УДК 517.98

В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СКАЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ПРЕДСТАВИМЫЕ СУММОЙ ПРОЕКТОРОВ

We study sets $\Sigma_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^1 \mid \text{there exist } n \text{ projections } P_1, \ldots, P_n \text{ such that } \sum_{k=1}^n P_k = \alpha I\}$. We prove that if $n \geq 6$ then $\left\{0, 1, 1+\frac{1}{n-1}, \left[1+\frac{1}{n-2}, n-1-\frac{1}{n-2}\right], n-1-\frac{1}{n-1}, n-1, n\right\} \supset \Sigma_n \supset$ $\supset \left\{0, 1, 1+\frac{k}{k(n-3)+2}, k \in \mathbb{N}, \left[1+\frac{1}{n-3}, n-1-\frac{1}{n-3}\right], n-1-\frac{k}{k(n-3)+2}, k \in \mathbb{N}, n-1, n\right\}$.

Вивчаються множини $\Sigma_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^1 \mid \text{існують } n \text{ проекторів } P_1, \ldots, P_n \text{ таких, що } \sum_{k=1}^n P_k = \alpha I\}$. Доведено: якщо $n \geq 6$, то $\left\{0, 1, 1+\frac{1}{n-1}, \left[1+\frac{1}{n-2}, n-1-\frac{1}{n-2}\right], n-1-\frac{1}{n-1}, n-1, n\right\} \supset \Sigma_n \supset \left\{0, 1, 1+\frac{k}{k(n-3)+2}, k \in \mathbb{N}, \left[1+\frac{1}{n-3}, n-1-\frac{1}{n-3}\right], n-1-\frac{k}{k(n-3)+2}, k \in \mathbb{N}, n-1, n\right\}$.

Введение. Теория представлений $*$-алгебр ($*$-гомоморфизмов в алгебру $L(H)$ линейных операторов в гильбертовом пространстве H) применяется при решении задач алгебры, анализа, математической физики и т. д. Если для $*$-алгебры известно описание всех неприводимых представлений с точностью до унитарной эквивалентности, то, разлагая это представление на неприводимые, можно ответить на многие вопросы относительно операторов представления этой алгебры. Так, классическая теорема И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка для коммутативных C^*-алгебр [1] и ее некоммутативные аналоги [2] дают возможность, например, построить символы обратимости для операторов из алгебры (см., например, [3]).

Среди $*$-алгебр особое место занимают $*$-алгебры, порожденные проекторами (т. е. элементами p_i такими, что $p_i = p_i^2 = p_i^*$). Для $*$-алгебры, порожденной парой проекторов $\mathbb{C}\langle p_1, p_2 \mid p_i^2 = p_i^* = p_i,\ i=1,2\rangle$, все неприводимые представления унитарно эквивалентны одномерным $\pi_{i_1,i_2}(p_1) = i_1$, $\pi_{i_1,i_2}(p_2) = i_2$, $i_1, i_2 = 0$ или 1, и двумерным

$$\pi_\varphi(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_\varphi(p_2) = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Отметим, что описание неприводимых представлений двух ортопроекторов применяется при изучении представлений алгебр, порожденных n проекторами, которые связаны соотношениями, и в их приложениях в структурной теории операторов (см. п. 1). Для алгебр $\mathcal{P}_n = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_i^2 = p_i^* = p_i,\ i=1,\ldots,n\rangle$ при $n \geq 3$ задача описания неприводимых $*$-представлений чрезвычайно сложна ($*$-дикая, см. [4]). Естественно, изучаются $*$-алгебры и представления $*$-алгебр, порожденных проекторами, связанными теми или иными соотношениями (например, групповые $*$-алгебры групп Коксетера и многие другие). В настоящей статье мы начинаем изучать представления $*$-алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C}\left\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_i^2 = p_i^* = p_i,\ i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^n p_i = \alpha e \right\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$: в пп. 2 – 10 изучаются множества $\Sigma_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^1 \mid$ существуют проекторы $P_1, \ldots, P_n \in L(H)$ такие, что $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I\}$, т. е. множества таких $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых существуют представления. Заметим, что с решения подобной задачи для $*$-алгебр Темперли – Либа, зависящих от параметра, берет начало известный цикл работ В. Джонса [5].

$*$-Представления $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha \in \Sigma_n$ и их приложения к известным задачам теории операторов о суммах проекторов (см. обзор [6] и приведенную там библиографию) будут описаны отдельно.

Формулировки части теорем, лемм и утверждений этой статьи приведены без доказательств в [7].

1. От двух проекторов к n-ке проекторов. Приведем сначала обозначения и необходимые леммы.

Символом I будем обозначать единичный оператор, а I_n и 0_n — единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$. Под записью $\operatorname{diag}\{x, y, z, \ldots\}$ подразумевается диагональная матрица с элементами $x, y, z, \ldots$ на диагонали.

Лемма 1. *Пусть дано число* τ, $1 \geq \tau > 0$, *и проекторы* P_1, P_2. *Тогда если* $\lambda \in \sigma(\tau P_1 + P_2)$ $(\lambda \neq 0, \tau, 1, 1+\tau)$, *то* $1 + \tau - \lambda \in \sigma\left(\tau P_1 + P_2\right)$.

***Замечание* 1.** Задача о том, какие операторы могут быть представлены в виде линейной комбинации двух проекторов, полностью решена в [8].

Доказательство. Известно, что любая пара проекторов может быть разложена в прямую сумму (или интеграл) неприводимых пар проекторов. При этом если $\lambda \neq 0, \tau, 1$ или $1 + \tau$, то любая неприводимая пара проекторов (в гильбертовом пространстве) унитарно эквивалентна паре $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$ для некоторого $0 < \varphi < \pi/2$. И для этой пары утверждение леммы проверяется непосредственно.

***Следствие* 1.** *Если* $0 < \varepsilon < \tau \leq 1$ *и*

$$\tau P_1 + P_2 \leq (1+\varepsilon) I, \tag{1}$$

то

$$\tau P_1 + P_2 \geq (\tau - \varepsilon) P_{\operatorname{Im} P_1 + \operatorname{Im} P_2}. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что существует число $\lambda \in \sigma\left(\tau P_1 + P_2\right)$ такое, что $0 < \lambda < \tau - \varepsilon$. Тогда для $0 < \lambda < \tau$, используя лемму 1, выводим неравенство $1 + \varepsilon < 1 + \tau - \lambda \in \sigma\left(\tau P_1 + P_2\right)$, которое противоречит (1).

