УДК 519.21

И. В. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МОМЕНТЫ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ЭВОЛЮЦИЙ

We find moments of a process of Markov random evolutions in a finite-dimensional space.

Знайдено моменти процесу марковських випадкових еволюцій у просторі скінченної розмірності.

Введение. В работе [1] описан вероятностный метод решения телеграфного уравнения с вещественно-аналитическими начальными условиями. Решением задачи Коши для телеграфного уравнения являются функционалы от марковских случайных эволюций в R^1 вида

$$u(x,t) = Ef\left(x + V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}\,du\right) \tag{1}$$

(см., например, [2], раздел 1). Для функций вида $f(x) = x^k$ в [1] вычислены $u(x,t)$ в явном виде, т. е. найдены моменты марковских случайных эволюций в R^1.

Однако при применении к эволюциям в R^n [3] предложенного метода возникают определенные трудности: для нахождения функционала, соответствующего функции вида $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{k_1},\ldots,x_n^{k_n}$, необходимо отыскать все моменты степени меньше $k_1+\ldots+k_n$.

В данной работе к марковским случайным эволюциям применен метод отыскания моментов, описанный в работе [4, с. 202], который дает возможность непосредственно находить любой момент как в случае пространства R^1, так и в случае пространств больших размерностей.

1. Моменты марковских случайных эволюций на прямой. Для отыскания функций $u(x,t)$ из (1) для $f(x) = x^k$, $k = 1, 2, \ldots$, рассмотрим вначале телеграфный процесс: $(-1)^{\xi(u)}$, $\xi(u)$ — цепь Маркова со значениями $\{0, 1\}$, проводящая в каждом из состояний время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром λ, и имеющая начальное распределение $P(\xi(0)=0) = p$, $P(\xi(0)=1) = q$, $p+q = 1$.

Известно, что матрица переходных вероятностей процесса, названного выше телеграфным, имеет вид

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

С помощью матрицы (2) можно находить моменты телеграфного процесса:

1) $$M\left[(-1)^{\xi(t)}\right] = 1\left(p\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\right)+q\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\right)\right) +$$
$$+ (-1)\left(p\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\right)+q\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\right)\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}re^{-2\lambda t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}re^{-2\lambda t} =$$
$$= re^{-2\lambda t}, \quad r = p - q;$$

$$2)\ M\left[(-1)^{\xi(u)}(-1)^{\xi(t)}\right] = 1\left(p\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda u}\right)+q\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda u}\right)\right)\times$$
$$\times\left[1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)}\right)+(-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)}\right)\right] +$$
$$+ (-1)\left(p\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda u}\right)+q\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda u}\right)\right)\times$$
$$\times\left[1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)}\right)+(-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)}\right)\right] =$$
$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}re^{-2\lambda u}\right)\left[e^{-2\lambda(t-u)}\right]-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}re^{-2\lambda u}\right)\left[-e^{-2\lambda(t-u)}\right] =$$
$$= e^{-2\lambda(t-u)}, \quad t > u, \quad \text{и т. д.}$$

Теорема 1. *Моменты марковских случайных эволюций в* R^1 *имеют вид*

$$M\left(V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right) = r\frac{V}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right),$$
$$M\left(V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^2 = -\frac{V^2}{2\lambda^2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)+\frac{V^2}{\lambda}t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M\left(V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^k = k!V^k\int_0^t\int_0^{\tau_k}\ldots\int_0^{\tau_2}M\left[(-1)^{\xi(\tau_1)}\times\right.$$
$$\left.\times(-1)^{\xi(\tau_2)}\ldots(-1)^{\xi(\tau_k)}\right]d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_k, \quad 0\le\tau_1<\ldots<\tau_k\le t.$$

Доказательство. Для k-го момента аналогично [4, с. 202] имеем

$$M\left(V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^k = k!V^k\int_0^t\int_0^{\tau_k}\ldots\int_0^{\tau_2}M\left[(-1)^{\xi(\tau_1)}\times\right.$$
$$\left.\times(-1)^{\xi(\tau_2)}\ldots(-1)^{\xi(\tau_k)}\right]d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_k, \quad 0\le\tau_1<\ldots<\tau_k\le t.$$

