УДК 517.95

А. Г. Нікітін, Р. О. Попович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ШРЬОДІНГЕРА

We suggest an approach to problems of group classification. Using this approach, we perform the complete group classification of nonlinear Schrödinger equations of the form $i\psi_t + \Delta\psi + F(\psi, \psi^*) = 0$.

Використовуючи запропонований авторами підхід до задач групової класифікації, проведено повну групову класифікацію нелінійних рівнянь Шрьодінгера вигляду $i\psi_t + \Delta\psi + F(\psi, \psi^*) = 0$.

1. Вступ. Нелінійне рівняння Шрьодінгера є однією з найбільш цікавих і важливих моделей сучасної математичної фізики. Його повністю інтегровна версія вивчалась багатьма математиками (див., зокрема, [1] і наведені там посилання). Це рівняння має також практичні застосування в геометричній оптиці [1] та нелінійній квантовій механіці [2].

Головна мета данної статті — виконати групову класифікацію нелінійних рівнянь Шрьодінгера вигляду

$$i\psi_t + \Delta\psi + F(\psi, \psi^*) = 0 \tag{1}$$

для однієї комплексної функції $\psi = \psi(t, x)$ від $n + 1$ дійсних незалежних змінних $t = x_0$ і $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, за довільним елементом — гладкою функцією $F = F(\psi, \psi^*)$. Тут і надалі нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною, а верхній індекс $*$ будь-якої комплексної величини — комплексне спряження. Індекси a і b змінюються від 1 до n. За індексами, що повторюються, ведеться підсумовування.

Клас рівнянь (1) включає як частинні випадки деякі відомі рівняння: вільне рівняння Шрьодінгера $(F = 0)$, інтегровне рівняння Шрьодінгера з кубічною нелінійністю $(F = \sigma|\psi|^2\psi)$, рівняння Шрьодінгера з логарифмічною нелінійністю $(F = \sigma \ln|\psi|\psi$; при $\sigma \in \mathbb{R}$ еквівалентне рівнянню, запропонованому в [3]) та ін.

До останнього часу єдиним методом розв'язання задач групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними було безпосереднє інтегрування визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора ліївської симетрії з громіздким перебором усіх можливих випадків, що виникають. Це значно звужувало коло розв'язних задач групової класифікації. Певний прогрес у розв'язанні таких задач пов'язаний з різноманітними модифікаціями стандартного алгоритму, запропонованими, наприклад, в [4, 5]. В даній роботі для групової класифікації рівнянь (1) застосовується ще один новий підхід, що грунтується на дослідженні сумісності класифікуючої системи рівнянь на „довільний елемент".

2. Ядро основних груп і група еквівалентності. Нехай інфінітезимальний оператор

$$Q = \xi^0\partial_t + \xi^a\partial_a + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}$$

породжує однопараметричну групу симетрії рівняння (1). (Тут η — комплекснозначна, а ξ^0, ξ^a — дійснозначні функції змінних t, x, ψ, ψ^*.) Тоді з інфінітезимального критерію інваріантності [6, 7] після переходу на многовид, заданий у продовженому просторі системою рівнянь (1) і комплексно спряженого до нього, та розщеплення за незв'язаними змінними отримаємо такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^0_\psi = \xi^0_{\psi^*} = \xi^0_a = \xi^a_\psi = \xi^a_{\psi^*} = \eta_{\psi^*} = 0, \quad \eta_{\psi\psi} = 0,$$
$$\xi^a_b + \xi^b_a = 0, \quad a \neq b, \quad 2\eta_{a\psi} = i\xi^a_t, \quad 2\xi^a_a = \xi^0_t \tag{2}$$

(підсумовування по a тут немає) та

$$\eta F_\psi + \eta^* F_{\psi^*} + (\xi^0_t - \eta_\psi)F + i\eta_t + \eta_{aa} = 0. \tag{3}$$

Інтегруючи рівняння (2), отримуємо вирази для коефіцієнтів оператора Q:

$$\xi^0 = \xi^0(t), \quad \xi^a = \frac{1}{2}\xi^0_t(t) + \kappa_{ab}x_b + \chi^a(t),$$

$$\eta = \eta^1(t,x)\psi + \eta^0(t,x), \quad \eta^1 := \frac{i}{8}\xi^0_{tt}(t)x_a x_a + \frac{i}{2}\chi^a_t(t)x_a + \zeta(t),$$

де $\kappa_{ab} = -\kappa_{ba} = \mathrm{const}$, η^0, ζ — комплекснозначні, а χ^a — дійснозначні функції своїх змінних.

