УДК 517.576

О. Б. Скасків, Т. М. Сало (Львів. ун-т)

ЦІЛІ РЯДИ ДІРІХЛЕ ШВИДКОГО ЗРОСТАННЯ І НОВІ ОЦІНКИ МІРИ ВИНЯТКОВИХ МНОЖИН В ТЕОРЕМАХ ТИПУ ВІМАНА–ВАЛІРОНА

For entire Dirichlet series of the form $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, we establish conditions under which the relation

$$F(\sigma + i\tau) = (1 + o(1))\, a_{\nu(\sigma)} e^{(\sigma+i\tau)\lambda_{\nu(\sigma)}}$$

is true as $\sigma \to +\infty$ outside some set E such that $DE = \overline{\lim\limits_{\sigma \to +\infty}}\, h(\sigma)\,\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, uniformly in $y \in \mathbb{R}$, where $h(\sigma)$ is a positive continuous function increasing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$.

Для цілих рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, встановлено умови, при виконанні яких

$$F(\sigma + i\tau) = (1 + o(1))\, a_{\nu(\sigma)} e^{(\sigma+i\tau)\lambda_{\nu(\sigma)}}$$

при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини E, для якої $DE = \overline{\lim\limits_{\sigma \to +\infty}}\, h(\sigma)\,\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, де $h(\sigma)$ — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція.

1. Вступ. Позначимо через $H_a(\Lambda)$ клас абсолютно збіжних у півплощині $\{z: \mathrm{Re}\, z < a\}$, $a \le +\infty$, рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

$\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$. Для $F \in H_a(\Lambda)$ і $\sigma < a$ позначимо

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}, \qquad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \ge 0\}$$

— максимальний член ряду (1),

$$\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$$

— центральний індекс ряду (1).

Відомо, що обмеження на швидкість зростання або певна регулярність зростання послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ забезпечують регулярність зростання (в тому чи іншому) сенсі суми цілого ряду Діріхле $F \in H_{+\infty}(\Lambda)$ (див. [1–4]).

Так, в [3] показано (для лакунарних степеневих рядів див. [5]), що для того, щоб для кожної цілої функції $F \in H_{+\infty}(\Lambda)$ співвідношення

$$F(\sigma + iy) = (1 + o(1))\, a_{\nu(\sigma)} e^{(\sigma+iy)\lambda_{\nu(\sigma)}} \tag{2}$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \tag{3}$$

Якщо при цьому умова (3) не виконується, то існує функція $F \in H_{+\infty}(\Lambda)$ така, що $F(\sigma) > (1+h)\mu(\sigma, F)(\sigma \geq \sigma_0)$ для деякого $h > 0$. У статті [2] встановлено, що для того, щоб для кожної цілої функції $F \in H_{+\infty}(\Lambda)$ співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{4}$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty. \tag{5}$$

У класі $H_0(\Lambda)$ подібні результати принципово неможливі. Однак, якщо для аналітичної функції $F \in H_0(\Lambda)$ крім умови $\ln \mu(\sigma, F) \geq |\sigma| \Phi(1/|\sigma|)$, $-1 \leq \leq \sigma < 0$, вимагати виконання умови

$$\lim_{t \to +\infty} t \sum_{\lambda_n > \Phi(t)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to -0$ $(\sigma \in [-1; 0) \setminus E)$ рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, де E — множина така, що

$$dE \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\sigma \to -0} \frac{1}{\sigma} \operatorname{meas}(E \cap [\sigma, 0)) = 0,$$

$\Phi(t) \uparrow +\infty$, $t \to +\infty$, — деяка неперервна досить швидко зростаюча функція (див. [6], теорема 3 і т. п.).

У цій статті, використовуючи методику з [6], застосовану там до класу $H_0(\Lambda)$, уточнимо наведені вище результати з [2, 3]. В ідейному плані ці уточнення є близькими до результатів з [6].

