33) имеет единственное решение. Поэтому точки $i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, не принадлежат спектру матрицы P, а значит, и спектр матрицы монодромии $X(T)$ не пересекается с единичной окружностью. Необходимость доказана.

Достаточность. Обозначим через $G(t,\tau)$ функцию Грина, построенную с помощью матриканта линейной системы (28) [2, с. 153]. В силу условий теоремы $G(t,\tau)$ допускает оценку

$$\|G(t,\tau)\| \le K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}. \tag{34}$$

С помощью этой матрицы определим функцию

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau)\theta(\tau)\,d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t,t_i)\zeta_i. \tag{35}$$

Аналогично [2, с. 154] можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}\mathrm{M}|\theta(\tau)|\,d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau_i|\}\mathrm{M}|\zeta_i| < \infty.$$

Тогда из теорем Фубини и Бепо – Леви следует сходимость с вероятностью 1 интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,\tau)\||\theta(\tau)|\,d\tau$$

и ряда

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \|G(t,t_i)\||\zeta_i|.$$

Поэтому правая часть в (35) определена с вероятностью 1.

Учитывая свойства функции Грина, можно показать равномерную по t на любом конечном интервале временной оси сходимость с вероятностью 1 интегралов и сумм, полученных в результате формального дифференцирования по t (35).

Действительно, после дифференцирования по t правой части (35) остаток полученного интеграла для любого $t_0 > 0$ оценивается при $n > t_0$ следующим образом:

$$\sup_{t\in[-t_0,t_0]}\left(\int_{-\infty}^{-n} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}|\theta(\tau)|\,d\tau + \int_{n}^{\infty} K\exp\{-\gamma|\tau-t|\}|\theta(\tau)|\,d\tau\right) \le$$

$$\le \exp\{\gamma t_0\}K\int_{-\infty}^{-n} \exp\{\gamma\tau\}|\theta(\tau)|\,d\tau +$$

$$+ \exp\{\gamma t_0\}K\int_{n}^{\infty} \exp\{-\gamma\tau\}|\theta(\tau)|\,d\tau \to 0, \quad n\to\infty,$$

с вероятностью 1, поскольку данные интегралы — сходящиеся. Аналогично оцениваются и остатки рядов из формулы (35).

Покажем, что $y(t)$, определенное формулой (35), является решением системы (31). Действительно, при $t \ne t_i$ имеем

$$\frac{dy}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{dG(t,\tau)}{dt}\theta(\tau)\,d\tau + \sum_{t_i<t} \frac{dG(t,t_i+0)}{dt}\zeta_i +$$

$$+ \int_t^{\infty} \frac{dG(t,\tau)}{dt}\theta(\tau)\,d\tau + \sum_{t_i \ge t} \frac{dG(t, t_i+0)}{dt}\zeta_i +$$
$$+ [G(t,t-0) - G(t,t+0)]\theta(t) = Py(t) + \theta(t),$$

а при $t = t_i$ получаем

$$y(t_i+0) - y(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [G(t_i+0,\tau) - G(t_i,\tau)]\theta(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \sum_{t_j < t_i+0} G(t_j+0, t_i)\zeta_i + \sum_{t_j \ge t_i+0} G(t_j+0, t_i)\zeta_i -$$
$$- \sum_{t_j < t_i+0} G(t_j-0, t_i)\zeta_i + \sum_{t_j \ge t_i-0} G(t_j-0, t_i)\zeta_i =$$
$$= G(t_i+0, t_i)\zeta_i + \sum_{t_j < t_i-0} \left[G(t_i+0, t_j) - G(t_i-0, t_j)\right]\zeta_i -$$
$$- G(t_i-0, t_i)\zeta_i + \sum_{t_j \ge t_i+0} \left[G(t_i+0, t_j) - G(t_i-0, t_j)\right]\zeta_i = \zeta_i,$$

поскольку скачки функции Грина в точках $t_i \ne t_j$ равны 0. Очевидно, что в силу (25) $y(t)$ удовлетворяет оценке