Рівняння (3) є класифікуючою умовою, що дає подальші обмеження на коефіцієнти оператора Q залежно від вигляду функції F. Якщо не фіксувати функцію F, то, розщеплюючи в (3) за „змінними" F, F_ψ, F_{ψ^*}, отримуємо $\eta = 0$, $\xi^0_t = 0$, $\chi^a_t = 0$, звідки з урахуванням (2) випливає таке твердження.

Твердження. *Ядром основних груп рівнянь з класу* (1) *є група Лі, алгебра Лі* A^{ker} *якої є прямою сумою алгебр Евкліда в просторі змінної* t *та в просторі змінних* x, *тобто*

$$A^{\mathrm{ker}} = e(1) \oplus e(n) = \langle \partial_t \rangle \oplus \langle \partial_a, J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \rangle.$$

Група еквівалентності рівняння (1) збігається з групою, породженою сукупністю однопараметричних груп локальних симетрій системи

$$i\psi_t + \Delta\psi + F = 0, \quad F_t = 0, \quad F_a = 0, \tag{4}$$

інфінітезимальні оператори яких мають вигляд

$$\hat{Q} = \hat{\xi}^0\partial_t + \hat{\xi}^a\partial_a + \hat{\eta}\partial_\psi + \hat{\eta}^*\partial_{\psi^*} + \hat{\theta}\partial_F + \hat{\theta}^*\partial_{F^*},$$

де $\hat{\theta}$ — комплекснозначна функція змінних t, x, ψ, ψ^*, F і F^*, $\hat{\eta}$ — комплекснозначна, а $\hat{\xi}^0$, $\hat{\xi}^a$ — дійснозначні функції змінних t, x, ψ, ψ^*. З інфінітезимального критерію інваріантності для систем (4) після розщеплення за незв'язними змінними отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора $\hat{Q}$, з яких випливає, що алгебра Лі групи еквівалентності G^{equiv} рівняння (1) породжується операторами

$$\partial_t, \quad \partial_a, \quad J_{ab},$$
$$t\partial_t + \frac{1}{2}x_a\partial_a - F\partial_F - F^*\partial_{F^*}, \quad \partial_\psi + \partial_{\psi^*}, \quad i(\partial_\psi - \partial_{\psi^*}), \tag{5}$$
$$\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*} + F\partial_F + F^*\partial_{F^*}, \quad i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*} + F\partial_F - F^*\partial_{F^*}).$$

Отже, перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на F, мають вигляд

$$\tilde{t} = \delta^2 t, \quad \tilde{x} = \delta x, \quad \tilde{\psi} = \alpha\psi + \beta, \quad \tilde{F} = \delta^{-2}\alpha F, \tag{6}$$

де $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Обмеження класу рівнянь (1) може приводити до появи перетворень еквівалентності, відмінних від (6) (див. доведення).

3. Результат класифікації. Всі можливі випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності рівняння (1) з точністю до перетворень еквівалентності (6) та їх умовних розширень вичерпуються наведеними в табл. 1 і 2 випадками, для яких наведено лише базисні елементи з доповнення до A^{ker}. При конкретизації функції f в кожному з випадків, наведених в табл. 1, можливе подальше розширення алгебри інваріантності, що відображено в табл. 2. Для запису результатів класифікації зручно користуватися амплітудою $\rho = |\psi|$ та фазою $\varphi = \frac{i}{2}\ln\frac{\psi^*}{\psi}$ функції ψ. Введемо позначення:

$$I := \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*} = \rho\partial_\rho, \quad M := i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) = \partial_\varphi,$$

$$D := t\partial_t + \frac{1}{2}x_a\partial_a, \quad G_a := t\partial_a + \frac{1}{2}x_a M,$$

$$\Pi := t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{n}{2}tI + \frac{1}{4}x_a x_a M.$$