Введемо деякі позначення. Нехай L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Для $\Phi \in L$ позначимо

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H_{+\infty}(\Lambda) \colon (\exists K_F > 0)(\ln \mu(\sigma, F) \geq K_F \sigma \Phi(\sigma),\ \sigma \geq \sigma_0)\}.$$

Для вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри $\operatorname{meas} E < +\infty$ її h-щільністю назвемо

$$D_h(E) = \overline{\lim_{R \to +\infty}} h(R) \operatorname{meas}(E \cap [R, +\infty)),$$

де $h \in L$.

Через L_φ для $\varphi \in L$ позначимо клас функцій $h \in L$ таких, що

$$\frac{h(\varphi(t))}{t} \ln t \to 0, \quad t \to +\infty,$$

де $\varphi(t)$ — функція, обернена до $\Phi(t)$.

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\Phi \in L$ *і* $h \in L_\varphi$. *Якщо* $F \in H(\Lambda, \Phi)$ *і*

$$(\forall b > 0) \colon \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{6}$$

то співвідношення (2) *виконується при* $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E,\ D_h(E) = 0)$ *рівномірно по* $y \in \mathbb{R}$.

У випадку $\Phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, отримуємо необхідність умови (6) для того, щоб співвідношення (2) справджувалось для кожної функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$ при $\sigma \notin E$, $D_h(E) = 0$. Це випливає з наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай* $\Phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $h(\sigma) \in L$ *і умова* (6) *не викону-*

ється. Тоді існують функція $F \in H(\Lambda, \Phi)$, стала $\beta > 0$ і множина E з $D_h(E) > 0$ такі, що для всіх $\sigma \in E$

$$F(\sigma) > (1+\beta)\mu(\sigma, F).$$

2. Допоміжні твердження. Наступна теорема містить нові оцінки міри виняткової множини у теоремах типу Вімана – Валірона (пор. з [1]).

Позначимо через L_0 клас додатних неспадних на $[0, +\infty)$ функцій $V(t)$ таких, що

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} < +\infty,$$

а L_2 — клас функцій $h \in L$ таких, що

$$h\left(x + \frac{1}{h(x)}\right) = O(h(x)) \qquad (x \to +\infty).$$

Теорема 3. *Нехай $V \in L_0$, $h \in L$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in H(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0): \lim_{n \to +\infty} h\left(\varphi(b\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t}\right) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0, \tag{7}$$

то для всіх $n \geq 0$ і $\sigma \in [0; +\infty) \setminus E$, $D_h E = 0$, справедлива нерівність

$$|a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dV(t)\right\}, \tag{8}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$ і φ — функція, обернена до Φ.

Доведення. За умови $F \in H(\Lambda, \Phi)$ при $\sigma \geq \sigma_0$ маємо

$$K\sigma\Phi(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma, F) = \ln\mu(0, F) + \int_0^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt \leq 2\sigma\lambda_{\nu(\sigma-0)},$$

звідки

$$\sigma \leq \varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma-0)}\right), \tag{9}$$

де $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F)$, $K = K_F$, $\varphi(t)$ — функція, обернена до $\Phi(t)$.

Нехай

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{dV(x)}{x}, \quad \tau_n = \alpha(\lambda_n), \quad \alpha_n = \exp\left\{-\int_0^{\lambda_n} \alpha(t)\, dt\right\}.$$

Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z\lambda_n}.$$

Оскільки

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{\sigma\lambda_n} \leq |a_n| \exp\{(\sigma + \alpha(\lambda_n))\lambda_n\} \leq |a_n| \exp\{(\sigma + A)\lambda_n\},$$

то $f \in H_{+\infty}(\Lambda)$.