Для вычисления первого и второго моментов воспользуемся найденными выше моментами телеграфного процесса:

$$M\left(V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right) = V\int_0^t M\left[(-1)^{\xi(u)}\right]du = V\int_0^t re^{-2\lambda u}du =$$
$$= Vr\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\left(e^{-2\lambda t}-1\right) = r\frac{V}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right),$$
$$M\left(V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^2 = 2!V^2\int_0^t\int_0^{\tau_2}M\left[(-1)^{\xi(\tau_1)}(-1)^{\xi(\tau_2)}\right]d\tau_1\,d\tau_2 =$$
$$= 2!V^2\int_0^t\int_0^{\tau_2}e^{-2\lambda(\tau_2-\tau_1)}\,d\tau_1\,d\tau_2 = -\frac{2V^2}{2\lambda}\int_0^t e^{-2\lambda\tau_2}\left(1-e^{2\lambda\tau_2}\right)d\tau_2 =$$
$$= -\frac{2V^2}{4\lambda^2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)+\frac{V^2}{\lambda}t = -\frac{V^2}{2\lambda^2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)+\frac{V^2}{\lambda}t,$$
$$0\le\tau_1<\ldots<\tau_k\le t.$$

Моменты более высоких порядков находятся аналогично. Теорема доказана.

Для функционалов вида (1) имеем:

$$f(x) = x : u(x,t) = M\left(x + V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right) = x + r\frac{V}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right),$$

$$f(x) = x^2 : u(x,t) = M\left(x + V\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^2 =$$

$$= M\left(x^2 + 2xV\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du + V^2\left[\int_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right]^2\right) =$$

$$= x^2 + 2xr\frac{V}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) + \frac{V^2}{\lambda}t - \frac{V^2}{2\lambda^2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) =$$

$$= x^2 + \frac{V^2}{\lambda}t + \left(xr\frac{V}{\lambda} - \frac{V^2}{2\lambda^2}\right)\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$$

и т. д.

***Замечание* 1.** Если положить $V^2/\lambda = \sigma^2$, $1/2\lambda = \varepsilon^2$, то для $u(x,t)$ получим выражения, найденные в [1].

***Замечание* 2.** Если перейти к гидродинамическому пределу (см. [1], гл. 5) $V \to \infty$, $\lambda \to \infty$, $\dfrac{V^2}{\lambda} \to \sigma^2$, то $\varepsilon \to 0$ и

$$f(x) = x : u(x,t) \to x,$$

$$f(x) = x^2 : u(x,t) \to x^2 + \sigma^2 t$$

и т. д.

Таким образом, моменты марковских случайных эволюций в гидродинамическом пределе сходятся к моментам винеровского процесса.

2. Моменты марковских случайных эволюций в R^n. В работе [3] введено понятие марковских случайных эволюций в R^n: $V\int_0^t \bar{\tau}_{\xi(u)}du$, где $\bar{\tau}_0, \ldots, \bar{\tau}_n$ — векторы, выходящие из центра правильного n-эдра, вписанного в единичную сферу в R^n, и имеющие концы в вершинах n-эдра; $\xi(u)$ — цепь Маркова со значениями $\{0, 1, \ldots, n\}$, проводящая в каждом состоянии экспоненциально распределенное с параметром λ время, а затем мгновенно переходящая в одно из оставшихся состояний (выбор каждого состояния имеет вероятность $1/n$). Начальное распределение $P(\xi(0)=0) = r_0$, $P(\xi(0)=n) = r_n$, $r_0 + \ldots + r_n = 1$.

Теорема 2. *Матрица переходных вероятностей n-мерного телеграфного процесса имеет вид*

$$P(t) = \begin{pmatrix} A & B & B & \ldots \\ B & A & B & \ldots \\ B & B & A & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$$A = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}, \quad B = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}.$$

Моменты марковских случайных эволюций в R^n таковы:

$$M\left(V\int_0^t \tau^{(i)}_{\xi(u)} du \right) = -V\left[\frac{n+1}{n}\frac{1}{\lambda}\right]\left(\tau_0^{(i)} r_0 + \ldots + \tau_n^{(i)} r_n\right)\left(e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t} - 1\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M\left(V\int_0^t \tau^{(1)}_{\xi(u_1)} du_1 \right)^{k_1} \ldots M\left(V\int_0^t \tau^{(n)}_{\xi(u_n)} du_n \right)^{k_n} =$$

$$= \sum \int_0^t \int_0^{\theta_2} \ldots \int_0^{\theta_{k_1+\ldots+k_n}} M\left[\tau^{(1)}_{\xi(\theta_1)} \ldots \tau^{(n)}_{\xi(\theta_{k_1+\ldots+k_n})}\right] d\theta_1 \ldots d\theta_{k_1+\ldots+k_n},$$

$$0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_{k_1+\ldots+k_n} \le t,$$

где суммирование ведется по всем возможным перестановкам $\tau_j^{(i)}$ (таковых $(k_1 + \ldots + k_n)!$).