4. Результат класифікації для підкласу $F = f(|\psi|)\psi$. В класі рівнянь (1) виокремлюється підклас галілей-інваріантних рівнянь з нелінійностями $F = f(|\psi|)\psi$, тобто рівнянь вигляду

$$i\psi_t + \Delta\psi + f(|\psi|)\psi = 0. \tag{7}$$

Таблиця 1

Випадки розширення, коли вираз для функції F містить довільну комплекснозначну гладку функцію f однієї дійсної змінної Ω. Тут γ, γ_1, γ_2, δ, δ_1, δ_2 — дійсні сталі, $\theta = \theta(x) \in \mathbb{R}$ — довільний розв'язок рівняння $\Delta\theta = \delta_2\theta$

Випадок	F	Ω	Оператор розширення
1.1	$f(\Omega)\lvert\psi\rvert^{\gamma_1}e^{\gamma_2\varphi}\psi$, $\gamma_1^2+\gamma_2^2 \neq 0$	$\lvert\psi\rvert^{\gamma_2}e^{-\gamma_1\varphi}$	$(\gamma_1^2+\gamma_2^2)D - \gamma_1 I - \gamma_2 M$
1.2	$(f(\Omega) + (\gamma - i)\delta\ln\lvert\psi\rvert)\psi$	$\lvert\psi\rvert^{\gamma}e^{-\varphi}$	$e^{\delta t}(I + \gamma M)$
1.3	$(f(\Omega) + \delta\varphi)\psi$, $\delta \neq 0$	$\lvert\psi\rvert$	$e^{\delta t}M$, $e^{\delta t}\left(\partial_a + \frac{1}{2}\delta x_a M\right)$
1.4	$f(\Omega)\psi$	$\lvert\psi\rvert$	M, G_a
1.5	$f(\Omega)e^{i\,\mathrm{Im}\,\psi}$	$\mathrm{Re}\,\psi$	$D + i(\partial_\psi - \partial_{\psi^*})$
1.6	$f(\Omega) + i(\delta_1 + i\delta_2)\psi$	$\mathrm{Re}\,\psi$	$ie^{-\delta_1 t}\theta(x)(\partial_\psi - \partial_{\psi^*})$

Таблиця 2

Випадки розширення, коли вираз для функції F не містить довільних функцій. Тут γ, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 — дійсні сталі, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \neq 0$ (при цьому $|\sigma| = 1 \bmod G^{\text{equiv}}$); $\eta^0 = \eta^0(t, x) \in \mathbb{C}$ — довільний розв'язок вихідного рівняння; $\theta = \theta(x) \in \mathbb{R}$ — довільний розв'язок рівняння Лапласа $\Delta\theta = 0$. У випадках 2.9 – 2.15 $\delta_j = \pm 1 \bmod G^{\text{equiv}}$ для одного значення $j \in \{1; 2; 3; 4\}$, якщо $\delta_j \neq 0$