В следующей лемме рассматривается случай большего числа проекторов. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — проекторы в гильбертовом пространстве. Определим в H подпространства $\mathfrak{H}_k = \operatorname{Im} P_1 + \ldots + \operatorname{Im} P_k$.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$ *и*

$$\sum_{k=1}^n P_k \leq (1+\varepsilon) I. \tag{3}$$

$$U^*\left[\sum_{i=1}^{k} P_i + \operatorname{diag}\{x, 0, \ldots, 0\}\right]U = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon, x - k\varepsilon\}.$$

Доказательство проведем индукцией по k. Пусть $k = 1$. Определим проектор P_1 согласно формуле

$$P_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 & \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} \\ \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} & 1 - \tau_1 \end{pmatrix},$$

где $0 < \tau_1 < 1$ подобрано так, чтобы характеристическое уравнение $(\tau_1 + x - \lambda)(1 - \tau_1 - \lambda) - (\tau_1 - \tau_1^2) = 0$ имело два корня $1 + \varepsilon$ и $x - \varepsilon$. Такое τ_1 действительно можно найти, так как после приведения характеристического уравнения к каноническому виду получаем уравнение $\lambda^2 - (1 + x)\lambda + x(1 - \tau_1) = 0$. Теперь легко показать, что

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon - x)}{x}.$$

Далее, поскольку собственные числа матрицы $\left(P_1 + \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ равны $1 + \varepsilon$ и $x - \varepsilon$, то существует унитарная матрица U_1 такая, что

$$U_1^*\left(P_1 + \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)U_1 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & x - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при $k = 1$ лемма 3 доказана.

Предположим теперь, что при $k = m$, произвольных ε и x лемма 3 верна и при фиксированных $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_0 < x_0 < 1 + \varepsilon_0$ выполнено неравенство $x_0 - (m + 1)\varepsilon_0 > 0$. Тогда по предположению для чисел ε_0, x_0 и m выполняется утверждение леммы, т. е. существуют проекторы $P_1, \ldots, P_m \in M_{m+1}(\mathbb{C})$ и унитарный оператор $U_m \in M_{m+1}(\mathbb{C})$ такие, что

$$U_m^*\left(\sum_{i=1}^{m} P_i + \operatorname{diag}\{x_0, 0, \ldots, 0\}\right)U_m = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon_0, \ldots, 1+\varepsilon_0, x_0 - m\varepsilon_0\}.$$

Поставим каждому проектору P_i в соответствие расширенную матрицу $Q_i \in M_{m+2}(\mathbb{C})$ по правилу

$$Q_i = \begin{pmatrix} P_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрице U_m — матрицу

$$U_{m+1} = \begin{pmatrix} U_m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда Q_i являются проекторами в $M_{m+2}(\mathbb{C})$ и

$$U_{m+1}^*(Q_1 + \ldots + Q_m + \operatorname{diag}\{x_0, 0, \ldots, 0\})U_{m+1} = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon_0, \ldots, 1+\varepsilon_0, x_0 - m\varepsilon_0, 0\}.$$

Пусть $Q_{m+1} \in M_{m+2}(\mathbb{C})$:

$$Q_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \tau & \sqrt{\tau-\tau^2} \\ 0 & \ldots & 0 & \sqrt{\tau-\tau^2} & 1-\tau \end{pmatrix},$$

где $\tau = \varepsilon_0(1+\varepsilon_0-(x_0-m\varepsilon_0))(x_0-m\varepsilon_0)^{-1}$. Матрица $Q_{m+1}^2 = Q_{m+1}$ — проектор. К тому же сумма матриц $(Q_1 + \ldots + Q_m + U_{m+1}Q_{m+1}U_{m+1}^* + \operatorname{diag}\{x_0, 0, \ldots, 0\})$ в некотором базисе имеет вид $\operatorname{diag}\{1+\varepsilon_0, \ldots, 1+\varepsilon_0, x_0-(m+1)\varepsilon_0\}$. Лемма доказана.

***Пример* 1.** Для всех $n \geq 2$ существуют n проекторов $Q_1, \ldots, Q_n$ в конечномерном пространстве H $(\dim H = n-1)$ таких, что $\sum_{i=1}^n Q_i = \left(1+(n-1)^{-1}\right)I$. Действительно, пусть $\varepsilon = (n-1)^{-1}, x = 1$ и $k = n-2$. Тогда согласно лемме 3 существуют $n-2$ проектора $P_2, \ldots, P_{n-1}$ в $M_{n-1}(\mathbb{C})$ такие, что

$$U^*\left(P_2 + \ldots + P_{n-1} + \operatorname{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}\right)U = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon, \varepsilon\},$$

где $U \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ — некоторая унитарная матрица.

Положим $Q_1 = U^* \operatorname{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}U$, $Q_i = U^* P_i U$, $i = 2, \ldots, n-1$, и $Q_n = \operatorname{diag}\{0, \ldots, 0, 1\}$. Тогда Q_i — проекторы и по построению $\sum_{i=1}^n Q_i = (1+\varepsilon)I = \left(1+(n-1)^{-1}\right)I$.

Заметим, что при $i \neq j$ проекторы Q_i и Q_j не коммутируют, а семейство проекторов $Q_1, \ldots, Q_n$ неприводимо.

***Следствие* 2.** *Множество* Σ_n *содержит весь набор чисел* $1 + (k-1)^{-1}$ *при* $k \leq n$.

Следствие 2 выводится также из [13].

4. Между 1 и $1 + (n-1)^{-1}$ нет точек из Σ_n.

Лемма 4. $\Sigma_n \cap \left(1, 1+(n-1)^{-1}\right) = \varnothing$ *при* $n \geq 2$.

