УДК 517.926.25

М. І. Плеша (Львів. ун-т)

НЕПОКРАЩУВАНА ІНТЕГРАЛЬНА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОКОЛІ РЕБРА

We obtain an exact estimate of second derivatives of solutions (in the weight Sobolev norm) of the Dirichlet problem for second order quasilinear elliptic nondivergent equations in a neighborhood of edge of a domain.

Одержано точну оцінку других похідних розв'язків (у ваговій соболєвській нормі) задачі Діріхле для квазілінійних еліптичних недивергентних рівнянь другого порядку в околі ребра області.

1. Вступ. У даній роботі досліджується поведінка розв'язків задачі Діріхле

$$a_{ij}(x, u, u_x)u_{x_ix_j} + a(x, u, u_x) = 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial G, \tag{2}$$

в околі ребра межі області $G \subset \mathbb{R}^n$. Тут і далі вважається, що за індексами, які повторюються, ведеться підсумовування від 1 до n. В. О. Кондратьєв у роботі [1] дослідив питання регулярності узагальненого розв'язку задачі Діріхле для еліптичних *лінійних* рівнянь другого порядку в областях з ребром на межі. Точні оцінки розв'язків в околі конічної точки для задачі (1), (2) одержано в [2]. Ми виведемо апріорні оцінки для других похідних розв'язку (у ваговій соболєвській нормі) в околі ребра області. Відомі приклади у випадку кутової точки (див. [2, 3]) підтверджують, що одержана оцінка є точною.

2. Основні позначення. Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — обмежена область, межа якої $\partial G \supset \Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, де Γ_1, Γ_2 — достатньо гладкі $(n-1)$-вимірні поверхні, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \ell$. Припустимо, що початок координат P знаходиться на ребрі ℓ і поверхні Γ_1 і Γ_2 в деякому околі $U(P)$ точки P є частинами двох гіперплощин, що перетинаються під кутом $\omega_0 \in (0, \pi)$, причому Γ_1 в цьому околі збігається з гіперплощиною $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_2 = 0\}$. Це припущення не є обтяжливим, бо в противному разі можна здійснити відповідне дифеоморфне перетворення околу області G. Введемо наступні позначення: $x = (y, z)$, де $y = (y_1, y_2) := (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}) := (x_3, \ldots, x_n)$; $r = |y| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $G_a^{b,c} = \{x \in G : 0 \leq a < r < b; |x_i| < c, i > 2\}$; $G_a^b := G_a^{b,b}$; (r, ω, z) — циліндричні координати точки x; в цих координатах $G_a^{b,c} \equiv K_a^b \times I^c$, де $K_a^b := \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a < r < b, \omega \in \Omega := (0, \omega_0)\}$ і $I^c := \{z \in \mathbb{R}^{n-2} : |z_i| < c \;\; \forall i = 1, \ldots, n-2\}$; $v_x^2 = \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2$; $v_{xx}^2 = \sum_{i,j=1}^n v_{x_ix_j}^2$; $C^s(\overline{G})$ — банахів простір функцій, які мають неперервні похідні на $\overline{G}$ до порядку $s \geq 0$ включно, якщо s — ціле, і до порядку $[s]$ включно, якщо s — неціле, та похідні порядку $[s]$ задовольняють умову Гельдера з показником $s - [s]$; $|v|_{k,G}$ — норма елемента $v \in C^k(\overline{G})$ для $k \in \mathbb{N}$; $W^{k,p}(G)$ — соболєвський простір функцій, що складається з тих елементів $L_p(G)$, які мають усі узагальнені похідні до порядку k включно, інтегровні по G зі степенем p, $\|v\|_{k,p;G}$ — норма елемента $v \in W^{k,p}(G)$; $W_{\mathrm{loc}}^{k,p}(\overline{G} \setminus \ell)$ — простір функцій, які належать до $W^{k,p}(G')$ для всіх підобластей G' таких, що $\overline{G}' \subset \overline{G} \setminus \ell$; $V_{p,\alpha}^k(G)$ — ваговий соболєвський простір функцій v, для яких скінченна норма

$$\|v\|_{V^k_{p,\alpha}(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^{k} \operatorname{dist}(x,\ell)^{p(|\beta|-k+\alpha/p)} \left| D^\beta v \right|^p dx \right)^{1/p},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ — ціле, $p \geq 1$; $W^k_\alpha(G) := V^k_{2,\alpha}(G)$.

Означення. *Розв'язком задачі* (1), (2) *називається функція* $u \in C^0(\overline{G}) \cap \cap W^{2,q}_{\text{loc}}(\overline{G}\setminus\ell)$, $q \geq n$, *яка задовольняє рівняння* (1) *майже скрізь в* G *та граничну умову* (2).