Нехай тепер (R_j) — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma, f)$, тобто $\nu(\sigma, f) = j$ при $R_j \leq \sigma < R_{j+1}$ і якщо $\nu(R_{j+1}, f) = j + p$, то $R_{j+1} =$

$= R_{j+2} = \ldots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$. Якщо $(\sigma - \tau_j) \in [R_j, R_{j+1})$, то за означенням $\mu(\sigma, f)$

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_n} \le \frac{|a_j|}{\alpha_j} e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_j}, \quad n \ge 0,$$

і тому при $\sigma \in [R_j + \tau_j,\ R_{j+1} + \tau_j)$ і $n \ne j$

$$\frac{|a_n| e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j| e^{\sigma\lambda_j}} \le \frac{\alpha_n}{\alpha_j} e^{\tau_j(\lambda_n - \lambda_j)} = \exp\left\{ -\int_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j))\,dt \right\} < 1.$$

Отже, для $\sigma \in [R_j + \tau_j,\ R_{j+1} + \tau_j)$ маємо $\nu(\sigma, F) = j$, а оскільки

$$\int_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j))\,dt = \int_{\lambda_j}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t}\, dV(t),$$

то нерівність (8) виконується для всіх $n \ge 0$ і

$$\sigma \in E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^{+\infty} [R_j + \tau_j,\ R_{j+1} + \tau_j).$$

Позначимо $E = [R_1 + \tau_1; +\infty) \setminus E_1$. Зауважимо, що якщо $R_j < R_{j+1} = \ldots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$, $p \ge 1$, і $\sigma \in [R_j + \tau_j,\ R_{j+1} + \tau_j)$, то $\nu(\sigma, F) = j$ і для міри множини $E \cap [\sigma, +\infty)$ отримуємо

$$\operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = \sum_{k=j}^{+\infty} ((R_{k+1} + \tau_{k+1}) - (R_{k+1} + \tau_k)) =$$

$$= \sum_{k=j}^{+\infty} (\tau_{k+1} - \tau_k) = \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t}.$$

Якщо ж $\sigma \in [R_{j+1} + \tau_j,\ R_{j+1} + \tau_{j+p})$, то

$$\operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) \le \operatorname{meas}(E \cap [R_{j+1} + \tau_j, +\infty)) =$$

$$= \sum_{k=j}^{+\infty} (\tau_{k+1} - \tau_k) = \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t}.$$

Тому при $\sigma \in [R_j + \tau_j,\ R_{j+1} + \tau_{j+p})$ з нерівності (9) маємо

$$h(\sigma) \operatorname{meas}(E \cap [\sigma, 0)) \le h\big((R_{j+1} + \tau_j) + (\tau_{j+p} - \tau_j)\big) \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} \le$$

$$\le h\left(\varphi\left(\frac{2\lambda_j}{K}\right) + \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+p}} \frac{dV(t)}{t} \right) \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t},$$

оскільки $\nu(R_{j+1} + \tau_j - 0, F) = j$. Залишилось скористатись умовою (7). Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 1.** Як випливає з доведення теореми 3, досить вимагати виконання умови (7) при $b = 2/K_F$.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $h \in L_2$, $\Phi \in L$. *Якщо* $F \in H(\Lambda, \Phi)$ *і виконується умова*

$$(\forall\, b>0):\ h(\varphi(bx))\int\limits_x^{+\infty}\frac{\ln n(t)}{t^2}\,dt\to 0,\qquad x\to+\infty,\tag{10}$$

то знайдеться функція $C(t)\uparrow+\infty$, $t\to+\infty$, *така, що для всіх* $n\ge 0$ *і* $\sigma\in$ $\in[0,+\infty)\setminus E$, $D_hE=0$, *справедлива нерівність*

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\le\ \mu(\sigma,F)\exp\left\{-\int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n-t}{t^2}\,C(t)\ln n(4t)\,dt\right\},\tag{11}$$

де $\nu=\nu(\sigma,F)$, $n(t)=\sum\limits_{\lambda_n\le t}1$ — *лічильна функція послідовності* (λ_n).

