УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. ун-т, Луцьк)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ГЕЛЬДЕРА ТРИГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

We obtain the exact value for the upper bound of deviation of the Poisson triharmonic integral from functions belonging to the Hölder class.

Отримано точне значення верхньої межі відхилення тригармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера.

Позначимо через $L^1_{2\pi}$ і $C_{2\pi} = L^\infty_{2\pi}$ класи 2π-періодичних, відповідно інтегровних і неперервних функцій з нормами

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \quad \|f\|_\infty = \max_x |f(x)|.$$

Нехай

$$A_2(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\theta)P_2(r,t)dt,$$

де $f(\cdot) \in L_{2\pi}$ і

$$P_2(r,t) = \frac{(1-r^2)^2(1-r\cos t)}{2\pi(1-2r\cos t + r^2)^2}, \quad 0 \le r < 1,$$

— бігармонійна функція, яку називають бігармонійним інтегралом Пуассона [1, 2].

Відповідно через

$$A_3(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\theta)P_3(r,t)dt,$$

де $f(\cdot) \in L_{2\pi}$ і

$$P_3(r,t) = \frac{(1-r^2)^3(4-9r\cos t + 6r^2\cos^2 t - r^3\cos t)}{8\pi(1-2r\cos t + r^2)^3}, \quad 0 \le r < 1,$$

позначимо, згідно з [3 – 5], тригармонійну функцію, яку називають тригармонійним інтегралом Пуассона.

Множину функцій $f \in L^p_{2\pi}$, $p = 1, \infty$, які задовольняють нерівність

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \le |h|, \tag{1}$$

будемо позначати через H^1_p і називати класом Гельдера.

Якщо ж $f \in L^p_{2\pi}$, $p = 1, \infty$, і задовольняє нерівність

$$\|f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)\|_p \le 2|h|,$$

то множину таких функцій позначають H^2_p і називають класом квазігладких функцій [6].

Позначимо через

$$\mathcal{E}\left(H^\nu_p, A_n(r,\theta)\right)_p = \sup_{f \in H^\nu_p} \|A_n(r,\theta) - f(\theta)\|_p, \tag{2}$$

де $p=1,\infty$, $\nu=1,2$ і $n=2,3$, верхню межу відхилення функцій класу H_p^ν від їх бігармонійного і тригармонійного інтегралів Пуассона.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію

$$\varphi(1-r) = \varphi\left(H_p^\nu; A_n(r,\theta); (1-r)\right)$$

таку, що при $r \to 1-0$

$$\mathcal{E}\left(H_p^\nu, A_n(r,\theta)\right)_p = \varphi(1-r) + o(\varphi(1-r)),$$

то говорять [7], що розв'язана задача Колмогорова – Нікольського (далі задача К.-Н.) для даного оператора $A_n(r,\theta)$ і даного класу H_p^ν, $p=1,\infty$, $\nu=1,2$.

Формальний ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(r)$ називається асимптотичним розкладом (або асимптотикою) функції f при $r\to r_0$, якщо при всіх n і $r\to r_0$ $\left|\varphi_{n+1}(r)\right| = o(|\varphi_n(r)|)$ і для будь-якого $N<\infty$

$$f(r) - \sum_{n=0}^{N}\varphi_n(r) = O\left(\varphi_{N+1}(r)\right), \quad r\to r_0.$$

В 1963 р. С. Каніев [8] для величини $\mathcal{E}\left(H_\infty^2, A_2(r,\theta)\right)_\infty$ довів асимптотичну рівність при $r\to 1-0$

$$\mathcal{E}\left(H_\infty^2, A_2(r,\theta)\right)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-r) + \frac{\varepsilon_r}{\pi}, \text{ де } \varepsilon_r = o(1-r). \tag{3}$$

В 1968 р. P. Pych [9] встановив таку асимптотичну рівність:

$$\mathcal{E}\left(H_\infty^2, A_2(r,\theta)\right)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-r) + O\left((1-r)^2\ln\frac{1}{1-r}\right), \quad r\to 1-0. \tag{4}$$

Оцінки (3) і (4) дають можливість встановити першу асимптотичну константу (константу К.-Н.) (див. [10]) при наближенні функцій класу H_∞^2 їх бігармонійними інтегралами Пуассона. При цьому слід відмітити, що $\mathcal{E}\left(H_p^1, A_2(r,\theta)\right)_p = \mathcal{E}\left(H_p^2, A_2(r,\theta)\right)_p$, $p=1,\infty$ (див., наприклад, [11]).