3. Точна інтегральна оцінка. Позначимо $\mathfrak{M} := \{(x, v, w) : x \in \overline{G}, v \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathfrak{M}^{(u)} := \{(x, v, w) : x \in G, v = u(x), w = u_x(x)\}$. Додатково вимагатимемо виконання таких умов:

A) $a_{ij} \in C^0(\mathfrak{M})$, $i, j = 1, \ldots, n$; функція $a(x, v, w)$, $(x, v, w) \in \mathfrak{M}$, є каратеодорівською, тобто вимірною по $x \in G$ для всіх $(v, w) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і неперервною по (v, w) для майже всіх $x \in G$;

B) $a_{ij}(0, 0, 0) = \delta^j_i$, $i, j = 1, \ldots, n$, де δ^j_i — символ Кронекера;

C) існують числа $\mu > 0$, $\nu > 0$ такі, що виконується нерівність

$$\nu\xi^2 \leq a_{ij}(x, v, w)\xi_i\xi_j \leq \mu\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, v, w) \in \mathfrak{M}$$

(умова рівномірної еліптичності);

D) існують числа $\beta > -1$, $\mu_1 \geq 0$, $k_1 \geq 0$ та функції $b, f \in L_{q,\text{loc}}(\overline{G}\setminus\ell)$ такі, що

$$|a(x, v, w)| \leq \mu_1 |w|^2 + b(x)|w| + f(x), \quad (x, v, w) \in \mathfrak{M}, \tag{3}$$

причому $b \geq 0$, $f \geq 0$ і $b(x) + f(x) \leq k_1 r^\beta$;

E) функції $a_{ij}(x, v, w)$, $i, j = 1, \ldots, n$, в околі множини $\mathfrak{M}^{(u)}$ мають узагальнені похідні першого порядку за всіма своїми аргументами і існують невід'ємні сталі μ_0, μ_2 і функція $g \in L_{q,\text{loc}}(\overline{G}\setminus\ell)$, $q \geq n$, такі, що

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial a_{ij}(x,v,w)}{\partial w_k} - \frac{\partial a_{ik}(x,v,w)}{\partial w_j} \right| \leq \mu_0 (1 + |w|^2)^{-1/2},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{ij}(x,v,w)}{\partial v} w_k^2 - \frac{\partial a_{kj}(x,v,w)}{\partial v} w_k w_i + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial a_{ij}(x,v,w)}{\partial x_k} w_k - \frac{\partial a_{kj}(x,v,w)}{\partial x_k} w_i \right) \right| \leq (1 + |w|^2)^{1/2} (\mu_2 |w| + g(x));$$

F) існують невід'ємні число μ_3 і функція $h \in L_p(G)$, $q \geq n$, такі, що

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\left| \frac{\partial a_{ij}(x,v,w)}{\partial v} \right|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial a_{ij}(x,v,w)}{\partial x_k} \right|^2 \right) \right)^{1/2} \leq h(x),$$

$$\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial a_{ij}(x,v,w)}{\partial w_k} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \mu_3.$$

Не зменшуючи загальності, вважаємо надалі, що $|u|_{0,G} < M_0$ і величина M_0 —

Крім того, з (6) та властивостей $\zeta(z)$ очевидним чином випливає

$$V(\rho) \leq \iint\limits_{G_0^{2\rho,2d}} u_x^2\,dx \leq C_1\rho^{2\gamma+2}. \tag{9}$$

Помножимо обидві частини рівняння (1) на $u(x)\zeta^2(z)$ і проінтегруємо по області $G_0^{\rho,2d}$:

$$V(\rho) = \int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{I^{2d}} \rho u \frac{\partial u}{\partial r}\zeta^2\bigg|_{r=\rho} dz - \iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u_z u 2\zeta\zeta'\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} \big((a_{ij}(x,u,u_x) - a_{ij}(0,0,0))u_{x_i x_j} + a(x,u,u_x)\big)u(x)\zeta^2\,dx. \tag{10}$$

Оцінимо зверху кожен інтеграл справа. Перший інтеграл оцінюється за нерівністю, що одержана інтегруванням по z нерівності (42) [2]:

$$\int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{I^{2d}} \rho u \frac{\partial u}{\partial r}\zeta^2\bigg|_{r=\rho} dz \leq \frac{\rho}{2\lambda}V'(\rho). \tag{11}$$

Далі, використовуючи нерівність Гельдера, нерівності (4), (9) та властивості зрізки, одержуємо

$$\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} |u_z u\zeta\zeta'|\,dx \leq \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u^2\zeta'^2\,dx\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u_x^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \leq C_2\rho^{\gamma+2}\sqrt{V(\rho)}. \tag{12}$$