***Замечание* 3.** При $n = 1$ (3) совпадает с (2).

Доказательство. Известно, что матрица переходных вероятностей цепи Маркова, имеющая указанные свойства, может быть представлена в виде $P(t) = e^{tQ}$, где

$$Q = \lambda(P - I), \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \ldots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

поскольку из каждого состояния процесс с одинаковой вероятностью может перейти в одно из оставшихся состояний. Тогда

$$Q = -\lambda I + \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \ldots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots \\ \frac{1}{n} & -1 & \frac{1}{n} & \ldots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{n+1}{n}\lambda \begin{pmatrix} -\frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \ldots \\ \frac{1}{n} & -\frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \ldots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & -\frac{n}{n+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \frac{n+1}{n}\lambda(\Pi - I).$$

Здесь

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Pi^k = \Pi, \quad k = 2, 3, \dots$$

Тогда

$$P(t) = \exp(tQ) = \exp\left(-\frac{n+1}{n}\lambda t\right)\exp\left(\frac{n+1}{n}\lambda \Pi t\right) =$$

$$= e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}\left(I + \frac{1}{1!}\frac{n+1}{n}\lambda t\Pi + \frac{1}{2!}\left(\frac{n+1}{n}\lambda t\right)^2\Pi + \dots\right) =$$

$$= e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}\left(I - \Pi + e^{\frac{n+1}{n}\lambda t}\Pi\right) = \Pi + e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}(I - \Pi) = \begin{pmatrix} A & B & B & \dots \\ B & A & B & \dots \\ B & B & A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}, \quad B = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}.$$

Для произвольного момента в R^n аналогично R^1 имеем

$$M\left(V\int_0^t \tau^{(1)}_{\xi(u_1)}du_1\right)^{k_1} \dots \left(V\int_0^t \tau^{(n)}_{\xi(u_n)}du_n\right)^{k_n} =$$

$$= \sum \int_0^t \int_0^{\theta_2} \dots \int_0^{\theta_{k_1+\dots+k_n}} M\left[\tau^{(1)}_{\xi(\theta_1)} \dots \tau^{(2)}_{\xi(\theta_{k_1+\dots+k_n})}\right] d\theta_1 \dots d\theta_{k_1+\dots+k_n},$$

$$0 \le \theta_1 < \dots < \theta_{k_1+\dots+k_n} \le t,$$

где суммирование ведется по всем возможным перестановкам $\tau_j^{(i)}$ (таковых $(k_1 + \dots + k_n)!$), как и в [4, с. 202].

Поскольку сумма $\tau_0^{(i)} + \dots + \tau_n^{(i)} = 0$, $i = \overline{0, n}$ [3], то первый момент имеет вид ($\tau_k^{(i)}$ — i-я компонента координаты k-го вектора)

$$M\left(V\int_0^t \tau^{(i)}_{\xi(u)}du\right) = V\int_0^t M\left[\tau^{(i)}_{\xi(u)}\right]du =$$

$$= V\int_0^t \left[\tau_0^{(i)}\left(r_0\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-(n+1)\lambda u/n}\right) + r_1\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)\lambda u/n}\right) + \dots\right.\right.$$

$$\left.\dots + r_n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)\lambda u/n}\right)\right) + \dots + \tau_n^{(i)}\left(r_0\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)\lambda u/n}\right) + \right.$$

$$+ \; r_1\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)\lambda u/n}\right) + \ldots + r_n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}e^{-(n+1)\lambda u/n}\right)\Bigg)\Bigg]du =$$

$$= V\int_0^t\left[\left(\frac{1}{n+1}\left(\tau_0^{(i)}+\ldots+\tau_n^{(i)}\right)+\tau_0^{(i)}r_0e^{-(n+1)\lambda u/n}+\ldots+\tau_n^{(i)}r_ne^{-(n+1)\lambda u/n}\right]du =$$

$$= -V\left[\frac{n+1}{n}\frac{1}{\lambda}\right]\left(\tau_0^{(i)}r_0+\ldots+\tau_n^{(i)}r_n\right)\left(e^{-(n+1)\lambda u/n}-1\right) \quad \forall\, i.$$

Остальные моменты вычисляются аналогично.