Доказательство. 1. Приведем сначала простое доказательство леммы 4, предполагая, что $\dim H < \infty$. Пусть H — конечномерное пространство и P_i, $i = 1, \ldots, n$, — проекторы в нем. Предположим, что для некоторого $0 < \varepsilon < (n-1)^{-1}$ их сумма равна $(1+\varepsilon)I$. Перенесем матрицу P_k в правую часть равенства $\sum_{i\neq k}^n P_i = (1+\varepsilon)I - P_k$. Запишем след от обеих частей: $\sum_{i\neq k}^n \operatorname{tr}(P_i) = (1+\varepsilon)m - \operatorname{tr}(P_k)$ (m — размерность H). Поскольку $\sum_{i\neq k}^n \operatorname{tr}(P_i) \geq \operatorname{rang}\left(\sum_{i\neq k}^n (P_i)\right) = m$, то $\operatorname{tr}(P_k) \leq \varepsilon m$. В силу произвольности выбора k имеем $(1+\varepsilon)m = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(P_i) \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon m = mn\varepsilon$, откуда $\varepsilon \geq (n-1)^{-1}$. Противоречие.

2. Доказательство в сепарабельном гильбертовом пространстве H проведем, основываясь на лемме 2. Пусть P_i — проекторы в гильбертовом пространстве, $0 < \varepsilon < (n-1)^{-1}$ и $\sum_{k=1}^n P_k = (1+\varepsilon)I$. Тогда оператор $\sum_{k=1}^{n-1} P_k = (1+\varepsilon)I - P_n$ в некотором базисе имеет диагональный вид $\operatorname{diag}\{1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \ldots$

$\ldots, \varepsilon, \ldots \}$. Отсюда следует, что пространство $\mathfrak{H}_{n-1}$ совпадает со всем H и $\varepsilon \in \sigma\left(P_1 + \ldots + P_{n-1}\right)$. Применяя лемму 2 к оператору $\sum_{k=1}^{n} P_k$, получаем $\varepsilon \geq$ $\geq 1-(n-2)\varepsilon$, т. е. $\varepsilon \geq (n-1)^{-1}$. Противоречие.

5. Между $1 + (n-1)^{-1}$ и $1 + (n-2)^{-1}$ также нет точек из Σ_n.

Лемма 5. $\Sigma_n \cap \left(1+(n-1)^{-1}, 1+(n-2)^{-1}\right) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть действительное число ε удовлетворяет неравенству $(n-1)^{-1} < \varepsilon < (n-2)^{-1}$ и для некоторых проекторов $P_i, i = 1, \ldots, n,$ верно равенство

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = (1+\varepsilon)I. \tag{6}$$

Всегда можно предполагать, что $P_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, так как в противном случае утверждение леммы следует из леммы 4.

Применим лемму 2 к проекторам $P_1, \ldots, P_{n-2}$. Получим неравенство $(1-(n-3)\varepsilon)P_{\mathfrak{H}_{n-2}} \leq \sum_{k=1}^{n-2} P_k$. Поскольку $(1-(n-3)\varepsilon) > \varepsilon$, то

$$\varepsilon P_{\mathfrak{H}_{n-2}} < \sum_{k=1}^{n-2} P_k. \tag{7}$$

В силу равенства (6) и неравенства (7) имеем

$$\operatorname{Im} P_{n-1} \cap \mathfrak{H}_{n-2} = \left\{\bar{0}\right\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} P_n \cap \mathfrak{H}_{n-2} = \left\{\bar{0}\right\}.$$

Таким образом, существуют векторы из H, которые не принадлежат $\mathfrak{H}_{n-2}$, т. е. $\mathfrak{H}_{n-2} \oplus \left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)^{\perp} = H$ и $\left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)^{\perp}$ не совпадает с $\left\{\bar{0}\right\}$. Непосредственно из построения видно, что $P_k\left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)^{\perp} = \bar{0}, k = 1, \ldots, n-2$. С другой стороны, в силу равенства (6) имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)\left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)^{\perp} = \left(P_{n-1} + P_n\right)\left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)^{\perp} = \left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)^{\perp}.$$

Поскольку операторы $P_k, k = 1, \ldots, n-2$, и $\left(P_{n-1} + P_n\right)$ самосопряжены, то $\left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)$ также инвариантно относительно действия этих операторов, причем относительно разложения H в сумму $H = \left(\mathfrak{H}_{n-2}\right) \oplus \left(\mathfrak{H}_{n-2}\right)^{\perp}$ мы можем записать операторы в виде матриц: $P_k = \begin{pmatrix} P_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $P_k^{(1)}\colon \mathfrak{H}_{n-2} \to \mathfrak{H}_{n-2}, k =$ $= 1, \ldots, n-2,$ — проекторы и $\left(P_{n-1} + P_n\right) = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & (1+\varepsilon)I_0 \end{pmatrix}$, $X_1 : \mathfrak{H}_{n-2} \to \mathfrak{H}_{n-2}$ является самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}_{n-2}$.

Покажем, что спектр $\sigma(X_1) \subset \{0, 1-\varepsilon\}$. Действительно, если $x \in \sigma(X_1)$ и $x \notin \{0, 1-\varepsilon\}$, то хотя бы одно из чисел x или $2-x$ не меньше единицы и, более того, согласно лемме 1 оба принадлежат $\sigma(X_1)$. Допустим, что $x \geq 1$. Тогда по определению спектра элемента X_1 существует последовательность нормированных векторов $\left\{h_s \in \mathfrak{H}_{n-2} \mid s = 1, 2, \ldots\right\}$ такая, что $(X_1 - xI_1)h_s \to \bar{0}$ при $s \to \infty$; I_1 — тождественный оператор в $\mathfrak{H}_{n-2}$. Поскольку справедливо равенство (6), то для всех $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} P_k - (1+\varepsilon)I\right)h_s = \bar{0} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n-2} P_k^{(1)} - (1+\varepsilon-x)I_1\right)h_s + (X_1 - xI_1)h_s = \bar{0}.$$

Поэтому $(1+\varepsilon-x) \in \sigma\left(\sum_{k=1}^{n-2} P_k\right)$, и так как $1+\varepsilon-x \le \varepsilon$, то $\sum_{k=1}^{n-2} P_k \ngtr \varepsilon P_{\mathfrak{H}_{n-2}}$, что противоречит (7). Итак, спектр самосопряженного оператора X_1 состоит из не более чем двух точек, и мы можем записать действие оператора X_1 в пространстве $\mathfrak{H}_{n-2}$ в виде $X_1 = (1-\varepsilon)P_{n-1}^{(1)}$, где $P_{n-1}^{(1)}$ — ненулевой проектор в $\mathfrak{H}_{n-2}$.

