УДК 517.9

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА И ФУНКЦИИ ТОКА СТОКСА В ОБЛАСТЯХ МЕРИДИАННОЙ ПЛОСКОСТИ. II*

We obtain new integral representations for axially symmetric potential and the Stockes flow function in arbitrary simple-connected domain of the meridianal plane. For domains with the Jordan closed rectifiable boundary, we investigate boundary properties of these integral representations.

Одержано нові інтегральні зображення осесиметричного потенціалу та функції течії Стокса в довільній однозв'язній області меридіанної площини. Для областей із замкненою спрямлюваною жордановою межею досліджуються межові властивості цих інтегральних зображень.

Данная работа является продолжением работы [1] и имеет общие с ней обозначения, нумерацию пунктов, формул и теорем.

3. Граничные свойства функции тока Стокса в областях с ограниченной границей. Как и в предыдущем пункте, будем рассматривать области D_z^+ и D_z^-, общей границей которых является замкнутая жорданова спрямляемая кривая γ, симметричная относительно вещественной прямой.

В теоремах 6, 7 приводятся достаточные условия непрерывной продолжимости функции

$$f_{fl}^{\pm}(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z^{\pm}} f(t)\left(1-\dfrac{t-\operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\right)dt & \text{при } z\in D_z^{\pm},\ \operatorname{Im} z\neq 0; \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} z = 0 \text{ в случае } \\ & b_1<z<b_2 \text{ или } z<b_1<b_2; \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z^-} f(t)\,dt & \text{при } \operatorname{Im} z = 0 \text{ в случае } b_1<b_2<z \end{cases}$$

из области $D_z^{\pm}$ на границу $\partial D_z^{\pm}$.

Теорема 6. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, симметричная относительно вещественной прямой и такая, что $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$. Если $f\in L_p(\gamma)$, $2<p\le\infty$, то функция $f_{fl}^{\pm}$ непрерывно продолжается из области $D_z^{\pm}$ на границу $\partial D_z^{\pm}$, а ее граничные значения $f_{fl}^{\pm}(z)$ при $z\in\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1;b_2\}$ выражаются формулой*

$$f_{fl}^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^{\pm}} f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re} z}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^{\mp}}\right)dt. \tag{29}$$

При этом:

1) *для каждой точки $z_0\in\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1;b_2\}$ и любой точки $z_1\in\partial D_z^{\pm}$, для которой $|z_1-z_0|\le\frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|$, имеет место неравенство*

$$\left|f_{fl}^{\pm}(z_1)-f_{fl}^{\pm}(z_0)\right| \le c\|f\|_{L_p}\Omega(z_0,z_1), \tag{30}$$

*Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда INTAS (грант № 99-00089).

где $\Omega(z_0, z_1) = (d(z_0, z_1))^{(p-2)/2p}$ *при* $2 < p < \infty$ *и* $\Omega(z_0, z_1) = \sqrt{d(z_0, z_1)} + \sqrt{|z_1 - z_0|} \ln \dfrac{1}{|z_1 - z_0|}$ *при* $p = \infty$, *а постоянная* c *зависит только от кривой* γ;

2) *для всех* $z \in \partial D_z^{\pm}$ *таких, что* $|z - b_j| < (b_2 - b_1)/3$ *при* $j = 1$ *или* $j = 2$, *имеет место неравенство*

$$\left| f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_j) \right| \leq c \| f \|_{L_p} \left(\omega_1 \left(|z - b_j| \right) + d(z, b_j) \right), \tag{31}$$

где $\omega_1(\delta) := \delta^{(p-1)/p}$ *при* $2 < p < \infty$ *и* $\omega_1(\delta) := \delta \ln \dfrac{1}{\delta}$ *при* $p = \infty$, *а постоянная* c *зависит только от кривой* γ.

Доказательство. Существование интеграла (29) во всех точках $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ устанавливается аналогично тому, как при доказательстве теоремы 4 [1] установлено существование в тех же точках интеграла (14).