Аналогічно, внаслідок нерівностей (3) – (5), (9), враховуючи умови на $b(x)$, $f(x)$, маємо

$$\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} \left|ua(x,u,u_x)\zeta^2\right| dx \leq \iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} \left(\mu_1|u|u_x^2\zeta^2 + b(x)|u||u_x|\zeta^2 + f(x)|u|\zeta^2\right)dx \leq$$

$$\leq \mu_1 C_3\rho^{\gamma+1}V(\rho) + \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u^2 b^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u_x^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} f^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \leq \mu_1 C_3\rho^{\gamma+1}V(\rho) +$$

$$+ \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} k_1^2 r^{2\beta} u^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \sqrt{V(\rho)} + \left(\int\limits_0^{\rho} k_1^2 r^{2\beta} r\,dr \int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{I^{2d}} dz\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \mu_1 C_3\rho^{\gamma+1}V(\rho) + \left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} k_1^2 r^{2\beta} u^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \sqrt{V(\rho)} + C_4\rho^{\beta+1}\left(\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Використовуючи нерівність (4), а також те, що в розглядуваній області $r < \rho$, одержуємо

$$\iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} \left|ua(x,u,u_x)\zeta^2\right| dx \leq C_5\left((\rho^{\gamma+1} + \rho^{\beta+1})V(\rho) + \rho^{\beta+2}\sqrt{V(\rho)}\right). \tag{13}$$

Далі маємо $a_{ij}(x, v, w) - a_{ij}(0, 0, 0) = (a_{ij}(0, 0, w) - a_{ij}(0, 0, 0)) + (a_{ij}(x, v, w) -$

відома (див. [4]). Поруч із загальновідомими нерівностями Коші та Гельдера ми використовуємо нерівність

$$\iint\limits_{G_0^{a,b}} r^{\alpha-2}v^2(x)\,dx \le C \iint\limits_{G_0^{a,b}} r^{\alpha}v_x^2(x)\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad a\ge 0, \quad b\ge 0, \tag{4}$$

що справедлива для всіх $v(x)$ таких, що $v(x)=0$ при $x\in\Gamma$, і при умові, що інтеграл справа скінченний (нерівність (4) в лемі 1 [1]). Тут C — додатна константа, що залежить від ω_0. В [5] (теорема 1) методом бар'єрної функції доведено, що якщо коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови A) – D), то для розв'язку задачі (1), (2) має місце оцінка

$$|u(x)| \le Cr^{1+\gamma}, \quad x\in G_0^d, \tag{5}$$

де C, d, γ — додатні числа ($\gamma\in(0,1)$), які визначаються величинами n, ω_0, ν, μ, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, β, q, k_1, M_0 і областю G. Якщо крім умов A) – D) вимагати ще виконання умов E) – F), які разом з умовами A) – D) забезпечують (див. [4]) скінченність градієнта розв'язку для довільної гладкої підобласті G' такої, що $\overline{G}'\subset\overline{G}\setminus\ell$, то справедлива оцінка для градієнта розв'язку (теорема 1 [5])

$$|\nabla u(x)| \le Cr^{\gamma}, \quad x\in G_0^d. \tag{6}$$

Крім того, нам знадобиться інтегральна оцінка (теорема 2 [5])

$$\|u\|_{W_\alpha^2(G_0^d)} \le C\left(\|u\|_{1,2;G_0^{2d}} + \|b\|_{W_\alpha^0(G_0^{2d})} + \|f\|_{W_\alpha^0(G_0^{2d})}\right), \tag{7}$$

де α — довільне число з проміжку $0\le\alpha\le 2$, а C і d — додатні константи того ж типу, що і в (5), (6). Доведемо наступну теорему.

Теорема. *Нехай u — розв'язок задачі* (1), (2) *і виконані умови* A) – F), *причому в умові* F) *функція $h(x)$ така, що $\|h(x)\|_{q,G_0^{\rho,2d}} := \delta(\rho)$ — неперервна за Діні функція, $\rho\in(0,2d)$ (тут d — число з оцінок (4) – (6)). Тоді існують такі сталі C і d_0, що*

$$\|u\|_{W_\alpha^2(G_0^{\rho,d_0})} \le C\cdot\begin{cases}\rho^{\lambda}, & \text{якщо } \lambda<\beta+2;\\ \rho^{\lambda}\ln\left(\dfrac{d_0}{\rho}\right), & \text{якщо } \lambda=\beta+2;\\ \rho^{\beta+2}, & \text{якщо } \lambda>\beta+2,\end{cases}$$

де $\rho\in(0,d_0)$, $\lambda:=\dfrac{\pi}{\omega_0}$, а C і d_0 визначаються величинами n, ω_0, ν, μ, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, β, q, k_1, M_0 і областю G.