Випадок	F	Оператор розширення
2.1	0	$G_a,\ I,\ M,\ D,\ \Pi,\ \eta^0\partial_\psi + \eta^{0*}\partial_{\psi^*}$
2.2	$\gamma\psi + \psi^*$	$I,\ \eta^0\partial_\psi + \eta^{0*}\partial_{\psi^*}$
2.3	$\sigma\lvert\mathrm{Re}\,\psi\rvert^\gamma,\ \gamma \neq 0, 1$	$I + (1-\gamma)D,\quad i\theta(x)(\partial_\psi - \partial_{\psi^*})$
2.4	$\sigma \ln\lvert\mathrm{Re}\,\psi\rvert$	$I + D - i\left(t\,\mathrm{Re}\,\sigma + \frac{1}{2n}x_a x_a\,\mathrm{Im}\,\sigma\right)(\partial_\psi - \partial_{\psi^*}),$ $i\theta(x)(\partial_\psi - \partial_{\psi^*})$
2.5	$\sigma e^{\mathrm{Re}\,\psi}$	$D - \partial_\psi - \partial_{\psi^*},\quad i\theta(x)(\partial_\psi - \partial_{\psi^*})$
2.6	$\sigma\lvert\psi\rvert^{\gamma_1}e^{\gamma_2\varphi}\psi,\ \gamma_2 \neq 0$	$M - \gamma_2 D,\quad \gamma_2 I - \gamma_1 M$
2.7	$\sigma\lvert\psi\rvert^\gamma\psi,\quad \gamma \neq 0, \frac{4}{n}$	$G_a,\ M,\ I - \gamma D$
2.8	$\sigma\lvert\psi\rvert^{4/n}\psi,$	$G_a,\ M,\ I - \frac{4}{n}D,\ \Pi$
	Надалі $F = (-(\delta_1 + i\delta_2)\ln\lvert\psi\rvert + (\delta_3 - i\delta_4)\varphi)\psi;\ \Delta = (\delta_2 - \delta_3)^2 - 4\delta_1\delta_4$	
2.9	$\delta_4 = 0,\ \delta_3 \neq 0,\ \delta_2 \neq \delta_3$	$e^{\delta_3 t}M,\ e^{\delta_3 t}\left(\partial_a + \frac{1}{2}\delta_3 x_a M\right),\ e^{\delta_2 t}\left(I - \frac{\delta_1}{\delta_2 - \delta_3}M\right)$
2.10	$\delta_4 = 0,\ \delta_3 \neq 0,\ \delta_2 = \delta_3$	$e^{\delta_3 t}M,\quad e^{\delta_3 t}\left(\partial_a + \frac{1}{2}\delta_3 x_a M\right),\quad e^{\delta_2 t}(I - \delta_1 tM)$
2.11	$\delta_4 = 0,\ \delta_3 = 0,\ \delta_2 \neq 0$	$M,\ G_a,\ e^{\delta_2 t}(\delta_2 I - \delta_1 M)$
2.12	$\delta_4 = 0,\ \delta_3 = 0,\ \delta_2 = 0,\ \delta_1 \neq 0$	$M,\ G_a,\ I - \delta_1 tM$
2.13	$\delta_4 \neq 0,\ \Delta > 0$	$e^{\lambda_i t}(\delta_4 I + (\lambda_i - \delta_2)M),\quad i = 1, 2,$ $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_3 - \sqrt{\Delta}),\quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_3 + \sqrt{\Delta})$
2.14	$\delta_4 \neq 0,\ \Delta < 0$	$e^{\mu t}(\delta_4 \cos\nu t\, I + ((\mu - \delta_2)\cos\nu t - \nu\sin\nu t)M),$ $e^{\mu t}(\delta_4 \sin\nu t\, I + ((\mu - \delta_2)\sin\nu t + \nu\cos\nu t)M),$ $\mu = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_3),\quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}$
2.15	$\delta_4 \neq 0,\ \Delta = 0$	$e^{\mu t}\left(\delta_4 tI + \frac{1}{2}(\delta_3 - \delta_2)tM + M\right),$ $e^{\mu t}\left(\delta_4 I + \frac{1}{2}(\delta_3 - \delta_2)M\right),\quad \mu = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_3)$

Симетрійні властивості таких рівнянь досліджувались в багатьох роботах (див., наприклад, [8–11]). В той же час нам не відомі роботи, в яких би містилися правильні і вичерпні результати групової класифікації в класі рівнянь (7). Викремимо їх з результатів попереднього пункту.

Теорема. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь з класу* (7) *є розширена алгебра Галілея:*

$$A^{\ker}_{||} = \tilde{g}(1,n) = \langle \partial_t, \partial_a, J_{ab}, G_a, M \rangle.$$

Повний набір нееквівалентних (відносно локальних перетворень) випадків розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності рівнянь вигляду (7) *вичерпується наступними випадками (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до* $A^{\ker}_{||}$; $\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \neq 0$, $|\sigma| = 1 \bmod G^{\mathrm{equiv}}$; $\gamma, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$; $\delta_2 = \pm 1 \bmod G^{\mathrm{equiv}}$ *та* $\delta_1 = \pm 1 \bmod G^{\mathrm{equiv}}$ *для випадків* 3 *і* 4 *відповідно*):