Для доказательства непрерывной продолжимости функции $f_{fl}^{\pm}$ на множество $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ рассмотрим точку $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ и точку $z_1 \in D_z^{\pm}$ такую, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \leq \frac{1}{2} |\mathrm{Im}\, z_0|$. Обозначим через z_2 одну из ближайших к z_1 точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma_1 := \left\{ t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \leq 2\varepsilon \right\} \cup \left\{ t \in \gamma_{z_0 z_2} : |t - z_0| \leq |\mathrm{Im}\, z_0| \right\},$$

$$\overline{\Gamma}_1 := \{ \bar{t} : t \in \Gamma_1 \}, \qquad \Gamma_1' := \gamma_{z_0 z_2} \setminus \Gamma_1, \qquad \Gamma_1'' := \gamma_{\bar{z}_0 \bar{z}_2} \setminus \overline{\Gamma}_1,$$

$$\Gamma_2 := \left\{ t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \leq |\mathrm{Im}\, z_0| \right\} \setminus \Gamma_1, \qquad \overline{\Gamma}_2 := \{ \bar{t} : t \in \Gamma_2 \},$$

$$\Gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus \left(\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_1' \cup \Gamma_1'' \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma}_2 \right)$$

и рассмотрим разность

$$f_{fl}^{\pm}(z_1) - f_{fl}^{\pm}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_0)}{\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma}_1} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_0)}{\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma}_1} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1'} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_0)}{\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1'} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1''} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_0)}{\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1''} \frac{f(t)(t - \mathrm{Re}\, z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(t)\left((t - \mathrm{Re}\, z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)} - (t - \mathrm{Re}\, z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}\right)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma}_2} \frac{f(t)\left((t - \mathrm{Re}\, z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)} - (t - \mathrm{Re}\, z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}\right)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3}\frac{f(t)\Big((t-\operatorname{Re}z_0)\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}-(t-\operatorname{Re}z_1)\Big(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\Big)^{\mp}\Big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\Big(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\Big)^{\mp}}dt =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{11} I_j. \qquad (32)$$

При оценке интеграла I_5 используется неравенство

$$\frac{|t-\operatorname{Re}z_0|}{\sqrt{|t-z_0||t-\overline{z}_0|}} \le \sqrt{2},$$

которое при $t\in\left\{t\in\gamma_{z_0z_2}:|t-z_0|\ge|\operatorname{Im}z_0|\right\}$ является следствием неравенств $|t-\operatorname{Re}z_0|\le 2|t-z_0|$ и $|t-\operatorname{Re}z_0|\le|t-\overline{z}_0|$. При этом получаем

$$|I_5| \le \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1'}|f(t)||dt| \le \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\|f\|_{L_p} l(z_0,z_2) \le c\|f\|_{L_p} d(z_0,z_2),$$

где постоянная c зависит только от кривой γ.

Аналогично оцениваются интегралы I_6, I_7 и I_8. Другие интегралы в равенстве (32) оцениваются подобно соответствующим интегралам из равенства (22).

Из оценок интегралов I_j, $j=1,2,\ldots,11$, следуют непрерывная продолжимость функции $f_{fl}^{\pm}$ на множество $\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1;b_2\}$ и равенство (29) для ее граничных значений, а также неравенство (30).

Докажем теперь равенство

$$f_{fl}^{\pm}(b_1) := \lim_{z\to b_1,\, z\in D_z^{\pm}} f_{fl}^{\pm}(z) = 0. \qquad (33)$$

Пусть точка $z_1\in D_z^{\pm}$ такая, что $\operatorname{Im}z\ne 0$ и $\delta:=|z-b_1|<(b_2-b_1)/3$. Обозначим через z_3 одну из ближайших к z точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества $\gamma_1:=\{t\in\partial D_z^{\pm}:|t-\operatorname{Re}z|\le 2|\operatorname{Im}z|,\ \operatorname{Im}t\operatorname{Im}z>0\}$, $\overline{\gamma}_1:=\{\overline{t}:\ t\in\gamma_1\}$, $\gamma_2:=(\{t\in\partial D_z^{\pm}:|t-b_1|\le 3\delta\}\cup\gamma_{z_3b_1}\cup\gamma_{\overline{z}_3b_1})\setminus(\gamma_1\cup\overline{\gamma}_1)$, $\gamma_3:=\partial D_z^{\pm}\setminus(\gamma_1\cup\overline{\gamma}_1\cup\gamma_2)$ и представим $f_{fl}^{\pm}(z)$ суммой четырех интегралов:

$$f_{fl}^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re}z}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\gamma}_1}f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re}z}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\right)dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re}z}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_3}\frac{f(t)\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}-(t-\operatorname{Re}z)\right)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}dt =: I_{12}+I_{13}+I_{14}+I_{15}. \qquad (34)$$