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{M}|y(t)| < \infty. \tag{36}$$

Потраекторная единственность такого ограниченного в среднем решения следует из того, что разность двух ограниченных в среднем на всей оси решений является ограниченным в среднем на всей оси решением однородной системы (28). Последняя же, в силу условий на матрицу P имеет ограниченное на $\mathbb{R}$ только тривиальное решение. Таким образом, система (31) имеет единственное, ограниченное в среднем на $\mathbb{R}$ решение $y(t)$, а поэтому она имеет и T-периодическое решение $y^*(t)$, периодически связанное с $\theta(t)$ и ζ_i. Из его построения следует существование $\mathrm{M}\left|y^*(0)\right|$, а из представления [2, с. 16]

$$y^*(t) = y^*(0) + \int_0^t \left(Py^*(s) + \theta(s)\right)ds + \sum_{0 < t_i < t} \zeta_i$$

и дифференциально-суммарного аналога неравенства Гронуолла – Беллмана [3, с. 14] — оценка

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathrm{M}\left|y^*(t)\right| < \infty.$$

Последняя в силу периодичности $y^*(t)$ означает его ограниченность в среднем на всей оси. Из единственности такого решения, установленной выше, следует доказательство теоремы.

Замечания. **1.** Доказательство периодичности процесса $y(t)$, определенного формулой (35), можно было бы получить непосредственно, используя рассуждения, аналогичные [5, с. 240], однако наши выкладки представляются более простыми.

2. Если спектр матрицы монодромии $X(T)$ лежит внутри единичного круга, то решение $y(t)$ из (35) имеет вид

$$X(t_i+0)\exp\{-Pt_i\}\Delta y|_{t=t_i} = \varepsilon I_i(X(t_i)\exp\{-Pt_i\}y(t_i),\eta_i),$$

откуда получаем

$$\Delta y|_{t=t_i} = \varepsilon\Phi^{-1}(t_i+0)I_i(\Phi(t_i)y(t_i),\eta_i).$$

Поэтому окончательно будем иметь

$$\frac{dy}{dt} = Py+\varepsilon g(t,y,\xi(t)), \qquad t\neq t_i,$$
$$\Delta y|_{t=t_i} = \varepsilon J_i(y,\eta_i), \tag{39}$$

с периодическими по t и i функциями g и J. Очевидно также, что в силу ограниченности Φ и Φ^{-1} g и J удовлетворяют по y условию Липшица и неравенствам (38) с некоторой константой Липшица L_1 и постоянной C_1 в (38).

Следовательно, аналогично предыдущей теореме задача исследования периодических решений системы (37) свелась к исследованию таковых для системы (39), гда спектр постоянной матрицы P не пересекается с мнимой осью.

Опять обозначим через $G(t,\tau)$ функцию Грина системы (28) с оценкой (34). Определим $y_1(t)$ как единственное периодическое решение системы

$$\frac{dy_1}{dt} = Py_1+\varepsilon g(t,0,\xi(t)), \qquad t\neq t_i, \qquad \Delta y|_{t=t_i} = \varepsilon J_i(0,\eta_i).$$

Из предыдущей теоремы следует существование, единственность такого решения и оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{M}|y_1(t)| < \infty, \tag{40}$$

а также его представление в виде

$$y_1(t) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau)g(\tau,0,\xi(\tau))\,d\tau+\varepsilon\sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t,t_i)J_i(0,\eta_i). \tag{41}$$

Интеграл и сумма в (41) существуют с вероятностью 1 в силу оценок (34) и (38). Далее определим последовательность случайных процессов

$$\{y_n(t)\colon t\in\mathbb{R}\},\ n\geq 2,$$

как единственное периодическое с периодом T решение уравнения

$$\frac{dy_n}{dt} = Py_n+\varepsilon g(t,y_{n-1}(t),\xi(t)), \qquad t\neq t_i,$$
$$\Delta y_n|_{t=t_i} = \varepsilon J_i(y_{n-1}(t_i),\eta_i). \tag{42}$$