Доведення. Зафіксуємо число d, при якому справедливі оцінки (5) – (7). Нехай $\rho\in(0,d)$. Позначимо

$$V(\rho) = \iint\limits_{G_0^{\rho,2d}} u_x^2\xi^2(z)\,dx, \quad \text{де} \quad \zeta(z) = \begin{cases}1 & \text{при } z\in I^d;\\ 0\le\zeta(z)\le 1 & \text{при } z\in I^{2d}\setminus I^d;\\ 0 & \text{при } z'\notin I^{2d}.\end{cases}$$

Зауважимо, що завдяки (4) і (7) достатньо встановити, що для функції $V(\rho)$ має місце оцінка

$$V(\rho) \le C\cdot\begin{cases}\rho^{2\lambda}, & \text{якщо } \lambda<\beta+2;\\ \rho^{2\lambda}\ln^2\left(\dfrac{d_0}{\rho}\right), & \text{якщо } \lambda=\beta+2;\\ \rho^{2(\beta+2)}, & \text{якщо } \lambda>\beta+2.\end{cases} \tag{8}$$

$-a_{ij}(0, 0, w))$. За припущенням F) на підставі теореми вкладення Соболєва (теорема 7.26 [6]) маємо

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij}(0,0,w) - a_{ij}(0,0,0) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \mu_3 |w|,$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij}(x,v,w) - a_{ij}(0,0,w) \right|^2 \right)^{1/2} \leq C(q)(1+|w|) \| h \|_{q, G_0^{\rho,2d}} |x|^{1-n/q}.$$

Таким чином, враховуючи ще оцінки (5), (6), одержуємо

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij}(x,u,u_x) - a_{ij}(0,0,0) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \delta_1(\rho), \tag{14}$$

де $\delta_1(\rho) = \mu_3 \rho^{\gamma} + C_{18} \delta(\rho)$. Тепер, застосовуючи нерівність Коші, нерівність (4) та нерівність (7), знаходимо

$$\iint_{G_0^{\rho,2d}} \left| u_{x_i x_j} u(x) \zeta^2 \right| dx \leq \frac{1}{2} \iint_{G_0^{\rho,2d}} (r^2 u_{xx}^2 + r^{-2} u^2) \zeta^2 \, dx \leq C_6 \iint_{G_0^{2\rho,2d}} (u^2 \zeta^2 + r^2 (\rho^{-2} u_x^2 \zeta^2 +$$

$$+ u_x^2 \zeta'^2 + \rho^{-4} u^2 \zeta^2 + \rho^{-2} u^2 \zeta'^2 + u^2 \zeta''^2 + b^2 + f^2) \, dx + C_7 V(\rho) \leq$$

$$\leq C_8 \iint_{G_0^{2\rho,2d}} r^2 (u_x^2 \zeta'^2 + \rho^{-2} u^2 \zeta'^2 + u^2 \zeta''^2 + b^2 + f^2) \, dx + C_9 (V(2\rho) + V(\rho)).$$

Враховуючи властивості зрізки, оцінки (4), (9), умови на $f(x)$, $b(x)$, отримуємо

$$\iint_{G_0^{\rho,2d}} \left| u_{x_i x_j} u(x) \zeta^2 \right| dx \leq C_{10} (\rho^{2\gamma+4} + \rho^{2\beta+4} + V(2\rho) + V(\rho)). \tag{15}$$

Таким чином, на підставі (10) – (15) можна зробити висновок, що $V(\rho)$ задовольняє диференціальну нерівність

$$V(\rho) \leq \frac{\rho}{2\lambda} V'(\rho) + C_{11} ((\rho^{\gamma+2} + \rho^{\beta+2}) \sqrt{V(\rho)} + \delta_2(\rho) V(\rho) +$$

$$+ \delta_1(\rho) (V(2\rho) + \rho^{2\gamma+4} + \rho^{2\beta+4})),$$

де $\delta_2(\rho) = \delta_1(\rho) + (\rho^{\gamma+1} + \rho^{\beta+1})$, $\rho \in (0, d)$. До цієї нерівності додамо ще умову $V(d/2) = V_0$, причому завдяки (5) $V_0 < \infty$. Тоді за теоремою 2.2 [7] знайдуться такі сталі C_{12} і $d_1 \in (0, d)$, що коли $\gamma + 2 < \beta + 2$, то

$$V(\rho) \leq C_{12} \rho^{2\gamma+4}, \quad \rho \in (0, d_1),$$

або

$$\iint_{G_0^{\rho,d_1}} u_x^2 \, dx \leq C_{12} \rho^{2\gamma+4}, \quad \rho \in (0, d_1). \tag{16}$$

Маючи оцінку (16) і використовуючи її замість нерівності (9), можемо виконати описану вище процедуру. Діючи таким чином N разів, одержуємо

$$\iint_{G_0^{\rho,d_N}} u_x^2 \, dx \leq C_N \rho^{2\gamma_N+4}, \quad \rho \in (0, d_N), \tag{17}$$