Обозначим $q:=\dfrac{p}{p-1}$, если $2<p<\infty$, и $q:=1$, если $p=\infty$.

Если $\gamma_1=\varnothing$, то $I_{12}=0$. Оценим I_{12} в предположении, что $\gamma_1\ne\varnothing$. В случае, когда $\min_{t\in\gamma}|t-z|\ge|\operatorname{Im}z|/2$, очевидным образом получаем оценку

$$|I_{12}| \le c\|f\|_{L_p}\theta(2|\operatorname{Im}z|) \le c\|f\|_{L_p}|\operatorname{Im}z|.$$

Здесь и далее в доказательстве через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от δ и z, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

ших к точке z точек границы $\partial D_z^{\pm}$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Из оценок (36), (37) очевидным образом следует неравенство (31), и доказательство теоремы завершено.

Теорема 7. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая симметрична относительно вещественной прямой и такая, что $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Пусть для функции $f : \partial D_z \to \mathbb{C}$ существует $\beta \in (0; 1)$ такое, что выполняется условие*

$$|f(z)| \le c\left(|z-b_1|^{-\beta} + |z-b_2|^{-\beta}\right) \quad \forall\, z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}, \tag{38}$$

где постоянная c не зависит от z.

Тогда функция $f_{fl}^{\pm}$ непрерывно продолжается из области $D_z^{\pm}$ на границу $\partial D_z^{\pm}$, а ее граничные значения $f_{fl}^{\pm}(z)$ при $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ выражаются формулой (29). При этом:

1) для каждой точки $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ существует $\delta(z_0) > 0$ такое, что при всех $z \in \partial D_z^{\pm}$, для которых $|z - z_0| < \delta(z_0)$, имеет место неравенство

$$\left|f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(z_0)\right| \le c\,\Omega_0(z_0, z), \tag{39}$$

в котором $\Omega_0(z_0, z) = (d(z_0, z))^{1-\beta}$ при $\beta > 1/2$ и $\Omega_0(z_0, z) = \sqrt{d(z_0, z)} + \sqrt{|z-z_0|}\ln\dfrac{1}{|z-z_0|}$ при $\beta \le 1/2$, а постоянная c зависит только от кривой γ и функции f;

2) для всех $z \in \partial D_z^{\pm}$, для которых $|z-b_j| < (b_2-b_1)/3$ при $j = 1$ или $j = 2$, имеет место неравенство

$$\left|f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_j)\right| \le c\left(d(z, b_j)\right)^{1-\beta}, \tag{40}$$

в котором постоянная c зависит только от кривой γ и функции f.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку $d(z_0, z) \to 0$ при $z_0 \in \gamma \setminus \{b_1; b_2\}$ и $|z - z_0| \to 0$, $z \in \gamma$, то для каждой точки $z_0 \in \gamma \setminus \{b_1; b_2\}$ существует положительное число $\delta(z_0)$ такое, что имеет место неравенство $d(z_0, z) < \frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|$ при всех $z \in \gamma$, для которых $|z - z_0| < \delta(z_0)$.