***Доведення наслідку* 1.** Позначимо

$$l_1(x)\,=\,h(\varphi(bx))\,l(x),\qquad l(x)\,=\,\int\limits_x^{+\infty}t^{-2}\ln n(4t)\,dt.$$

Тоді за умовою (10)

$$l_1(x)\,=\,4h(\varphi(bx))\int\limits_{4x}^{+\infty}t^{-2}\ln n(t)\,dt\,=\,o(1)$$

і, отже,

$$C(x)\ \overset{\text{def}}{=}\ (\max\{l_1(t):\,t\ge x\})^{-1/2}\uparrow+\infty,\qquad x\to+\infty.$$

Зауважимо, що

$$h(\varphi(b\lambda_n))\int\limits_{\lambda_n}^{+\infty}t^{-2}C(t)\ln n(4t)\,dt\ \le\ h(\varphi(b\lambda_n))\int\limits_{\lambda_n}^{+\infty}\frac{\ln n(4t)}{t^2(h(\varphi(bt))\,l(t))^{1/2}}\,dt\ \le$$

$$\le\ -\sqrt{h(\varphi(b\lambda_n))}\int\limits_{\lambda_n}^{+\infty}\frac{dl(t)}{\sqrt{l(t)}}\ =\ 2\sqrt{l_1(\lambda_n)}\ =\ o(1),\qquad n\to+\infty,$$

тому для $V(x)=\int_0^x t^{-1}C(t)\ln n(4t)\,dt$ при $n\to+\infty$ маємо

$$h\left(\varphi(b\lambda_n)+\int\limits_{\lambda_n}^{+\infty}\frac{dV(x)}{x}\right)\int\limits_{\lambda_n}^{+\infty}\frac{dV(x)}{x}\ =$$

$$=\ o(1)\,\frac{h\left(\varphi(b\lambda_n)+\dfrac{1}{h(\varphi(b\lambda_n))}\right)}{h(\varphi(b\lambda_n))},$$

що з огляду на умову $h\in L_2$ забезпечує справедливість умови (7) теореми 3. Застосування теореми 3 з так вибраною функцією $V(t)$ завершує доведення наслідку 1.

***Зауваження* 2.** Функція $C(t)$ у наслідку 1, взагалі кажучи, визначена при фіксованому $b>0$. В подальшому ми, власне, застосовуємо наслідок, враховуючи дану обставину.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\Phi\in L$, $h\in L_2$. *Якщо* $F\in H(\Lambda,\Phi)$ *і виконується умова* (10), *то співвідношення*

$$\ln M(\sigma,F)\,=\,(1+o(1))\ln\mu(\sigma,F)$$

справджується при $\sigma\to+\infty$ $(\sigma\in[0,+\infty)\setminus E,\ D_hE=0)$.

Не зменшуючи загальності вважаємо $a_0=1$.

Доведення. За наслідком 1 з нерівності (11) при $n = 0$ для всіх $\sigma \notin E$ маємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \int_0^{\lambda_\nu} \frac{C(t)}{t} \ln n(4t)\, dt \geq C\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right) \ln n(2\lambda_\nu) \ln 2,$$

тому

$$\ln n(2\lambda_\nu) = o(\ln \mu(\sigma, F)), \quad \sigma \to +\infty, \quad \sigma \notin E. \tag{12}$$

Далі при $\sigma \notin E$ з (11) отримуємо

$$\sum_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{\lambda_n \geq 2\lambda_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leq \sum_{\lambda_n \geq 2\lambda_\nu} \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} C(t) \ln n(4t)\, dt\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{\lambda_n \geq 2\lambda_\nu} \exp\left\{-C\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \ln n(2\lambda_n) \int_{\lambda_n/2}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} dt\right\}.$$

Зауважимо, що

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-2}(x-t)\, dt = 1 - \ln 2 \quad \text{і} \quad \sum_{k \geq n} \frac{1}{(k+1)^A} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^A} = \frac{1}{(A-1)n^{A-1}}$$

при $A > 1$, тому

$$\sum_1 \leq o(\exp\{-(C(\lambda_\nu)(1 - \ln 2) - 1) \ln n(4\lambda_\nu)\}) = o(1)$$