1) $f = \sigma|\psi|^\gamma$, *де* $\gamma \neq 0, \dfrac{4}{n}$: $\quad I - \gamma D$;

2) $f = \sigma|\psi|^{4/n}$: $\quad I - \dfrac{4}{n} D, \ \Pi$;

3) $f = -(\delta_1 + i\delta_2)\ln|\psi|$, *де* $\delta_2 \neq 0$: $\quad e^{\delta_2 t}(\delta_2 I - \delta_1 M)$;

4) $f = -\delta_1 \ln|\psi|$, *де* $\delta_1 \neq 0$: $\quad I - \delta_1 t M$;

5) $f = 0$: $\quad I, D, \Pi, \eta^0\partial_\psi + \eta^{0*}\partial_{\psi^*}$, *де* $\eta^0 = \eta^0(t,x)$ *— довільний розв'язок вихідного рівняння.*

5. Доведення результату класифікації. Нехай $A^{\max} = A^{\max}(F)$ — максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності рівняння (1) з функцією $F = F(\psi, \psi^*)$. Якщо є розширення (тобто $A^{\max} \neq A^{\ker}$), то в алгебрі $A^{\max}$ існують оператори, підстановка коефіцієнтів яких в умову (3) дає (нетотожне) рівняння на F. Кожне таке рівняння має вигляд

$$(a\psi + b)F_\psi + (a^*\psi^* + b^*)F_{\psi^*} + cF + d\psi + e = 0, \tag{8}$$

де a, b, c, d, e — комплексні сталі. Диференціальні наслідки рівнянь вигляду (8), що мають (як диференціальні рівняння) перший порядок, також зводяться до вигляду (8). Отже, *якщо* $A^{\max} \neq A^{\ker}$, *то функція* F *задовольняє* k, $k \in \{1; 2; 3\}$, *незалежних рівнянь вигляду* (8). Лінійний випадок зручно розглянути окремо.

Зауважимо, що застосування стандартних методів групової класифікації в даній задачі зводиться до дослідження різних випадків інтегрування одного рівняння вигляду (8) (в залежності від значення сталих a, b, c, d, e) з наступним розщепленням на випадки більшого розширення групи симетрії, коли функція F задовольняє певні додаткові умови. Ця процедура призводить до громіздкого перебору з неодноразовим повторенням однакових випадків. Пропонований метод дозволяє уникнути зайвого перебору і суттєво зменшити кількість випадків, які необхідно розглянути.

Лінійний випадок. Нехай F — лінійна по (ψ, ψ^*) функція, тобто $F = \sigma_1\psi + \sigma_2\psi^* + \sigma_0$, де $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ — комплексні сталі. Сталу σ_0 завжди можна покласти рівною 0 за допомогою перетворення $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{\psi} = \psi + \nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 x_a x_a$ з розширення G^{equiv}, де комплексні сталі ν_0, ν_1 та ν_2 визначаються з вигляду F. Тоді в залежності від значення сталої σ_2 ($\sigma_2 = 0$ або $\sigma_2 \neq$

$\neq 0$) функція F зводиться перетвореннями з G^{equiv} та з розширення $G^{\text{equiv}}(\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = x,\ \tilde{\psi} = \psi e^{i\sigma_1 t}$ або $\tilde{\psi} = \psi e^{-t\,\mathrm{Im}\,\sigma_1})$ до випадку 2.1 або 2.2 (де $\gamma = \mathrm{Re}\,\sigma_1$) відповідно.

Надалі F — нелінійна по (ψ, ψ^*) функція, тому в (8) $(a, b) \neq (0, 0)$.

$k = 1$. З (3) випливає

$$\eta^1 = \lambda a, \quad \eta^0 = \lambda b, \quad \xi^0_t - \eta^1 = \lambda c, \quad i\eta^1_t + \Delta\eta^1 = \lambda d, \quad i\eta^0_t + \Delta\eta^0 = \lambda e,$$

де $\lambda = \lambda(t, x) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ (інакше $A^{\max} = A^{\ker}$).