Теперь для доказательства непрерывной продолжимости функции $f_{fl}^{\pm}$ на множество $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ рассмотрим точку $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ и точку $z_1 \in D_z^{\pm}$ такую, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \le \frac{1}{4}\min\{2\delta(z_0), |\operatorname{Im} z_0|\}$. Обозначим через z_2 одну из ближайших к z_1 точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma_0 := \left\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_1| \le \frac{1}{2}|z_0 - b_1|\right\} \cup \left\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_2| \le \frac{1}{2}|z_0 - b_2|\right\},$$

$$\Gamma_1 := \left\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \le 2\varepsilon\right\} \cup \gamma_{z_0 z_2},$$

$$\overline{\Gamma}_1 := \{\bar{t} : t \in \Gamma_1\}, \qquad \Gamma_2 := \left\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|\right\} \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1),$$

$$\overline{\Gamma}_2 := \{\bar{t} : t \in \Gamma_2\},$$

$$\Gamma_0' := \left(\left\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_1| \le 2|z_0 - b_1|\right\}\right) \cup \left(\left\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_2| \le 2|z_0 - b_2|\right\}\right) \setminus$$
$$\setminus \left(\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma}_2\right),$$
$$\Gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus \left(\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \Gamma_0'\right)$$

и рассмотрим разность

$$f_{fl}^{\pm}(z_1) - f_{fl}^{\pm}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_0)}{\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}} dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\Gamma}_1} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_0)}{\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\Gamma}_1} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}} dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{f(t)\left((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}\right)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(t)\left((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}\right)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\Gamma}_2} \frac{f(t)\left((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}\right)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0'} \frac{f(t)\left((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}\right)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{f(t)\left((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}\right)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt =:$$
$$=: \sum_{j=16}^{24} I_j .$$

Учитывая условие (38), по аналогии с оценкой (35) и оценкой соответствующего интеграла при доказательстве теоремы 1 из [2] получаем неравенства

$$|I_{16}| \le c\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}\left(|z_0 - b_1|^{-\beta} + |z_0 - b_2|^{-\beta}\right) \int\limits_0^{2\varepsilon + d(z_0, z_2)} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \le$$
$$\le c\left(\min\left\{|z_0 - b_1|, |z_0 - b_2|\right\}\right)^{1/2-\beta} \sqrt{2\varepsilon + d(z_0, z_2)}.$$

Здесь и далее в доказательстве через c обозначены постоянные (различные даже в пределах одной цепочки неравенств), значения которых зависят только от кривой γ и функции f.

Таким же способом, как и $|I_{16}|$, оцениваются модули интегралов I_{17}, I_{18} и I_{19}.

При оценке интегралов I_{20}, I_{21}, I_{22}, I_{23} и I_{24} используется неравенство

$$\left|(t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}\right| \le$$
$$\le c\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}\sqrt{|t - z_0||t - \overline{z}_0|} + |t - \operatorname{Re} z_1|\sqrt{|t - z_1| + |t - \overline{z}_0|}\right), \qquad (41)$$

которое имеет место при всех $t \in \partial D_z^{\pm} \setminus \left(\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_1\right)$. Здесь c — некоторая абсолютная постоянная.

Учитывая также условие (38), по аналогии с оценкой (35) получаем оценки

$$|I_{20}| \le c\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{|z_0-b_1|}}\int\limits_0^{|z_0-b_1|}\tau^{-\beta}d\tau+\frac{1}{\sqrt{|z_0-b_2|}}\int\limits_0^{|z_0-b_2|}\tau^{-\beta}d\tau\right) \le$$

$$\le c\max\left\{|z_0-b_1|^{1/2-\beta}, |z_0-b_2|^{1/2-\beta}\right\}\sqrt{\varepsilon},$$

$$|I_{23}| \le c\sqrt{\varepsilon}\left(|z_0-b_1|^{-\beta}+|z_0-b_2|^{-\beta}\right)\int\limits_{\Gamma_0'}\frac{|dt|}{\sqrt{|t-z_0|}} \le$$

$$\le c\max\left\{|z_0-b_1|^{1/2-\beta}, |z_0-b_2|^{1/2-\beta}\right\}\sqrt{\varepsilon},$$

$$|I_{24}| \le c\sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{|z_0-b_1|}^{d}\tau^{-1/2-\beta}\,d\tau+\int\limits_{|z_0-b_2|}^{d}\tau^{-1/2-\beta}\,d\tau\right),$$

где $d := \max_{t,\,z\in\gamma}|t-z|$.