при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E$. Звідси та з (12) при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E$, послідовно маємо

$$\frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \leq \sum_{\lambda_n < 2\lambda_\nu} \frac{|a_n| e^{\sigma\lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} + \sum_1 \leq n(2\lambda_\nu) + o(1),$$

а також

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leq 1 + \frac{\ln(n(2\lambda_\nu) + o(1))}{\ln \mu(\sigma, F)} = (1 + o(1)),$$

що разом з нерівністю Коші $M(\sigma, F) \geq \mu(\sigma, F)$ доводить наслідок 2.

***Зауваження* 3.** Наслідок 2 справедливий, очевидно, за виконання умови (10) з $b = 2/K_F$.

***Наслідок* 3.** *Якщо* $\Phi \in L$, $h \in L$ *і виконуються умови наслідку* 1, *то*

$$\sum_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{\lambda_n \leq \lambda_\nu/3} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} = o(1)$$

при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E,\ D_h E = 0)$, *де* $\nu = \nu(\sigma, F)$.

Доведення. За наслідком 1 з нерівності (11) при $\sigma \notin E$ маємо

$$\sum_2 \leq \sum_{\lambda_n \leq \lambda_\nu/3} \exp\left\{-\int_{\lambda_n}^{\lambda_\nu} t^{-2}(t - \lambda_n) C(t) \ln n(4t)\, dt\right\}.$$

Оскільки

$$\psi(y) = \int_y^{\lambda_\nu} t^{-2}(t - y) C(t) \ln n(4t)\, dt$$

при $y \in (0; \lambda_\nu]$ спадає, то для $y \leq \lambda_\nu/3$

$$\psi(y) \geq \psi\left(\frac{1}{3}\lambda_\nu\right) \geq C\left(\frac{1}{3}\lambda_\nu\right)\ln n\left(\frac{4}{3}\lambda_\nu\right)\int_{\lambda_\nu/3}^{\lambda_\nu} t^{-2}\left(t-\frac{\lambda_\nu}{3}\right)dt =$$

$$= \left(3-\ln\frac{2}{3}\right)C\left(\frac{1}{3}\lambda_\nu\right)\ln n\left(\frac{4}{3}\lambda_\nu\right) \overset{\text{def}}{=} C_\nu \ln n\left(\frac{4}{3}\lambda_\nu\right).$$

Отже, при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E)$

$$\sum_2 \leq n\left(\frac{1}{3}\lambda_\nu\right)\exp\left\{-C_\nu \ln n\left(\frac{4}{3}\lambda_\nu\right)\right\} = o(1),$$

і наслідок 3 доведено.

3. Доведення теореми 1. Позначимо

$$q(k) = n\left(\frac{\lambda_k}{3}\right), \quad k \geq 0,$$

$$\delta_k = \max\{\delta(l,j)\colon q(k) \leq l \leq k \leq j < +\infty\},$$

$$\delta(l,j) = (j-l+1)^{-3/2}\sum_{m=l}^{j}(\lambda_{m+1}-\lambda_m)^{-1}.$$

Як і в [6], показуємо, що

$$\sum_{k\geq n}\delta_k \leq C\sum_{k\geq q(n)}\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}, \quad n \geq 0,$$

де $C>0$ — деяка стала. Зауважимо, що за умови (6) при $b = 1/6$ маємо

$$\sum_{k\geq q(n)}\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \leq \sum_{\lambda_k > \lambda_n/3}\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = o\left(\frac{1}{h(\varphi(2\lambda_n))}\right), \quad n \to +\infty.$$

Тому

$$h(\varphi(2\lambda_n))\sum_{k\geq n}\delta_k = o(1), \quad n \to +\infty. \tag{13}$$