При $a \neq 0$ $b = 0 \bmod G^{\text{equiv}}$, звідки $\eta^0 = 0$, $e = 0$, $d = -i\delta a$, де $\delta \in \mathbb{R}$. Якщо додатково $c + a \neq 0$, то

$$c + a = -|a|^2 \bmod G^{\text{equiv}}, \quad \xi^0_{tt} = 0, \quad \chi^a_t = 0, \quad \zeta = \text{const}, \quad d = 0$$

(випадок 1.1, де $\gamma_1 = \mathrm{Re}\,a$, $\gamma_2 = \mathrm{Im}\,a$). Якщо $c + a = 0$, $\mathrm{Re}\,a \neq 0$, то

$$\mathrm{Re}\,a = 1 \bmod G^{\text{equiv}}, \quad \xi^0_t = 0, \quad \chi^a_t = 0, \quad \lambda_a = 0, \quad \lambda_t = \delta\lambda$$

(випадок 1.2, де $\gamma = \mathrm{Im}\,a$). Якщо $c + a = 0$, $\mathrm{Re}\,a = 0$, то

$$\mathrm{Im}\,a \neq 0 \text{ (причому } \mathrm{Im}\,a = 1 \bmod G^{\text{equiv}}), \quad \xi^0_t = 0, \quad \chi^a_{tt} = \delta\chi^a_t,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\chi^a_t x_a + \mathrm{Im}\,\zeta, \quad \mathrm{Re}\,\zeta = 0$$

(випадки 1.3 і 1.4 при $\delta \neq 0$ і $\delta = 0$ відповідно).

Якщо $a = 0$, то $b \neq 0$ (причому $b = i \bmod G^{\text{equiv}}$), $\eta^1 = 0$ (отже, $d = 0$, $\xi^0_{tt} = 0$, $\chi^a_t = 0$), $c \in \mathbb{R}$. Тоді при $c \neq 0$ $c = 1 \bmod G^{\text{equiv}}$, $\lambda = \xi^0_t = \text{const}$, $\eta^0 = i\xi^0_t$, $e = 0$ (випадок 1.5), а при $c = 0$ $\xi^0_t = 0$, $\eta^0 = ie^{-\delta_1 t}\theta(x)$, де $\Delta\theta = \delta_2\theta$, $\delta_1 = \mathrm{Re}\,e$, $\delta_2 = \mathrm{Im}\,e$ (випадок 1.6).

$k = 2$. Нехай існує функція F, нелінійна по (ψ, ψ^*), що задовольняє систему з двох незалежних рівнянь вигляду (8), тобто

$$(a_j\psi + b_j)F_\psi + (a^*_j\psi^* + b^*_j)F_{\psi^*} + c_jF + d_j\psi + e_j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{9}$$

де a_j, b_j, c_j, d_j, e_j $(j = 1, 2)$ — комплексні сталі, причому

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a^*_1 & b^*_1 \\ a_2 & b_2 & a^*_2 & b^*_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Лема 1. *З точністю до перетворень з* G^{equiv} *та дійсних лінійних перетворень самих рівнянь повинна виконуватись одна з наступних умов*:

1) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = i$, $c_2 = 0$,

$$id_1 = e_2(c_1 + 1), \quad d_2(c_1 + 2) = 0, \quad (c_1, e_1) \neq (0, 0);$$

2) $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $b_1 = b_2 = 0$, $d_1(c_2 + a_2) = d_2(c_1 + a_1)$, $c_1e_2 = c_2e_1$;

3) $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = i$, $d_1c_2 = d_2c_1$, $b_1d_2 + c_1e_2 = b_2d_1 + c_2e_1$.