Ограничимся действием проекторов $P_1^{(1)}, \ldots, P_{n-1}^{(1)}$ и поставим новую задачу: существуют ли $n-1$ проекторы, для которых верно равенство

$$P_1^{(1)} + \ldots + P_{n-2}^{(1)} + (1-\varepsilon)P_{n-1}^{(1)} = (1-\varepsilon)I_1.$$

Непосредственно проверяется, что можно разложить $\mathfrak{H}_{n-2}$ в прямую сумму пространств $\mathfrak{H}_{n-3}$ и его ортогонального дополнения. Проводя рассуждения и построения, аналогичные приведенным выше, получим оператор $X_2 : \mathfrak{H}_{n-3} \to \mathfrak{H}_{n-3}$ с дискретным спектром (подмножество множества $\{0, 1-2\varepsilon\}$). Записывая X_2 в виде $X_2 = (1-2\varepsilon)P_{n-2}^{(2)}$, приходим к задаче существования $n-2$ проекторов, удовлетворяющих уравнению

$$P_1^{(2)} + \ldots + P_{n-3}^{(2)} + P_{n-2}^{(2)}(1-2\varepsilon) = (1+\varepsilon)I_2.$$

Продолжив этот процесс, получим следующую задачу: существуют ли два проектора $P_1^{(n-2)}$ и $P_2^{(n-2)}$, для которых выполнено равенство

$$P_1^{(n-2)} + (1-(n-2)\varepsilon)P_2^{(n-2)} = (1+\varepsilon)I_{n-2}.$$

Поскольку $1-(n-2)\varepsilon < \varepsilon$, то равенство справедливо лишь при условии $P_1^{(n-2)} = P_2^{(n-2)} = I_{n-2} = 0$. А это противоречит предположению, что $P_1 \neq 0$. Поэтому не существует n проекторов, которые в сумме дают $(1+\varepsilon)I$.

6. О множестве $\Sigma_n \cap \left(1+(n-2)^{-1}, 1+(n-3)^{-1}\right)$.

Теорема 1. *Для всех* $n \ge 4$ *множество* $\Sigma_n \supset \left\{1 + k(k(n-3)+2)^{-1} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$.

Доказательство. Если $k = 1, 2$, то утверждение теоремы является следствием примера 1. Случай $n = 4$ см. в п. 2. Пусть $n \ge 5$, $k > 2$ и $\varepsilon = k(k(n-3)+2)^{-1}$. Обозначим $\delta = 2(k(n-3)+2)^{-1}$.

В зависимости от четности k приведем две конструкции проекторов $P_1, \ldots, P_n$, которые в сумме равны $(1+\varepsilon)I$.

Случай $k = 2m$. Для чисел ε,

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 1-\varepsilon+(i-1)\delta, & i \ge 2, \end{cases} \qquad k_i = \begin{cases} n-3, & i = 1, \\ n-4, & i \ge 2, \end{cases}$$

согласно лемме 3 существуют k_i проекторов $Q_1^{(i)}, \ldots, Q_{k_i}^{(i)} \in M_{k_i+1}(\mathbb{C})$ и унитарная матрица U_i такие, что

$$U_i^* \left(\sum_{j=1}^{k_i} Q_j^{(i)} + \operatorname{diag}\{x_i, 0, \ldots, 0\}\right) U_i = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon, i\delta\}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Определим проекторы $Q_i^{(j)}$, $i = n-3, \dots, m$. Проектор $Q_{n-3}^{(1)}$ был задан выше, $Q_{n-2}^{(1)} = \operatorname{diag}\{1, 0_{n-3}\}$,

$$Q_{n-3}^{(j)} = \begin{pmatrix} \tau_j & \sqrt{\tau_j - \tau_j^2} \\ \sqrt{\tau_j - \tau_j^2} & 1-\tau_j \end{pmatrix}, \quad Q_{n-2}^{(j)} = \begin{pmatrix} \tau_j & -\sqrt{\tau_j - \tau_j^2} \\ -\sqrt{\tau_j - \tau_j^2} & 1-\tau_j \end{pmatrix},$$

где $\tau_j = (1+\varepsilon - 2(j-1)\delta)/2$, $j = 2, \dots, [(m+1)/2]$,

$$Q_{n-1}^{(j)} = \begin{pmatrix} \theta_j & \sqrt{\theta_j - \theta_j^2} \\ \sqrt{\theta_j - \theta_j^2} & 1-\theta_j \end{pmatrix}, \quad Q_{n}^{(j)} = \begin{pmatrix} \theta_j & -\sqrt{\theta_j - \theta_j^2} \\ -\sqrt{\theta_j - \theta_j^2} & 1-\theta_j \end{pmatrix},$$

где $\theta_j = (1+\varepsilon-(2j-1)\delta)/2$, $j = 1, \dots, [m/2]$. С помощью построенных матриц задаем операторы P_i:

$$P_i = \operatorname{diag}\{U_1^*, \dots, U_m^*\} \operatorname{diag}\{Q_i^{(1)}, \dots, Q_i^{(m)}\} \operatorname{diag}\{U_1, \dots, U_m\}, \quad i = 1, \dots, n-4.$$

Поскольку операторы $P_{n-3}, \dots, P_n$ в зависимости от четности m имеют различный вид, то рассмотрим оба случая.