При этом справедливо представление

$$y_n(t) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau)g(\tau,y_{n-1}(\tau),\xi(\tau))\,d\tau+\varepsilon\sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t,t_i)J_i(y_{n-1}(t_i),\eta_i) \tag{43}$$

и

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{M}|y_n(t)| < \infty. \tag{44}$$

А поскольку процессы $y_n(t)$, будучи решениями системы (42), с вероятностью

1 непрерывны слева, то они измеримы. Отсюда, а также из условия Липшица, (38) и (44) следует выполнение для процесса $g(t, y_{n-1}(t), \xi(t))$ условия (25). Из (43) аналогично [5, с. 214] получаем

$$\mathrm{M}|y_n(t)| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\int_{-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}L_1\mathrm{M}|y_{n-1}(\tau)|d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}C_1(1+\mathrm{M}|\xi(\tau)|)d\tau\right) +$$

$$+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-t_i|\}L_1\mathrm{M}|y_{n-1}(t_i)| + \sum_{i=-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-t_i|\}C_1(1+\mathrm{M}|\eta_i|) \le$$

$$\le \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}C_1(1+\mathrm{M}|\xi(\tau)|)d\tau + \varepsilon\sum_{i=-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-t_i|\}C_1(1+\mathrm{M}|\eta_i|) +$$

$$+ \sup_{t\in[0,T]}\mathrm{M}|y_{n-1}(t)|\frac{2\varepsilon KL_1}{\gamma} + \sup_{t\in[0,T]}\varepsilon\mathrm{M}|y_{n-1}(t)|\frac{2\exp\left\{\gamma T\left(1-p^{-1}\right)\right\}}{1-\exp\left\{-\gamma Tp^{-1}\right\}}.$$

Последняя оценка получена аналогично [2, с. 238]. Таким образом,

$$\mathrm{M}|y_n(t)| \le \varepsilon\left(\int_{-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}C_1(1+\mathrm{M}|\xi(\tau)|)d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-t_i|\}C_1(1+\mathrm{M}|\eta_i|)\right) +$$

$$+ \varepsilon\left(\frac{2KL_1}{\gamma} + \frac{2\exp\left\{\gamma T\left(1-p^{-1}\right)\right\}}{1-\exp\left\{-\gamma Tp^{-1}\right\}}\right)\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{M}|y_{n-1}(t)|.$$

Выберем ε таким, чтобы коэффициент при последнем слагаемом был меньше 1. Продолжая последнюю оценку, получаем

$$\sup_{n\ge1}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{M}|y_n(t)| < \infty,$$

т. е. моменты процессов $y_n(t)$ равномерно ограничены. Положим $r_n(t) = |y_n(t) - y_{n-1}(t)|$. Имеем

$$\mathrm{M}r_n(t) \le \varepsilon KL_1\int_{-\infty}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}\mathrm{M}r_{n-1}(\tau)d\tau +$$

$$+ \varepsilon KL_1\sum_{i=-\infty}^{\infty}\exp\{-\gamma|t-t_i|\}\mathrm{M}r_{n-1}(t_i) \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,T]}\mathrm{M}r_n(t)\left(\varepsilon\frac{2KL_1}{\gamma} + \varepsilon\frac{2KL_1\exp\left\{\gamma T\left(1-p^{-1}\right)\right\}}{1-\exp\left\{-\gamma Tp^{-1}\right\}}\right). \tag{45}$$

Из выбора ε следует при каждом $t\in\mathbb{R}$ сходимость в среднем и с вероятностью 1 $y_n(t)\to y(t)$ — некоторому T-периодическому случайному процессу. Кроме того, из леммы Фату имеем

$$\int_{t_i}^{t} G(t,\tau)\,dz(\tau) + \int_{t}^{t_{i+1}} G(t,\tau)\,dz(\tau) = G(t,t-0)z(t) - G(t,t_i+0)z(t_i+0) -$$

$$- \int_{t}^{t_{i+1}} \frac{d}{d\tau} G(t,\tau z(\tau))\,d\tau + G(t,t_{i+1}-0)z(t_{i+1}-0) - G(t,t+0)z(t) -$$

$$- \int_{t}^{t_{i+1}} \frac{d}{d\tau} G(t,\tau)z(\tau)\,d(\tau) = [G(t,t-0) - G(t,t+0)]z(t) - G(t,t_i+0)z(t_i+0) +$$

$$+ G(t,t_{i+1}-0)z(t_{i+1}-0) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{d\tau} G(t,\tau)z(\tau)\,d\tau.$$