Рівняння (3) як умова на F має залежати від рівнянь (9) для будь-якого фіксованого оператора з $A^{\max}$, а тому для знаходження всіх додаткових до (2) визначальних рівнянь на ξ^0 і η достатньо прирівняти до 0 мінори третього порядку розширеної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3), (9) відносно „невідомих" F_ψ, F_{ψ^*}, F:

$$\begin{vmatrix} a_1\psi+b_1 & a_1^*\psi^*+b_1^* & c_1 \\ a_2\psi+b_2 & a_2^*\psi^*+b_2^* & c_2 \\ \eta^1\psi+\eta^0 & \eta^{1*}\psi^*+\eta^{0*} & \xi_t^0-\eta^1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1\psi+b_1 & a_1^*\psi^*+b_1^* & d_1\psi+e_1 \\ a_2\psi+b_2 & a_2^*\psi^*+b_2^* & d_2\psi+e_2 \\ \eta^1\psi+\eta^0 & \eta^{1*}\psi^*+\eta^{0*} & (i\eta_t^1+\Delta\eta^1)\psi+i\eta_t^0+\Delta\eta^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

(Рівняння (10) можна розщепити за змінними ψ та ψ^*.)

Розглянемо кожен випадок з леми 1 окремо, шукаючи лише додаткові (порівняно з наведеними в табл. 1) розширення алгебри інваріантності.

1. З (10) випливає, що $\eta^1 \in \mathbb{R}$ (тобто $\xi_{tt}^0 = 0$, $\chi_t^a = 0$, $\zeta \in \mathbb{R}$), $\eta^0 = i\rho(t,x)$, де

$$\rho \in \mathbb{R}, \quad -\rho_t + i\Delta\rho + e_1\zeta + e_2\rho = 0, \quad i\zeta_t + d_1\zeta + d_2\rho = 0.$$

Додаткове розширення $A^{\max}$ є лише при

$$d_1 = d_2 = e_2 = 0, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_1 + 1 \neq 0.$$

За цих умов рівняння (1) перетворенням

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{\psi} = \psi + i(\nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 x_a x_a)$$

з розширення G^{equiv}, де дійсні сталі ν_0, ν_1 та ν_2 визначаються з вигляду F, зводиться до випадку 2.3 (якщо $c_1 \neq 0$), де $\gamma = -c_1$, або 2.4 (якщо $c_1 = 0$), де $\sigma = -e_1$.

2. З (10) випливає, що

$$\eta^0 = 0, \quad \tilde{c}_1\eta^1 + \tilde{c}_2\eta^{1*} = \xi_t^0 - \eta^1,$$
$$\tilde{d}_1\eta^1 + \tilde{d}_2\eta^{1*} = i\eta_t^1 + \Delta\eta^1, \quad \tilde{e}_1\eta^1 + \tilde{e}_2\eta^{1*} = 0,$$

де

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2), \quad \tilde{d}_1 = \frac{1}{2}(d_1 - id_2), \quad \tilde{e}_1 = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2),$$
$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{2}(c_1 + ic_2), \quad \tilde{d}_2 = \frac{1}{2}(d_1 + id_2), \quad \tilde{e}_2 = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2), \tag{11}$$

звідки $\tilde{d}_1(\tilde{c}_2+1) = \tilde{d}_2\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_1\tilde{e}_2 = \tilde{c}_2\tilde{e}_1$. Систему (9) можна подати у вигляді

$$\psi F_\psi + \tilde{c}_1 F + \tilde{d}_1\psi + \tilde{e}_1 = 0, \quad \psi^* F_{\psi^*} + \tilde{c}_2 F + \tilde{d}_2\psi + \tilde{e}_2 = 0.$$

$(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = (0, 0)$ (інакше матимемо частинний випадок випадку 1.1).

Якщо $\tilde{c}_1 = -1$, $\tilde{c}_2 = 0$, то $\xi_t^0 = 0$, $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = 0$ (інакше $A^{\max} = A^{\ker}$), а тому

$$\chi_{tt}^a = (\delta_3 - i\delta_4)\chi_t^a, \quad \zeta_t^1 = \delta_2\zeta^1 + \delta_4\zeta^2, \quad \zeta_t^2 = -\delta_1\zeta^1 + \delta_3\zeta^2,$$

де

$$\delta_1 = \operatorname{Re} d_1, \quad \delta_2 = \operatorname{Im} d_1, \quad \delta_3 = -\operatorname{Re} d_2, \quad \delta_4 = \operatorname{Im} d_2.$$

В залежності від значень сталих δ_l, $l = 1, 4$, отримуємо випадки 2.9 – 2.15.