1. Если $m = 2s$, то

$$P_{n-3} = \operatorname{diag}\{U_1^*, I_{n-3}, U_3^*, \dots, I_{n-3}, U_{2s-1}, I_{n-3}\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{Q_{n-3}^{(1)}, 0_{n-4}, Q_{n-3}^{(2)}, 0_{2n-8}, \dots, 0_{2n-8}, Q_{n-3}^{(s)}, 0_{2n-8}, 1\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{U_1, I_{n-3}, U_3, \dots, I_{n-3}, U_{2s-1}, I_{n-3}\},$$
$$P_{n-2} = \operatorname{diag}\{U_1^*, I_{n-3}, U_3^*, \dots, I_{n-3}, U_{2s-1}, I_{n-3}\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{Q_{n-2}^{(1)}, 0_{n-4}, Q_{n-2}^{(2)}, 0_{2n-8}, \dots, 0_{2n-8}, Q_{n-2}^{(s-1)}, 0_{2n-8}, 0\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{U_1, I_{n-3}, U_3, \dots, I_{n-3}, U_{2s-1}, I_{n-3}\},$$
$$P_{n-1} = \operatorname{diag}\{I_{n-2}, U_2^*, I_{n-3}, \dots, I_{n-3}, U_{2s}^*\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{0_{n-3}, Q_{n-1}^{(1)}, 0_{2n-8}, \dots, 0_{2n-8}, Q_{n-1}^{(s)}, 0_{n-4}\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{I_{n-2}, U_2, I_{n-3}, \dots, I_{n-3}, U_{2s}\},$$
$$P_n = \operatorname{diag}\{I_{n-2}, U_2^*, I_{n-3}, \dots, I_{n-3}, U_{2s}^*\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{0_{n-3}, Q_n^{(1)}, 0_{2n-8}, \dots, 0_{2n-8}, Q_n^{(s)}, 0_{n-4}\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{I_{n-2}, U_2, I_{n-3}, \dots, I_{n-3}, U_{2s}\}.$$

2. Если $m = 2s+1$, то

$$P_{n-3} = \operatorname{diag}\{U_1^*, I_{n-3}, U_3^*, \dots, I_{n-3}, U_{2s+1}^*\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{Q_{n-3}^{(1)}, 0_{n-4}, Q_{n-3}^{(2)}, 0_{2n-8}, \dots, 0_{2n-8}, Q_{n-3}^{(s+1)}, 0_{n-4}\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{U_1, I_{n-3}, U_3, \dots, I_{n-3}, U_{2s+1}\},$$

$$P_{n-2} = \operatorname{diag}\left\{U_1^*, I_{n-3}, U_3^*, \ldots, I_{n-3}, U_m^*\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{Q_{n-2}^{(1)}, 0_{n-4}, Q_{n-2}^{(2)}, 0_{2n-8}, \ldots, 0_{2n-8}, Q_{n-2}^{(s+1)}, 0_{n-4}\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{U_1, I_{n-3}, U_3, \ldots, I_{n-3}, U_{2s+1}\right\},$$
$$P_{n-1} = \operatorname{diag}\left\{I_{n-2}, U_2^*, I_{n-3}, \ldots, I_{n-3}, U_{2s}^*, I_{n-3}\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{0_{n-3}, Q_{n-1}^{(1)}, 0_{2n-8}, \ldots, 0_{2n-8}, Q_{n-1}^{(s)}, 0_{2n-8}, 0\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{I_{n-2}, U_2, I_{n-3}, \ldots, I_{n-3}, U_{2s}, I_{n-3}\right\},$$
$$P_n = \operatorname{diag}\left\{I_{n-2}, U_2^*, I_{n-3}, \ldots, I_{n-3}, U_{2s}, I_{n-3}^*\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{0_{n-3}, Q_n^{(1)}, 0_{2n-8}, \ldots, 0_{2n-8}, Q_n^{(s)}, 0_{2n-8}, 1\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{I_{n-2}, U_2, I_{n-3}, \ldots, I_{n-3}, U_{2s}, I_{n-3}\right\}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = (1+\varepsilon) I_{m(n-3)+1}.$$

Замечание 2. Как видно из построения, у операторов P_{n-2} и P_{n-1} последний элемент на диагонали равен нулю, а у P_{n-3} и P_n — это либо 0, либо 1. Если рассмотреть проектор P'_{n-3}, совпадающий с P_{n-3} во всех строчках, кроме, возможно, последней, где у него стоят нули, и проектор P'_n, построенный также по P_n, то

$$\sum_{i=1}^{n-4} P_i + P'_{n-3} + P_{n-2} + P_{n-1} + P'_n = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon, \varepsilon\}.$$

Более того, можно доказать, что конструкции проекторов $P_1, \ldots, P_{n-4}$, $P'_{n-3}, P_{n-2}, P_{n-1}, P'_n$ можно построить так же, как в случае $k = 2m$ и для числа ε, близкого к $k(k(n-3)+2)^{-1}$, например для ε_1, $(k-2)((k-2)(n-3)+2)^{-1} \le$ $\le \varepsilon_1 \le (k+2)((k+2)(n-3)+2)^{-1}$; однако при этом

$$\sum_{i=1}^{n-4} P_i + P'_{n-3} + P_{n-2} + P_{n-1} + P'_n = \operatorname{diag}\left\{1+\varepsilon_1, \ldots, 1+\varepsilon_1, \left[\frac{k}{2}\right]\delta_1\right\},$$

где $\delta_1 = 1-(n-3)\varepsilon_1$, и для проектора $P = \operatorname{diag}\{0, \ldots, 0, 1\}$ справедливы условия ортогональности

$$PP_{n-1} = 0, \qquad PP'_n = 0.$$

Случай $k = 2m+1$. Используя предыдущий (четный) случай и замечание после него, имеем $2m(2m(n-3)+2)^{-1} < \varepsilon < (2m+2)((2m+2)(n-3)+2)^{-1}$. Согласно замечанию 2 существуют n проекторов $Q_1^{(1)}, \ldots, Q_n^{(1)} \in M_{m(n-3)+1}(\mathbb{C})$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^{(1)} = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon, m\delta\},$$

а также n проекторов $Q_1^{(2)}, \ldots, Q_n^{(2)} \in M_{(m+1)(n-3)+1}(\mathbb{C})$ со свойством

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^{(2)} = \operatorname{diag}\{(m+1)\delta, 1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon\}.$$

Для операторов $Q^{(1)} = \operatorname{diag}\{0, \ldots, 0, 1\}$ и $Q^{(2)} = \operatorname{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}$ выполнено условие ортогональности

$$Q^{(1)} Q_{n-1}^{(1)} = Q^{(1)} Q_n^{(1)} = 0, \qquad Q^{(2)} Q_{n-1}^{(2)} = Q^{(2)} Q_n^{(2)} = 0.$$