Нехай $l_n = \sum_{k\geq n}\delta_k$. Визначимо

$$C_k = \left(\max\{h(\varphi(2\lambda_n))l_n : k \geq n\}\right)^{-1/2}.$$

Тоді $C_k \to +\infty$, $k \to +\infty$, і, отже, внаслідок (13) маємо

$$h(\varphi(2\lambda_n))\sum_{k\geq n}C_k\delta_k \leq \sqrt{h(\varphi(2\lambda_n))}\sum_{k\geq n}\frac{\delta_k}{\sqrt{l_k}} =$$

$$= \sqrt{h(\varphi(2\lambda_n))}\sum_{k\geq n}\frac{l_k - l_{k+1}}{\sqrt{l_k}} =$$

$$= \sqrt{h(\varphi(2\lambda_n))}\sum_{k\geq n}\left(\sqrt{l_k}-\sqrt{l_{k+1}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{l_{k+1}}{l_k}}\right) \leq$$

$$\leq 2\sqrt{h(\varphi(2\lambda_n))l_n} = o(1), \quad n \to +\infty. \tag{14}$$

Нехай тепер $\varepsilon_k = C_k\delta_k$. Покажемо, що рівності

$$\nu(\sigma+\varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma), \quad \nu(\sigma-\varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma) \tag{15}$$

виконуються відразу для всіх $\sigma \in [0;+\infty)\backslash E_2$, $D_h E_2 = 0$, де $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F)$. Нехай (σ_n) — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma, F)$ — занумерована так, як вище послідовність (R_n). Нехай $\sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$ і

$\sigma_n < \sigma_{n+1} = \ldots = \sigma_{n+p} < \sigma_{n+p+1}$. Тоді $\nu(\sigma) = n$ і $\nu(\sigma + \varepsilon_{\nu(\sigma)}) \neq \nu(\sigma)$ лише у випадку, якщо $\sigma + \varepsilon_n \geq \sigma_{n+1}$, а $\nu(\sigma - \varepsilon_{\nu(\sigma)}) \neq \nu(\sigma)$ лише у випадку $\sigma - \varepsilon_n < \sigma_n$. Тобто, рівності (15) на проміжку $[\sigma_n, \sigma_{n+1})$ можуть не виконуватись лише на множині $E_{(n)} \subset [\sigma_n, \sigma_n + \varepsilon_n) \cup [\sigma_{n+1} - \varepsilon_n, \sigma_{n+1})$. У будь-якому випадку $\operatorname{meas} E_{(n)} \leq 2\varepsilon_n$. Нехай

$$E_2 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{(n)} \quad \text{і} \quad \sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1}],$$

тоді за нерівністю (9)

$$h(\sigma) \operatorname{meas}(E_2 \cap [\sigma, +\infty)) \leq h(\sigma) \sum_{k=n}^{+\infty} \operatorname{meas} E_{(k)} \leq$$

$$\leq 2h\left(\varphi\left(2\lambda_{\nu(\sigma_{n+1}-0)}\right)\right) \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k = 2h(\varphi(2\lambda_n)) \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k .$$

Звідси, враховуючи (14), отримуємо $D_h E_2 = 0$. Для всіх $\sigma \in [\sigma_1, +\infty) \setminus E_2$ одночасно виконуються рівності (15).

За означенням $\mu(\sigma, F)$ при $\sigma \notin E_2$ за допомогою рівностей (15) послідовно одержуємо

$$|a_n| e^{(\sigma \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})\lambda_n} \leq \mu(\sigma \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)}, F) = \left|a_{\nu(\sigma)}\right| e^{(\sigma \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})\lambda_{\nu(\sigma)}},$$

тобто

$$|a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp\{-|\lambda_n - \lambda_{\nu(\sigma)}| \varepsilon_{\nu(\sigma)}\}. \tag{16}$$

Оскільки за нерівністю Коші – Буняковського

$$\sum_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \sum_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \geq (j - l + 1)^2, \tag{17}$$