Но поскольку

$$[G(t,t-0) - G(t,t+0)] = E,$$

а

$$\frac{dG(t,\tau)}{d\tau} = -PG(t,\tau),$$

то предыдущее соотношение равно

$$z(t) - G(t,t_i+0)z(t_i+0) + G(t,t_{i+1}-0) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} G(t,\tau)Pz(\tau)\,d\tau.$$

Приравнивая последнее к соотношению, полученному из (47) справа, имеем

$$z(t) = \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} G(t,\tau)g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))\,d\tau +$$

$$+ G(t,t_i+0)z(t_i+0)z(t_i+0) - g(t,t_{i+1}-0)z(t_{i+1}-0). \tag{48}$$

Проводя аналогичную процедуру на $(t_{i+1}, t_{i+2}]$ и учитывая кусочную гладкость $z(t)$, получаем

$$[G(t,t-0) - G(t,t+0)]z(t) - G(t,t_i+0)z(t_i+0) + G(t,t_{i+1}-0)z(t_{i+1}-0) -$$

$$- G(t,t_{i+1}+0)z(t_{i+1}+0) + G(t,t_{i+2}-0)z(t_{i+2}-0) + \int_{t_i}^{t_{i+2}} G(t,\tau)Pz(\tau)\,d\tau =$$

$$= z(t) - G(t,t_i+0)z(t_i+0) + G(t,t_{i+1}-0)z(t_{i+1}-0) -$$

$$- G(t,t_{i+1}+0)z(t_{i+1}-0) - \varepsilon G(t,t_{i+1}+0)J_{i+1}(z(t_{i+1}-0),\eta_{i+1}) +$$

$$+ G(t,t_{i+2}-0)z(t_{i+2}-0) + \int_{t_i}^{t_{i+2}} G(t,\tau)Pz(\tau)\,d\tau = z(t) -$$

$$- G(t,t_i+0)z(t_i+0) - \varepsilon G(t,t_{i+1})J_{i+1}(z(t_{i+1}-0),\eta_{i+1}) +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+2}} G(t,\tau)Pz(\tau)\,d\tau + G(t,t_{i+2}-0)z(t_{i+2}-0).$$

Здесь учтена гладкость функции $G(t,\tau)$ при $t \neq \tau$. Если же $t = t_{i+1}$, то, учитывая условия скачка, слева имеем

$$G(t_{i+1}, t_{i+1}-0)z(t_{i+1}-0) - G(t_{i+1}, t_i+0)z(t_i+0) - G(t_{i+1}, t_i+0)z(t_i+0) -$$
$$- G(t_{i+1}, t_{i+1}+0)z(t_{i+1}+0) + G(t_{i+1}, t_{i+2}-0)z(t_{i+2}-0) +$$
$$+ \int_{t_i}^{t_{i+2}} G(t_{i+1}, \tau)Pz(\tau)\,d\tau = -\varepsilon G(t_{i+1}, t_{i+1})J_{i+1}(z(t_{i+1}-0), \eta_{i+1}) -$$
$$- G(t_{i+1}, t_i+0)z(t_i+0) + G(t_{i+1}, t_{i+2}-0)z(t_{i+2}-0) + \int_{t_i}^{t_{i+2}} G(t_{i+1}, \tau)Pz(\tau)\,d\tau.$$