Обозначим

$$Q_{n-1} = \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau-\tau^2} \\ \sqrt{\tau-\tau^2} & 1-\tau \end{pmatrix}, \quad Q_n = \begin{pmatrix} \tau & -\sqrt{\tau-\tau^2} \\ -\sqrt{\tau-\tau^2} & 1-\tau \end{pmatrix},$$

$$\tau = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right).$$

Тогда

$$P_i = \operatorname{diag}\left\{Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}\right\}, \qquad i = 1, \ldots, n-2,$$

$$P_{n-1} = \operatorname{diag}\left\{Q_{n-1}^{(1)}, Q_{n-1}^{(2)}\right\} + \operatorname{diag}\left\{0_{m(m-3)}, Q_{n-1}, 0_{(m+1)(n-3)}\right\},$$

$$P_n = \operatorname{diag}\left\{Q_n^{(1)}, Q_n^{(2)}\right\} + \operatorname{diag}\left\{0_{m(n-3)}, Q_n, 0_{(m+1)(n-3)}\right\}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = (1+\varepsilon) I_{(2m+1)(n-3)+2}.$$

7. Для всех $n \geq 6$ множество Σ_n содержит отрезок $\left[1+(n-3)^{-1}; 1{,}5\right]$.

Лемма 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$ такие, что $(n-3)^{-1} < \varepsilon < (n-4)^{-1}$. Тогда существуют проекторы $P_1, \ldots, P_n$, являющиеся решениями уравнения $\sum_{i=1}^{n} P_i = (1+\varepsilon) I$.*

Доказательство. Конструкция проекторов, которую мы приведем здесь, обобщает конструкцию, приведенную в теореме 1.

Сначала построим последовательность чисел $x_i \in \mathbb{R}$ и $k_i \in \mathbb{N}$. Пусть $x_1 = 1$, $k_1 = n-4$, $x_{i+1} = 1 - \varepsilon + (x_i - k_i \varepsilon)$ и k_{i+1} такое, что выполнены неравенства

$$0 < x_{i+1} - k_{i+1}\varepsilon \leq \varepsilon. \tag{8}$$

Поскольку согласно определению $1-\varepsilon < x_i \leq 1$ и $(n-3)^{-1} < \varepsilon$, то из неравенства (8) следует, что для любого $i \in \mathbb{N}$ число $k_i \leq n-4$.

Применим лемму 3 к числам ε, x_i, k_i, $i = 1, 2, \ldots$. Существуют k_i проекторов $Q_1^{(i)}, \ldots, Q_{k_i}^{(i)} \in M_{k_i+1}(\mathbb{C})$ и унитарная матрица U_i такие, что выполнено равенство

$$U_i^* \left(\sum_{j=1}^{k_i} Q_j^{(i)} + \operatorname{diag}\{x_i, 0, \ldots, 0\} \right) U = \operatorname{diag}\{1+\varepsilon, \ldots, 1+\varepsilon, x_i - k_i\varepsilon\}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Если $k_i < n-4$, то положим $Q_j^{(i)} = 0_{k_i+1}$, $k_i < j \leq n-4$. Как и в теореме 1, зададим проекторы $Q_{n-3}^{(j)}, \ldots, Q_n^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, j \in \mathbb{N}$: $Q_{n-3}^{(1)} = \operatorname{diag}\{1, 0_{n-4}\}$, $Q_{n-2}^{(1)} = 0_{n-3}$,

$$Q_{n-3}^{(j)} = \begin{pmatrix} \tau_j & \sqrt{\tau_j - \tau_j^2} \\ \sqrt{\tau_j - \tau_j^2} & 1-\tau_j \end{pmatrix}, \quad Q_{n-2}^{(j)} = \begin{pmatrix} \tau_j & -\sqrt{\tau_j - \tau_j^2} \\ -\sqrt{\tau_j - \tau_j^2} & 1-\tau_j \end{pmatrix},$$

где $\tau_j = \left(1+\varepsilon - \left(x_{2j-2} - k_{2j-2}\varepsilon\right)\right)/2$, $j = 2, 3, \ldots$, и

$$Q_{n-1}^{(j)} = \begin{pmatrix} \theta_j & \sqrt{\theta_j - \theta_j^2} \\ \sqrt{\theta_j - \theta_j^2} & 1-\theta_j \end{pmatrix}, \quad Q_n^{(j)} = \begin{pmatrix} \theta_j & -\sqrt{\theta_j - \theta_j^2} \\ -\sqrt{\theta_j - \theta_j^2} & 1-\theta_j \end{pmatrix},$$

где $\theta_j = \left(1+\varepsilon - \left(x_{2j-1} - k_{2j-1}\varepsilon\right)\right)/2$, $j = 1, 2, \ldots$.

По таким образом построенным матрицам задаем проекторы $P_i \in L(H)$, сумма которых есть скалярный оператор:

$$P_i = \operatorname{diag}\left\{U_1^*, U_2^*, \ldots, U_m^*, \ldots\right\} \operatorname{diag}\left\{Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}, \ldots, Q_i^{(m)}, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\{U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-4,$$

$$P_{n-3} = \operatorname{diag}\left\{U_1^*, I_{k_2+1}, U_3^*, \ldots, I_{k_{2m}+1}, U_{2m+1}^*, I_{k_{2m+2}+1}, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{Q_{n-3}^{(1)}, 0_{k_2}, Q_{n-3}^{(2)}, 0_{k_3+k_4}, Q_{n-3}^{(3)}, \ldots, 0_{k_{2m-1}+k_{2m}}, Q_{n-3}^{(m+1)}, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{U_1, I_{k_2+1}, U_3, \ldots, I_{k_{2m}+1}, U_{2m+1}, I_{k_{2m+2}+1}, \ldots\right\},$$

$$P_{n-2} = \operatorname{diag}\left\{U_1^*, I_{k_2+1}, U_3^*, \ldots, I_{k_{2m}+1}, U_{2m+1}^*, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{Q_{n-2}^{(1)}, 0_{k_2}, Q_{n-2}^{(2)}, 0_{k_3+k_4}, Q_{n-2}^{(3)}, \ldots, 0_{k_{2m-1}+k_{2m}}, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{U_1, I_{k_2+1}, U_3, \ldots, I_{k_{2m}+1}, U_{2m+1}, \ldots\right\},$$