В роботі [12] отримано асимптотичний розклад величини $\mathcal{E}\left(H_p^1, A_2(r,\theta)\right)_p$, $p=1,\infty$, що дає можливість знаходити послідовно константи К.-Н. як завгодно високого порядку малості.

В даній роботі знайдено точне значення верхньої межі відхилення тригармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера H_p^1, $p=1,\infty$.

Справедливе таке твердження.

Теорема. *Величина* $\mathcal{E}\left(H_p^1, A_3(r,\theta)\right)_p$, *що визначається рівністю* (2), *при* $r\to 1-0$ *має такий асимптотичний розклад*:

$$\mathcal{E}\left(H_p^1, A_3(r,\theta)\right)_p = \frac{1}{\pi}(1-r) + \frac{5}{2\pi}(1-r)^2 + \frac{8}{3\pi}(1-r)^3\ln\frac{1}{1-r} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{18}+\frac{8}{3}\ln 2\right)(1-r)^3 - \frac{1}{\pi}(1-r)^4 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=5}^{\infty}\left\{\frac{2}{k}(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r} + \gamma_k(1-r)^k\right\}, \tag{5}$$

де $p=1,\infty$ *і*

$$\gamma_k = \frac{2}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right) + \frac{1}{2^{k-2}}\left\{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} - \frac{4}{k-3} + \frac{2}{k-4}\right\}.$$

Доведення. Спочатку доведемо рівність (5) для випадку $p = \infty$. Для цього покладемо $P(r,t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$.

Оскільки

$$P_3(r,t) = \frac{3(1-r^2)^2}{16\pi}P(r,t) + \frac{(3-5r^2)(1-r^2)}{16\pi}P^2(r,t) + \frac{(1-r^2)^2}{8\pi}P^3(r,t) =:$$

$$=: P_3'(r,t) + P_3''(r,t) + P_3'''(r,t), \tag{6}$$

то легко переконатись, що $\int_{-\pi}^{\pi} P_3(r,t)\,dt = 1$. Тоді очевидно, що

$$A_3(r,\theta) - f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t+\theta) - f(\theta)\} P_3(r,t)\,dt.$$

Оскільки $f \in H^1$, то згідно з співвідношенням (1) отримуємо

$$|A_3(r,\theta) - f(\theta)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |t| P_3(r,t)\,dt.$$

Внаслідок того, що функція $f_0(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$, належить H^1 і перетворює попередню нерівність в рівність, одержуємо

$$\mathcal{E}\left(H^1_\infty, A_3(r,\theta)\right)_\infty = \sup_{f\in H^1}\max_{|\theta|\le\pi}|A_3(r,\theta) - f(\theta)| = 2\int_0^{\pi} t P_3(r,t)\,dt. \tag{7}$$

Враховуючи співвідношення (6), з (7) маємо

$$\mathcal{E}\left(H^1_\infty, A_3(r,\theta)\right)_\infty = 2\int_0^{\pi} tP_3'(r,t)\,dt + 2\int_0^{\pi} tP_3''(r,t)\,dt + 2\int_0^{\pi} tP_3'''(r,t)\,dt =:$$

$$=: I_1(r) + I_2(r) + I_3(r).$$

Для обчислення інтеграла $I_2(r)$ застосуємо метод інтегрування частинами. Для цього покладемо $u = t$, $dv = dt\,/\,(1-2r\cos t + r^2)^2$. Використовуючи формули 2.554 (3), 2.553 (3) з роботи [13], знаходимо

$$v = \frac{1}{(1-r^2)^2}\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t + r^2} + \frac{2(1+r^2)}{(1-r^2)^3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right).$$

Тоді

$$I_2(r) = \frac{(1-r^2)^3(3-5r^2)}{8\pi}\left(\pi\frac{1+r^2}{(1-r^2)^3}\pi - \frac{2r}{(1-r^2)^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{1-2r\cos t + r^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(1+r^2)}{(1-r^2)^3}\int_0^{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)dt\right).$$

Звідси

$$I_2(r) = \frac{(1+r^2)(3-5r^2)}{8\pi}\int_0^\pi t\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}dt - \frac{(1-r^2)(3-5r^2)}{4\pi}\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Аналогічно, використовуючи формули 2.554 (3) з роботи [13], одержуємо

$$I_3(r) = -\frac{(1-r^2)r}{2\pi} - \frac{3(1+r^2)(1-r^2)}{4\pi}\ln\frac{1+r}{1-r} +$$

$$+ \frac{(1+r^2)^2+2r^2}{4\pi}\int_0^\pi t\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}dt.$$