С учетом условия (38) подобно оценке (35) и оценке соответствующего интеграла при доказательстве теоремы 1 из [2] получаем неравенства

$$|I_{21}| \le c\sqrt{\varepsilon}\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}\left(|z_0-b_1|^{-\beta}+|z_0-b_2|^{-\beta}\right)\int\limits_{\varepsilon}^{|\operatorname{Im} z_0|}\frac{d\tau}{\tau} \le$$

$$\le c\left(\min\{|z_0-b_1|, |z_0-b_2|\}\right)^{1/2-\beta}\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{|\operatorname{Im} z_0|}{\varepsilon}.$$

Такая же оценка имеет место и для модуля интеграла I_{22}.

Из оценок интегралов I_j, $j = 16, 17, \ldots, 24$, следуют непрерывная продолжимость функции $f_{fl}^{\pm}$ на множество $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ и равенство (29) для ее граничных значений, а также неравенство (39).

Докажем теперь равенство (33) и неравенство (40) при $j = 1$. С этой целью рассмотрим точку $z \in D_z^{\pm}$ такую, что $\operatorname{Im} z \ne 0$ и $\delta := |z-b_1| < (b_2-b_1)/3$. Обозначим через z_3 одну из ближайших к z точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\gamma_0 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t-b_1| \le \delta/2\},$$

$$\gamma_1 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t-\operatorname{Re} z| < 2|\operatorname{Im} z|, \operatorname{Im} t\operatorname{Im} z > 0\} \setminus \gamma_0,$$

$$\overline{\gamma}_1 := \{\bar{t} : t \in \gamma_1\},$$

$$\gamma_2 := (\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t-b_1| \le 3\delta\} \cup \gamma_{z_3 b_1} \cup \gamma_{\bar{z}_3 b_1}) \setminus (\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \overline{\gamma}_1),$$

$$\gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus (\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \overline{\gamma}_1 \cup \gamma_2)$$

и представим $f_{fl}^{\pm}(z)$ суммой пяти интегралов:

$$f_{fl}^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right)dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\gamma}_1} f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(t)\left(1-\frac{t-\operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\right)dt\,+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{f(t)\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}-(t-\operatorname{Re} z)\right)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}dt \;=:\; I_{25}+I_{26}+I_{27}+I_{28}+I_{29}.$$

Интеграл I_{25} оценивается аналогично интегралу I_{20}, а интегралы I_{26}, I_{27}, I_{28} и I_{29} оцениваются с учетом условия (38) подобно тому, как при доказательстве теоремы 6 оценены интегралы I_{12}, I_{13}, I_{14} и I_{15} соответственно. Из оценок интегралов I_{25}, I_{26}, I_{27}, I_{28}, I_{29} следуют равенство (33) и неравенство (40) при $j=1$. Аналогично устанавливается неравенство (40) и при $j=2$. Теорема доказана.

В случае, когда кривая γ ограничивает область, пересечение которой с полуплоскостью $\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im} z>0\}$ является k-областью, оценки (30), (31), (39), (40) уточняются. При этом справедливы следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая симметрична относительно вещественной прямой и такая, что $\theta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$. Пусть при этом область $\{z\in D_z^+:\ \operatorname{Im} z>0\}$ (или $\{z\in D_z^-:\ \operatorname{Im} z>0\}$) является k-областью. Если $f\in L_p(\gamma)$, $2<p\le\infty$, то для модуля непрерывности функции f_{fl}^+ (соответственно, f_{fl}^-) при любом $\varepsilon\ge 0$ имеет место оценка*

$$\omega\left(f_{fl}^{\pm},\partial D_z^{\pm},\varepsilon\right)\;\le\; c\|f\|_{L_p}\,\omega(\varepsilon),\tag{42}$$

где $\omega(\varepsilon)=\varepsilon^{(p-2)/2p}$ при $2<p<\infty$ и $\omega(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ при $p=\infty$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Доказательство. Уточним сначала оценку (30) с учетом того, что область $\{z\in D_z^+:\ \operatorname{Im} z>0\}$ (или $\{z\in D_z^-:\ \operatorname{Im} z>0\}$) является k-областью.