$$P_{n-1} = \operatorname{diag}\left\{I_{k_1+1}, U_2^*, \ldots, I_{k_{2m+1}+1}, U_{2m+2}^*, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{0_{k_1}, Q_{n-1}^{(1)}, 0_{k_2+k_3}, Q_{n-1}^{(2)}, \ldots, 0_{k_{2m}+k_{2m}+1}, Q_{n-1}^{(m+1)}, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{I_{k_1+1}, U_2, \ldots, I_{k_{2m+1}+1}, U_{2m+2}, \ldots\right\},$$

$$P_n = \operatorname{diag}\left\{I_{k_1+1}, U_2^*, \ldots, I_{k_{2m+1}+1}, U_{2m+2}^*, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{0_{k_1}, Q_n^{(1)}, 0_{k_2+k_3}, Q_n^{(2)}, \ldots, 0_{k_{2m}+k_{2m}+1}, Q_n^{(m+1)}, \ldots\right\} \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{I_{k_1+1}, U_2, \ldots, I_{k_{2m+1}+1}, U_{2m+2}, \ldots\right\}.$$

Заметим, что

$$Q_{n-3}^{(j)} + Q_{n-2}^{(j)} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon - \left(x_{2j-2} - k_{2j-2}\varepsilon\right) & 0 \\ 0 & x_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \ldots,$$

$$Q_{n-1}^{(j)} + Q_n^{(j)} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon - \left(x_{2j-1} - k_{2j-1}\varepsilon\right) & 0 \\ 0 & x_{2j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому в силу так выбранных $Q_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n-4$, и равенства (9) сумма $P_1 + \ldots + P_n$ равна $(1+\varepsilon)I$.

***Следствие* 3.** *Для всех* $n \geq 6$ $\Sigma_n \supset \left[1+(n-3)^{-1}; 1{,}5\right]$.

8. Для всех $n \geq 6$ множество Σ_n содержит отрезок $[1{,}5; 2]$.

Лемма 7. *Для всех* $n \geq 6$ $\Sigma_n \supset [1{,}5; 2]$.

Доказательство леммы основано на следующем утверждении.

Утверждение 1. *Пусть* $\alpha \in (1{,}5; 2)$ *и* $y \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\alpha - 1 \leq y \leq 2(\alpha - 1)$. *Тогда существуют четыре проектора, которые в сумме равны:*

1) *матрице* $\operatorname{diag}\{y, 2-y\}$, *если* $3-\alpha < y \leq 2(\alpha-1)$;
2) *матрице* $\operatorname{diag}\{y, \alpha, 3-\alpha-y\}$, *если* $4-2\alpha < y \leq 3-\alpha$;
3) *матрице* $\operatorname{diag}\{y, \alpha, \alpha, 4-2\alpha-y\}$, *если* $5-3\alpha \leq y \leq 4-2\alpha$.

Доказательство. Положим

$$\tau_1 = \frac{1}{2}y, \quad \tau_2 = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2+y)}{2-y}, \quad \tau_3 = \frac{(\alpha-1)(2\alpha-3+y)}{3-\alpha-y}, \quad \text{если} \quad \tau_2 \neq 1,$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} \tau_i & \sqrt{\tau_i - \tau_i^2} \\ \sqrt{\tau_i - \tau_i^2} & 1-\tau_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} \tau_i & -\sqrt{\tau_i - \tau_i^2} \\ -\sqrt{\tau_i - \tau_i^2} & 1-\tau_i \end{pmatrix}.$$

1. При выполнении неравенства $3-\alpha < y \leq 2(\alpha-1)$ операторы Q_1 и Q_4 являются проекторами и $Q_1 + Q_4 = \operatorname{diag}\{y, 2-y\}$.

2. При $4-2\alpha < y \leq 3-\alpha$ матрицы $P_1 = \operatorname{diag}\{Q_1, 0\}$, $P_2 = \operatorname{diag}\{Q_4, 0\}$ и $P_3 = \operatorname{diag}\{0, Q_2\}$ — проекторы и существует унитарный оператор U такой, что

$$U^*(P_1 + P_2 + P_3)U = \operatorname{diag}\{y, \alpha, 3-\alpha-y\}.$$

3. При $5-3\alpha \leq y \leq 4-2\alpha$ матрицы $P_1 = \operatorname{diag}\{Q_1, 0, 0\}$, $P_2 = \operatorname{diag}\{Q_4, 0, 0\}$, $P_3 = \operatorname{diag}\{0, Q_2, 0\}$, $P_4 = \operatorname{diag}\{0, 0, Q_3\}$ — проекторы и для некоторого унитарного оператора U верно равенство

$$U^*\left(\sum_{i=4}^{4} P_i\right)U = \operatorname{diag}\{y, \alpha, \alpha, 4-2\alpha-y\}.$$

Заметим, что справедлива эквивалентность неравенств $5-3\alpha \leq \alpha-1 \Leftrightarrow 6 \leq 4\alpha$, а последнее верно при $\alpha \geq 1{,}5$. Поэтому один из пунктов 1 – 3 выполнен, что доказывает утверждение 1.

***Доказательство леммы* 7.** Пусть $\alpha \in (1{,}5; 2)$. Построим индуктивно две последовательности действительных чисел, связанных между собой соотношением, зависящим от α:

$$x_1 = 0, \quad y_i = 2(\alpha-1) - x_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$x_{j+1} = \begin{cases} 2-y, & 3-\alpha < y_j; \\ 3-\alpha-y, & 4-2\alpha < y_j \leq 3-\alpha; \quad j = 1, 2, \ldots. \\ 4-2\alpha-y, & 5-3\alpha \leq y_j \leq 4-2\alpha, \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $0 \le x_j \le \alpha - 1$, $j \in \mathbb{N}$, откуда $\alpha - 1 \le y_j \le$ $\le 2(\alpha - 3)$.