Продолжая эту процедуру на интервалах $(t_i, t_{i+j}]$ и $(t_{i-j}, t_i]$, $j = 3, 4, \dots$, для $z(t)$ при $t \in (t_{i-j}, t_{i+j}]$ получаем представление

$$z(t) = \varepsilon \int_{t_{i-j}}^{t_{i+j}} G(t, \tau)g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))\,d\tau + \varepsilon \sum_{t_{i-j} \le t_k < t_{i+j}} G(t, t_k)J_k(z(t_k), \eta_k) +$$
$$+ G(t, t_{i-j}+0)z(t_{i-j}+0) - G(t, t_{i+j})z(t_{i+j}-0).$$

Учитывая последнее соотношение, имеем

$$\mathrm{M}\left| z(t) - \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))\,d\tau - \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(t, t_k)J_k(z(t_k), \eta_k) \right| \le$$
$$\le \mathrm{M}\left| \varepsilon \int_{-\infty}^{t_{i-j}} G(t, \tau)g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))\,d\tau + \varepsilon \int_{t_{i+j}}^{\infty} G(t, \tau)g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))\,d\tau + \right.$$
$$+ \varepsilon \sum_{t_k < t_{i-j}} G(t, t_k)J_k(z(t_k), \eta_k) + \varepsilon \sum_{t_k > t_{i+j}} G(t, t_k)J_k(z(t_k), \eta_k) +$$
$$\left. + G(t, t_{i-j})z(t_{i-j}+0) - G(t, t_{i+j})z(t_{i+j}-0) \right| \le$$
$$\le \varepsilon \int_{-\infty}^{t_{i-j}} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}\mathrm{M}|g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))|\,d\tau +$$
$$+ \varepsilon \int_{t_{i+j}}^{\infty} K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}\mathrm{M}|g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))|\,d\tau +$$
$$+ \varepsilon \sum_{t_k < t_{i+j}} K\exp\{-\gamma|t-t_k|\}\mathrm{M}|J_k(z(t_k), \eta_k)| +$$
$$+ \varepsilon \sum_{t_k > t_{i+j}} K\exp\{-\gamma|t-t_k|\}\mathrm{M}|J_k(z(t_k), \eta_k)| +$$
$$+ K\exp\{-\gamma|t-t_{i-j}|\}\mathrm{M}|z(t_{i-j}+0)| + K\exp\{-\gamma|t-t_{i+j}|\}\mathrm{M}|z(t_{i+j})|.$$

Это неравенство справедливо для любого натурального j. Устремляя в нем $j \to \infty$ и учитывая сходимость в среднем интегралов и сумм, фигурирующих слева, а также ограниченность в среднем $z(t)$, получаем

$$\mathrm{M}\left| z(t) - \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau) g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))\, d\tau - \varepsilon \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t,t_i) J_i(y(t_i), \eta_i) \right| = 0$$

для любого $t \in \mathbb{R}$, а поэтому для любого $t \in \mathbb{R}$ с вероятностью 1

$$z(t) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau) g(\tau, z(\tau), \xi(\tau))\, d\tau + \varepsilon \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t,t_i) J_i(y(t_i), \eta_i). \tag{49}$$

Вычитая (49) из (46) и переходя к математическим ожиданиям, имеем

$$\mathrm{M}|y(t) - z(t)| \le \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K \exp\{-\gamma |t-\tau|\} \mathrm{M}|y(\tau) - z(\tau)|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon K \sum_{i=-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma |t - t_i|\} \mathrm{M}|y(t_i) - z(t_i)| \le$$

$$\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{M}|z(t) - y(t)| \left(\varepsilon \frac{2KL_1}{\gamma} + \varepsilon \frac{2KL_1 \exp\left\{\gamma T\left(1 - p^{-1}\right)\right\}}{1 - \exp\left\{-\gamma T p^{-1}\right\}} \right).$$

Поскольку ε выбрано так, что величина в скобках меньше 1, а

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{M}|y(t) - z(t)| \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{M}|y(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{M}|z(t)| < \infty,$$

то для каждого $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{M}|y(t) - z(t)| = 0,$$