Пусть $z_0\in\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1;b_2\}$, а точка $z_1\in\partial D_z^{\pm}$ такая, что $\varepsilon:=|z_1-z_0|\le\le\frac{1}{2k}|\operatorname{Im} z_0|$. Представим приращение функции $f_{fl}^{\pm}$ в точке z_0 равенством (32), в котором

$$\Gamma_1\;:=\;\left\{t\in\partial D_z^{\pm}:|t-z_0|\le 2k\varepsilon\right\},$$

$$\overline{\Gamma}_1\;:=\;\{\overline{t}:\,t\in\Gamma_1\},\qquad \Gamma_1'\;=\;\Gamma_1''\;=\;\varnothing,$$

$$\Gamma_2\;:=\;\left\{t\in\partial D_z^{\pm}:2k\varepsilon<|t-z_0|\le|\operatorname{Im} z_0|\right\},\qquad \overline{\Gamma}_2\;:=\;\{\overline{t}:\,t\in\Gamma_2\},$$

$$\Gamma_3\;:=\;\partial D_z^{\pm}\setminus\left(\Gamma_1\cup\overline{\Gamma}_1\cup\Gamma_2\cup\overline{\Gamma}_2\right),$$

а вместо выражения $\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}$ содержатся граничные значения $\left(\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\right)^{\mp}$.

Поскольку область $\{z\in D_z^{\pm}:\ \operatorname{Im} z>0\}$ является k-областью, то имеет место неравенство (27), с учетом которого легко получаем неравенство (41) при всех $t\in\partial D_z^{\pm}\setminus\left(\Gamma_1\cup\overline{\Gamma}_1\right)$. Далее аналогично оценке (30) получаем неравенство

$$\left|f_{fl}^{\pm}(z_1)-f_{fl}^{\pm}(z_0)\right|\;\le\; c\|f\|_{L_p}\,\omega(\varepsilon),\tag{43}$$

в котором постоянная c зависит только от кривой γ.

Уточним еще оценку (36) модуля граничных значений функции $f_{fl}^{\pm}(z)$ в окрестности точки b_1. С этой целью рассмотрим точку $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1\}$ такую, что $\delta := \min\{|z-b_1|, |z-b_2|\} < \dfrac{b_2-b_1}{3k}$. Представим $f_{fl}^{\pm}(z)$ равенством (34), в котором

$$\gamma_1 := \{ t \in \partial D_z^{\pm} : |t - \operatorname{Re} z| < 2|\operatorname{Im} z|, \operatorname{Im} t \operatorname{Im} z > 0 \},$$

$$\overline{\gamma}_1 := \{ \overline{t};\ t \in \gamma_1 \},$$

$$\gamma_2 := \{ t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_1| \le 3k\delta \} \setminus (\gamma_1 \cup \overline{\gamma}_1),$$

$$\gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus (\gamma_1 \cup \overline{\gamma}_1 \cup \gamma_2),$$

а вместо выражения $\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}$ содержатся граничные значения $\left(\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\right)^{\mp}$. При условии, что область $\{ z \in D_z^{\pm} :\ \operatorname{Im} z > 0 \}$ является k-областью, аналогично оценке (27) устанавливается неравенство $\left| \left(\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\right)^{\mp} - (t - \operatorname{Re} z) \right| \le c|\operatorname{Im} z|$ для всех $t \in \gamma_3$, в котором c — некоторая абсолютная постоянная. Далее подобно оценке (36) получаем неравенство

$$\left| f_{fl}^{\pm}(z) \right| \le c \| f \|_{L_p} \omega_1(\delta),$$

в котором $\omega_1(\delta) := \delta^{(p-1)/p}$ при $2 < p < \infty$ и $\omega_1(\delta) := \delta \ln \dfrac{1}{\delta}$ при $p = \infty$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Аналогично оценивается модуль разности $f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_2)$ в окрестности точки b_2 и уточняется оценка (37).

В результате внесенных здесь уточнений в оценки (36), (37) установлено неравенство

$$\left| f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_j) \right| \le c \| f \|_{L_p} \omega_1(\delta) \tag{44}$$

при $j = 1$ или $j = 2$ и всех $z \in D_z^{\pm}$ таких, что $|z - b_j| < \dfrac{b_2 - b_1}{3k}$. Здесь постоянная c зависит только от кривой γ.