Якщо $\tilde{c}_1 = -1$, $\tilde{c}_2 = 0$, то додаткове розширення $A^{\max}$ існує лише за умов

$$\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = 0, \quad \tilde{c}_1 + 1 = \tilde{c}_2^* \neq 0.$$

Тоді в залежності від значення $\tilde{c}_2$ рівняння (1) перетворенням з розширення G^{equiv} зводиться до випадку 2.6 (якщо $\tilde{c}_2 \notin \mathbb{R}$), де $\gamma_1 = -2\operatorname{Re}\tilde{c}_2$, $\gamma_2 = -2\operatorname{Im}\tilde{c}_2$, 2.7 (якщо $\tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{c}_2 \neq -2/n$), де $\gamma = -2\tilde{c}_2$, або 2.8 (якщо $\tilde{c}_2 = -2/n$).

3. З (10) випливає, що

$$\eta^1 = 0 \quad (\text{тобто } \xi^0_{tt} = 0,\ \chi^a_t = 0,\ \zeta = 0),$$
$$\tilde{c}_1\eta^0 + \tilde{c}_2\eta^{0*} = \xi^0_t, \qquad \tilde{d}_1\eta^0 + \tilde{d}_2\eta^{0*} = 0, \qquad \tilde{e}_1\eta^0 + \tilde{e}_2\eta^{0*} = i\eta^0_t + \Delta\eta^0,$$

де сталі $\tilde{c}_j$, $\tilde{d}_j$, $\tilde{e}_j$, $j = 1, 2$ визначені в (11). Систему (9) можна записати у вигляді

$$F_\psi + \tilde{c}_1 F + \tilde{d}_1\psi + \tilde{e}_1 = 0, \qquad F_{\psi^*} + \tilde{c}_2 F + \tilde{d}_2\psi + \tilde{e}_2 = 0.$$

Для існування додаткового розширення $A^{\max}$ мають виконуватися умови

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0, \qquad \tilde{c}_1^* = \tilde{c}_2 \neq 0,$$

звідки $\tilde{c}_1^* = \tilde{c}_2 = -1 \bmod G^{\text{equiv}}$. Тоді перетворенням

$$\tilde{t} = t, \qquad \tilde{x} = x, \qquad \tilde{\psi} = \psi + it\operatorname{Re} e_1 - \frac{i}{2n}x_a x_a \operatorname{Im} e_1$$

з розширення G^{equiv} рівняння (1) зводиться до випадку 2.5.

$k = 3$. Справедлива наступна лема.

Лема 2. *Нехай функція F задовольняє систему трьох незалежних рівнянь вигляду* (8). *Тоді F лінійна по* (ψ, ψ^*).

Класифікація в класі рівнянь (1) завершена. Окрім відомих частинних випадків [9, 11] знайдено повний набір нееквівалентних рівнянь (1), що допускають нетривіальну симетрію.

Зауважимо, що попередні результати з групової класифікації систем двох рівнянь дифузії (до класу яких входить і рівняння (1), якщо розглядати його як систему двох рівнянь для двох дійсних функцій) було анонсовано в [5]. Наші результати підтверджують, а також уточнюють результати [5].

1. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
2. *Doebner H.-D., Goldin G.* Properties of nonlinear Schrödinger equations assotiated with diffeomorphism group representations // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1994. – **27**, № 5. – P. 1771–1780.
3. *Bialynicki-Birula I., Mycielski J.* Nonlinear wave mechanics // Ann. Phys. – 1970. – **100**, № 1 –2. – P. 62–93.
4. *Zhdanov R. Z., Lahno V. I.* Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.
5. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – Kyiv: Inst. Math. NAS Ukraine, 2000. – **30**, Pt 1. – P. 47–59.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
7. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
8. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 6–28.
9. *Fushchich W. I., Serov N. I.* On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1987. – **20**, № 6. – P. L929–L933.
10. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
11. *Chopyk V.* Symmetry and reduction of multi-dimensional Schrödinger equation with the logarithmic nonlinearity // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Kyiv: Inst. Math. NAS Ukraine, 1992. – P. 55–62.

Одержано 16.10.2000