то для $n \geq \nu + 1$, вибираючи в (17) $l = \nu$ та $j = n - 1$, маємо

$$\delta_\nu \geq \delta(\nu, n-1) \geq (n-\nu)^{1/2}, \tag{18}$$

а для $q_1(\nu) \leq n \leq \nu - 1$, вибираючи в (17) $l = n$ та $j = \nu - 1$, отримуємо

$$\delta_\nu \geq \delta(n, \nu) \geq \left(\frac{\nu - n}{\nu - n + 1}\right)^{3/2} \delta(n, \nu - 1) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{\nu - n + 1}\right)^{3/2} (\nu - n)^{1/2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} (\nu - n)^{1/2} > \frac{(\nu - n)^{1/2}}{3}.$$

За допомогою останньої нерівності та нерівності (18) з нерівності (16) при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E_2$, дістаємо

$$\sum_3 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{\substack{n \geq q_1(\nu), \\ n \neq \nu}} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leq \sum_{n=q_1(\nu)}^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{C_\nu}{3}(\nu - n)^{1/2}\right\} +$$

$$+ \sum_{n=\nu+1}^{+\infty} \exp\left\{-C_\nu (n - \nu)^{1/2}\right\} < 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{C_\nu}{3} n^{1/2}\right\} = o(1).$$

Застосовуючи наслідок 3 разом з останньою нерівністю при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E \cup E_2 = E_1$, одержуємо

$$\sum_{n\neq\nu(\sigma)}|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \le \mu(\sigma, F)\left(\sum_2 + \sum_3\right) = o(\mu(\sigma, F)).$$

Тому

$$R_\nu(\sigma+iy) = \sum_{n\neq\nu(\sigma)} a_n e^{(\sigma+iy)\lambda_n} = o(\mu(\sigma, F))$$

при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E_1$, рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, і теорему 1 доведено, оскільки $0 \le \le D_h(E_1) \le D_h(E) + D_h(E_2) = 0$, тобто $D_h(E_1) = 0$.

Для завершення доведення теореми 1 досить зауважити, що із умови

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} < +\infty$$

за допомогою нерівності (17) отримуємо $n(t) = o(\sqrt{t})$, $t \to +\infty$, тому

$$\int_x^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2}\,dt = O\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad x \to +\infty,$$

і оскільки $h \in L_\varphi$, то застосування наслідку 3 є коректним. Теорему 1 доведено.

4. Доведення теореми 2. З огляду на цитовану у вступі теорему з [3], не зменшуючи загальності, вважаємо ряд (3) збіжним. Звідси безпосередньо випливає, що $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to +\infty$, $n \to +\infty$, звідки

$$\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right) - \varphi\left(\frac{\lambda_{n-1}}{b}\right)\right)(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \ge b_1 > 0 \qquad (19)$$

для кожного $b > 0$, деякого b_1 і $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$.

Зауважимо тепер, що із заперечення умови (6) випливає, що існує послідовність $n = n_j \uparrow +\infty$ така, що

$$h\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right)\right)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \ge d > 0, \quad n = n_j, \qquad (20)$$

для деяких $b > 0$ і d.

Покладемо

$$\varkappa_n = \varphi\left(\frac{\lambda_{n-1}}{b}\right), \quad n \ge 1, \quad a_0 = 1, \quad a_n = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\varkappa_n(\lambda_k - \lambda_{k-1})\right\}.$$

Тоді $\varkappa_n = \dfrac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$, і оскільки $\varkappa_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, то, як добре відомо, у цьому випадку

$$\mu(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \max\left\{a_k e^{\sigma\lambda_k} : k \ge 0\right\} = a_n e^{\sigma\lambda_n}$$

для $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ і всіх $n \ge 1$. Зауважуючи, що за нерівністю (19)

$$\varkappa_{n+1} - \varkappa_n = \varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right) - \varphi\left(\frac{\lambda_{n-1}}{b}\right) \ge \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}},$$

для всіх

$$\sigma \in \left[\varkappa_n ; \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} + \varkappa_n\right]$$

маємо