Враховуючи отримані для $I_2(r)$ та $I_3(r)$ рівності, маємо

$$\mathcal{E}\left(H^1_\infty, A_3(r,\theta)\right)_\infty = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r) =: \frac{1}{\pi}\left(l_1(r) + l_2(r) + l_3(r)\right), \tag{8}$$

де

$$l_1(r) = -\frac{r(1-r^2)}{2}, \qquad l_2(r) = -\frac{(1-r^2)(3-r^2)}{2}\ln\frac{1+r}{1-r},$$

$$l_3(r) = \int_0^\pi t\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}dt.$$

Розкладемо функцію $l_1(r)$ в ряд Тейлора за степенями $r-1$. При цьому отримаємо

$$l_1(r) = -(1-r) + \frac{3}{2}(1-r)^2 - \frac{1}{2}(1-r)^3. \tag{9}$$

Оскільки

$$\ln(1+r) = \ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-r)^k}{k2^k},$$

то

$$l_2(r) = -2\ln 2(1-r) + (1-\ln 2)(1-r)^2 + \left(2\ln 2 + \frac{3}{4}\right)(1-r)^3 +$$

$$+\left(-\frac{\ln 2}{2} - \frac{19}{24}\right)(1-r)^4 - 2(1-r)\ln\frac{1}{1-r} - (1-r)^2\ln\frac{1}{1-r} + 2(1-r)^3\ln\frac{1}{1-r} -$$

$$-\frac{1}{2}(1-r)^4\ln\frac{1}{1-r} + \sum_{k=5}^{\infty}\alpha_k(1-r)^k, \tag{10}$$

де

$$\alpha_k = \frac{1}{2^{k-2}}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} - \frac{4}{k-3} + \frac{2}{k-4}\right).$$

Враховуючи тепер отриманий Штарком асимптотичний розклад при $r \to 1-0$ [14, с. 23], знаходимо

$$l_3(r) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r} + \beta_k(1-r)^k\right\}, \tag{11}$$

де

$$\beta_k = \frac{1}{k}\left\{\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right\}.$$

Підставляючи (9) – (11) в рівність (8) і виконуючи тотожні перетворення, отримуємо рівність (5) у випадку $p = \infty$.

У випадку $p = 1$ співвідношення (5) випливає із результату В. П. Моторного [15], який встановлює точні асимптотичні рівності між верхніми межами в рівномірній та інтегральній метриках відхилень функцій класу H_p^1, $p = 1, \infty$, від операторів з додатними ядрами, що породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. Теорему доведено.

Наслідок. *Оскільки* $\mathcal{E}\left(H_p^1, A_3(r,\theta)\right)_p = \mathcal{E}\left(H_p^2, A_3(r,\theta)\right)_p$, $p = 1, \infty$ *(див., наприклад,* [11]*), то величину* $\mathcal{E}\left(H_p^2, A_3(r,\theta)\right)_p$ *можна розкласти в асимптотичний ряд, записаний у правій частині рівності* (5).

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. *Петров В. А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – 7, № 1. – С. 137 – 142.
3. *Edenhofer J.* Eine Integral darstellung der Losung der Dirichletschen Aufgabe bei der Polypotentialgleichung im Falle einer Hyperkugel // Math. Nachr. – 1975. – 69. – S. 149 – 162.
4. *Gonzales L., Keller E., Wildenhain G.* Uber das Randverhalten des Poisson-Integrals des polyharmonischen Gleichung // Math. Nachr. – 1980. – 95. – S. 157 – 164.
5. *Гембарська С. Б.* Існування тригармонійних в крузі функцій, які в кожній точці не мають дотичних границь // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – 20. – С. 92 – 100.
6. *Тиман А. Ф.* О квазигладких функциях // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – 15, № 3. – С. 243 – 254.
7. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
8. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995 – 998.
9. *Pych P.* On a biharmonic function in unit dise // Ann. pol. math. – 1968. – 20, № 3. – P. 203 – 213.
10. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.
11. *Butzer P. L., Nessel R. J.* Fourier analysis and approximation, 1. One-dimensional theory. – Basel; New York, 1971. – 553 p.
12. *Жигилло К. М., Харкевич Ю. І.* Про наближення функцій класу Гельдера бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, № 7. – С. 971 – 974.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
14. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от их сингулярного интеграла Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21 – 28.
15. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Там же. – 1974. – 16, № 1. – С. 15 – 26.

Одержано 17.12.98,
після доопрацювання – 10.11.2000