Как следует из утверждения 1, для каждой пары чисел α и y_i существуют четыре проектора $Q_1^{(i)}, \ldots, Q_4^{(i)}$ таких, что $Q_1^{(i)} + \ldots + Q_4^{(i)} = \operatorname{diag}\{y_i, \alpha, \ldots \alpha, x_{i+1}\}$, где количество k_i чисел α на диагонали зависит от числа y_i и может принимать значения $n_i = 0, 1, 2$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть

$$P_j = \operatorname{diag}\left\{0, Q_j^{(1)}, Q_j^{(2)}, \ldots\right\}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{4} P_j = \operatorname{diag}\{0, y_1, \alpha, \ldots, \alpha, x_2, y_2, \alpha, \ldots, \alpha, x_3, y_3, \ldots\}.$$

Положив

$$P_m = \operatorname{diag}\left\{Q_m^{(1)}, 0_{k_1}, Q_m^{(2)}, 0_{k_2}, \ldots\right\}, \quad m = 5, 6,$$

где

$$Q_5^{(j)} = \begin{pmatrix} \tau_j & \sqrt{\tau_j - \tau_j^2} \\ \sqrt{\tau_j - \tau_j^2} & 1 - \tau_j \end{pmatrix}, \quad Q_6^{(j)} = \begin{pmatrix} \tau_j & -\sqrt{\tau_j - \tau_j^2} \\ -\sqrt{\tau_j - \tau_j^2} & 1 - \tau_j \end{pmatrix},$$

$$\tau_j = \frac{1}{2}\left(\alpha - x_j\right),$$

получим $\sum_{i=1}^{6} P_i = \alpha I$.

9. Для всех $n \ge 6$ множество Σ_n содержит отрезок $[2, n-2]$.

Лемма 8. *Для каждого* $n \ge 6$ $\Sigma_n \supset [2, n-2]$.

Доказательство. Достаточно показать включение $\Sigma_6 \supset [2, 6-2] = [2, 4]$. Если $\alpha \in \Sigma_{n-1}$, то $(\alpha + 1) \in \Sigma_n$.

Итак, пусть $n = 6$, $\alpha \in (2, 4)$, $\beta = \sqrt{-\alpha^2/4 + 3/2\alpha - 2}$. Тогда для операторов

$$P_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) I & 0 & \beta S_1^* \\ 0 & \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) I & \beta S_2^* \\ \beta S_1 & \beta S_2 & \left(2 - \frac{\alpha}{2}\right) I \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) I & 0 & -\beta S_1^* \\ 0 & \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) I & -\beta S_2^* \\ -\beta S_1 & -\beta S_2 & \left(2 - \frac{\alpha}{2}\right) I \end{pmatrix},$$

где S_1 и S_2 — операторы в l_2, заданные согласно формулам

$$S_1(x_0, x_1, \ldots) = (x_0, 0, x_1, 0, x_2, \ldots), \qquad S_2(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, 0, x_1, 0, \ldots),$$

выполняются условия $P_1^2 = P_1 = P_1^*$, $P_2^2 = P_2 = P_2^*$ и

$$P_1 + P_2 = \operatorname{diag}\{(\alpha - 2)I, (\alpha - 2)I, (4 - \alpha)I\}.$$

По аналогии, в силу симметрии существуют проекторы P_3, P_4, P_5, P_6, для которых

$$P_3 + P_4 = \operatorname{diag}\{(\alpha-2), (4-\alpha)I, (\alpha-2)I\},$$
$$P_5 + P_6 = \operatorname{diag}\{(4-\alpha)I, (\alpha-2)I, (\alpha-2)I\}.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{6} P_i = \alpha \operatorname{diag}\{I, I, I\}$, то $\Sigma_6 \supset [2, 4]$.

***Следствие* 4.** $\Sigma_\infty = \{0, [1, \infty)\}$.

10. Основная теорема. На основании лемм 3 – 8 можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Если* $n \geq 6$, *то*

$$\left\{0, 1, 1+\frac{1}{n-1}, \left[1+\frac{1}{n-2}, n-1-\frac{1}{n-2}\right], n-1-\frac{1}{n-1}, n-1, n\right\} \supset \Sigma_n \supset$$
$$\supset \left\{0, 1, 1+\frac{k}{k(n-3)+2}, k \in \mathbb{N},\right.$$
$$\left.\left[1+\frac{1}{n-3}, n-1-\frac{1}{n-3}\right], n-1-\frac{k}{k(n-3)+2}, k \in \mathbb{N}, n-1, n\right\}.$$

1. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Кольца с инволюцией и их представления // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1948. – **12**. – С. 445 – 480.
2. *Krupnik N.* Banach algebras with symbol and singular integral operators // Operator Theory: Adv. and Appl. – 1987. – **90**.
3. *Böttcher A., Gohberg I., Karlovich Yu., Krupnik N., Roch S., Silbermann B., Spitkovsky I.* Banach algebras generated by N idempotents and applications // Ibid. – 1996. – **90**. – P. 19–54.
4. *Ostrovskii V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory reprsentation of finitely presented *-algebras. 1. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**. – P. 1 – 261.
5. *Jones V.* Index for subfactors // Invent. Math. – 1983. – **72**. – P. 1 – 25.
6. *Wu P. Y.* Additive combination of special operators // Funct. Anal. and Oper. Theory. – 1994. – **30**. – P. 337 – 361.
7. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функцион. анализ и прил. – 2000. – **34**, № 4. – С. 91 – 93.
8. *Nishio K.* The structure of a real linear combinations of two projections // Linear Algebra Appl. – 1985. – **66**. – P. 169 – 176.
9. *Беспалов Ю. В.* Наборы ортопроекторов, связанных соотношениями // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 309 – 317.
10. *Wano J.-H.* Decomposition of operators into quadratic type. Ph. D. dissertation. – Hsinchu, Taiwan: National Chiag Tung Univ., 1991.
11. *Ehrhardt T.* Sums of four idempotents. – Chemnitz, 1995. – 10 p. – (Preprint / TU Chemnitz).
12. *Galinsky D. V., Muratov M. A.* On representation of algebras generated by sets of three and four orthoprojections // Spectral Evolutionary Problems. – 1998. – **8**. – P. 15 – 22.
13. *Fillmore P. A.* On sums of projections // J. Funct. Anal. – 1969. – **4**. – P. 146 – 152.

Получено 07.08.2000,
после доработки — 12.12.2000