Перейдем теперь к доказательству оценки (42). Пусть $0 < \varepsilon < \dfrac{b_2 - b_1}{3k(2k+1)}$. Рассмотрим точки $z_0, z_1 \in \partial D_z^{\pm}$, для которых $|z_1 - z_0| = \varepsilon$, и следующие случаи их расположения относительно вещественной прямой.

В случае, когда $|\operatorname{Im} z_0| \ge 2k\varepsilon$, имеет место оценка (43).

Если $|z_0 - b_j| < 2k\varepsilon$ при $j = 1$ или $j = 2$, то, учитывая неравенство (44), получаем

$$\left| f_{fl}^{\pm}(z_1) - f_{fl}^{\pm}(z_0) \right| \le \left| f_{fl}^{\pm}(z_1) - f_{fl}^{\pm}(b_j) \right| + \left| f_{fl}^{\pm}(z_0) - f_{fl}^{\pm}(b_j) \right| \le$$

$$\le c \| f \|_{L_p} \omega_1((2k+1)\varepsilon) \le c \| f \|_{L_p} \omega_1(\varepsilon),$$

где постоянные c зависят только от кривой γ.

Наконец, в случае, когда $\min\{|z_0 - b_1|, |z_0 - b_2|\} \ge 2k\varepsilon > |\operatorname{Im} z_0|$, аналогично оценке (44) устанавливаются неравенства

$$\left| f_{fl}^{+}(z_1) - f_{fl}^{+}(z_0) \right| \le \left| f_{fl}^{+}(z_1) \right| + \left| f_{fl}^{+}(z_0) \right| \le c \| f \|_{L_p} \omega_1((2k+1)\varepsilon) \le c \| f \|_{L_p} \omega_1(\varepsilon),$$

если область $\{z \in D_z^+ : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью, или неравенства

$$\left|f_{fl}^-(z_1) - f_{fl}^-(z_0)\right| \le \left|f_{fl}^-(z_1) - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma'} f(t)\,dt\right| + \left|f_{fl}^-(z_0) - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma'} f(t)\,dt\right| \le$$

$$\le c\|f\|_{L_p}\omega_1((2k+1)\varepsilon) \le c\|f\|_{L_p}\omega_1(\varepsilon),$$

если область $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью. Здесь $\Gamma' := \Gamma_{z_0\bar{z}_0}^{\gamma} \cap \Gamma_{z_1\bar{z}_1}^{\gamma}$, ориентация множества Γ' индуцирована ориентацией границы ∂D_z^-, а постоянные c зависят только от кривой γ.

Очевидным следствием полученных здесь оценок является неравенство (42), и доказательство теоремы завершено.

Теорема 9. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая симметрична относительно вещественной прямой и такая, что* $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. *Пусть при этом область* $\{z \in D_z^+ : \operatorname{Im} z > 0\}$ (*или* $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} z > 0\}$) *является k-областью, а для функции* $f\colon \partial D_z \to \mathbb{C}$ *существует* $\beta \in (0;1)$ *такое, что выполняется условие* (38). *Тогда для модуля непрерывности функции* f_{fl}^+ (*соответственно,* f_{fl}^-) *при любом* $\varepsilon \ge 0$ *имеет место оценка*

$$\omega\left(f_{fl}^{\pm}, \partial D_z^{\pm}, \varepsilon\right) \le c\,\omega_0(\varepsilon),$$

где $\omega_0(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta}$ *при* $\beta > 1/2$ *и* $\omega_0(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ *при* $\beta \le 1/2$, *а постоянная c зависит только от кривой γ и функции f.*

Это утверждение доказывается по схеме доказательства теоремы 7. При этом с учетом того, что область $\{z \in D_z^+ : \operatorname{Im} z > 0\}$ (или $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} z > 0\}$) является k-областью, уточняются оценки (39) и (40) аналогично тому, как при доказательстве теоремы 8 сделано уточнение оценок (30) и (31).

В заключение отметим, что теоремы 8, 9 распространяют утверждения теорем 2, 3 работы [2] на области более общего вида.

1. *Плакса С. А.* Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 631 – 646.
2. *Плакса С. А.* Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 492–511.

Получено 05.04.2000