что и означает единственность периодического решения с точностью до стохастической эквивалентности. Докажем теперь экспоненциальную устойчивость в среднем в целом полученного решения в случае, когда мультипликаторы системы (26) лежат внутри единичной окружности. В этом случае собственные числа матрицы P имеют отрицательные вещественные части, а функция Грина имеет вид

$$G(t,\tau) = \exp\{P(t-\tau)\} = \Phi(t,\tau)$$

и допускает оценку

$$\|G(t,\tau)\| \le K \exp\{-\gamma(t-\tau)\}, \quad t \ge \tau. \tag{50}$$

Пусть $x(t)$ — произвольное решение системы (39) такое, что $x(0, x_0) = x(\omega)$ и $\mathrm{M}|x_0(\omega)| < \infty$. Тогда, следуя [2, с. 241], для $x(t, x_0)$ получаем представление

$$x(t, x_0) = \Phi(t, 0)x_0 + \varepsilon \int_0^t \Phi(t,\tau) g(\tau, x(\tau, x_0), \xi(\tau))\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \sum_{0 < t_i < t} \Phi(t, t_i) J_i(x(t_i, x_0), \eta_i).$$

Из этого соотношения в силу (50) имеем

$$\mathrm{M}|y(t) - x(t, x_0)| \le$$

$$\le K \exp\{-\gamma t\} \mathrm{M}|y(0) - x_0| + \varepsilon \int_0^t K \exp\{-\gamma(t-\tau)\} L_1 \mathrm{M}|y(\tau) - x(\tau, x_0)|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \sum_{0 < t_i < t} K \exp\{-\gamma(t - t_i)\} L_1 \mathrm{M}|y(t_i) - x(t_i, x_0)|$$

или

$$u(t) \le KM|y(0)-x_0| + \varepsilon\int_0^t KL_1 u(\tau)\,d\tau + \varepsilon\sum_{0<t_i<t} KL_1 u(t_i),$$

где $u(t) = \exp\{\gamma t\}M|x(t, x_0) - y(t)|$. Тогда, используя аналог леммы Гронуолла – Беллмана, из последнего соотношения получаем

$$u(t) \le KM|x_0 - y_0|\exp\{\varepsilon KL_1 t\}(1+\varepsilon KL_1)^{i(0,t)}. \tag{51}$$

Здесь $i(0, t)$ — число импульсов на интервале $(0, t)$. Но поскольку $i(0, t) \le \le p + pT^{-1}t$, то

$$u(t) \le K_1 \exp\left\{\left(\varepsilon KL_1 + \frac{p}{T}\ln(1+\varepsilon KL_1)t\right)\right\}M|x_0 - y(0)|,$$

где $K_1 = K(1+\varepsilon KL_1)$, и окончательно имеем

$$M|x(t, x_0) - y(t)| \le K_1 \exp\{(-\gamma - N_1(\varepsilon))t\}M|x_0 - y(0)| \tag{52}$$

при всех $t \ge 0$, $N_1(\varepsilon) = \varepsilon KL_1 + pT^{-1}\ln(1+\varepsilon KL_1)$. Если потребовать, чтобы $N_1(\varepsilon) < \gamma$, то из (52) следует асимптотическая устойчивость $y(t)$ в целом с экспоненциальным характером затухания. Теорема доказана.

***Замечания.* 3.** Следуя [5, с. 218], решение системы (39) назовем асимптотически периодическим в среднем.

4. Результат, аналогичный теореме 4, для систем без импульсов доказан в работе [5, с. 222] другим методом. При этом, в отличие от теоремы 4, удалось установить лишь существование решения, в то время как предлагаемый нами метод дает и условия единственности и устойчивости.

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O.* Impulsive differential equations. – Singapore etc.: World Sci., 1995. – 462 p.
3. *Колмановский В. Б.* Стационарные решения уравнений с запаздыванием // Проблемы передачи информации. – 1967. – 3, № 1. – С. 64–72.
4. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 240 с.
5. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 319 с.

Получено 30.03.2001