Теорема доказана.

Пример: $n=2$,

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda t/2} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t/2} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t/2} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t/2} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda t/2} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t/2} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t/2} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t/2} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda t/2} \end{pmatrix},$$

$$f(x_1,x_2) = x_i, \quad i=1,2:\; u(t,x_1,x_2) = M\left(x_i+V\int_0^t\tau_{\xi(u)}^{(i)}du\right) =$$

$$= x_i+\frac{3V}{2\lambda}\left(\tau_0^{(i)}r_0+\tau_1^{(i)}r_1+\tau_2^{(i)}r_2\right)\left(1-e^{-3\lambda t/2}\right),$$

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2:\; u(t,x_1,x_2) = M\left(x_1+V\int_0^t\tau_{\xi(u_1)}^{(1)}du_1\right)\times$$

$$\times\left(x_2+V\int_0^t\tau_{\xi(u_2)}^{(2)}du_2\right) = x_1x_2+\frac{3V}{2\lambda}\left(1-e^{-3\lambda t/2}\right)\left(x_1\left[\tau_0^{(2)}r_0+\ldots+\tau_2^{(2)}r_2\right]+\right.$$

$$\left.+\;x_2\left[\tau_0^{(1)}r_0+\ldots+\tau_2^{(1)}r_2\right]\right)+V^2\left[\int_0^t\int_0^{\theta_2}M\left(\tau_{\xi(\theta_1)}^{(1)}\tau_{\xi(\theta_2)}^{(2)}\right)d\theta_1d\theta_2+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\int_0^{\theta_2}M\left(\tau_{\xi(\theta_1)}^{(2)}\tau_{\xi(\theta_2)}^{(1)}\right)d\theta_1d\theta_2\right].$$

Последнее слагаемое таково:

$$V^2\int_0^t\int_0^{\theta_2}\left[\left\{r_0\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)+r_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)+r_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)\right\}\times\right.$$

$$\times\left\{0\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)\right\}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{r_0\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)+r_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)+r_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)\right\}\times$$

$$\times\ \left\{0\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)\right\}\ +$$

$$+\ \left(-\frac{1}{2}\right)\left\{r_0\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)+r_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)+r_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda\theta_1/2}\right)\right\}\ \times$$

$$\times\left\{0\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3\lambda(\theta_2-\theta_1)/2}\right)\right\}\Bigg]d\theta_1 d\theta_2\ =$$

$$=\ \frac{\sqrt{3}}{2}(r_2-r_1)V^2\left[-\frac{2t}{3\lambda}e^{-3\lambda t/2}-\frac{4}{9\lambda^2}\left(e^{-3\lambda t/2}-1\right)\right].$$

***Замечание* 4.** В [3] найдено гиперпараболическое уравнение и соответствующая задача Коши, решением которой являются функционалы от марковских случайных эволюций в R^n:

$$u(t,x_1,\ldots,x_n)\ =\ Mf\left(x_1+V\int\limits_0^t\tau^{(1)}_{\xi(u_1)}du_1,\ \ldots,x_n+V\int\limits_0^t\tau^{(n)}_{\xi(u_n)}du_n\right).$$

Из предыдущего видно, что для $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{k_1},\ldots,x_n^{k_n}$ решения задачи Коши для гиперпараболического уравнения (обобщение телеграфного уравнения на случай R^n) выписываются в явном виде.

1. *Турбин А. Ф., Самойленко И. В.* Вероятностный метод решения телеграфного уравнения с вещественно-аналитическими начальными условиями // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 8. – С. 1127 – 1134.
2. *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики. – М.: Наука, 1967. – 176 с.
3. *Самойленко И. В.* Марковські випадкові еволюції в R^n // Міжнар. конф. з мат. моделювання: Тези допов. конф. (Лазурне, 2 – 8 вересня 1998 р.). – Київ, 1998. – С. 191 – 196.
4. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. – М.: Мир, 1965. – 406 с.
5. *Koroljuk V. S., Turbin A. F.* Mathematical foundation of state lumping of large systems. — Amsterdam: Kluver Acad. Press, 1990. – 280 p.

Получено 29.06.2000,
после доработки — 15.09.2000