УДК 517.95

М. І. Іванчов, Н. В. Пабирівська (Львів. ун-т)

ОДНОЧАСНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ДВОХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ У ВИПАДКУ НЕЛОКАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ УМОВ

We establish conditions for the existence and uniqueness of the solution of inverse problem for a parabolic equation with two unknown time-dependent coefficients in the case of nonlocal boundary conditions and integral overdetermination conditions.

Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з двома невідомими коефіцієнтами, що залежать від часу, у випадку нелокальних крайових умов та інтегральних умов перевизначення.

В обернених задачах з багатьма невідомими параметрами виникає проблема задання потрібної кількості незалежних додаткових умов, так званих умов перевизначення. Одним із можливих шляхів розв'язання цієї проблеми є використання моментів. Спробу розв'язати пряму задачу теплопровідності, задаючи теплові моменти замість крайових умов, було зроблено в [1]. У цій роботі теплові моменти разом з нелокальними крайовими умовами використовуються при визначенні двох залежних від часу невідомих коефіцієнтів у параболічному рівнянні, причому один з них є старшим. Єдиність розв'язку задачі визначення двох старших коефіцієнтів у нелінійному рівнянні теплопровідності досліджено в [2]. Умови, що дозволяють одночасно знайти залежні від часу коефіцієнти теплопровідності та об'ємної теплоємності, встановлено в роботах [3, 4].

1. Постановка задачі. В області $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + c(t)u + f(x, t) \tag{1}$$

з двома невідомими коефіцієнтами $a(t)$, $c(t)$, початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h], \tag{2}$$

нелокальними крайовими умовами

$$\sum_{j=1}^{4} \beta_{ij} u_j(t) = \mu_i(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

де

$$u_1(t) = u(0, t), \quad u_2(t) = u(h, t), \quad u_3(t) = u_x(0, t), \quad u_4(t) = u_x(h, t),$$

і заданими тепловими моментами

$$\int_0^h x^i u(x, t)\,dx = \nu_i(t), \quad i = 0, 1, \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Коли функція $a(t)$ відома, а саме $a(t) \equiv 1$, то задачу (1) – (3) з умовою

$$\int_0^{s(t)} u(x, t)\,dx = E(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < a(t) < h,$$

розглянуто в [5].

Означення. *Розв'язком оберненої задачі* (1) – (4) *будемо називати трійку функцій* $(a(t), c(t), u(x, t))$ *з класу* $C[0, T] \times C[0, T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ [6], *що задовольняють умови* (1) – (4), *причому* $a(t) > 0$ *на проміжку* $[0, T]$.

2. Існування розв'язку. Зведемо задачу (1)–(4) до системи рівнянь відносно $a(t)$ і $c(t)$. Домножаючи рівняння (1) на x^i, $i = 0, 1$, інтегруючи по x від 0 до h і беручи до уваги умову (4), отримуємо

$$u_3(t) - u_4(t) = \mu_3(t), \quad -u_1(t) + u_2(t) - hu_4(t) = \mu_4(t), \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

де

$$\mu_{3+i} = \left(\int_0^h x^i f(x,t)\,dx - \nu_i'(t) + \nu_i(t)c(t) \right) \frac{1}{a(t)}, \quad i = 0, 1. \tag{6}$$

Об'єднуючи умови (3) і (5), приходимо до системи рівнянь

$$BU(t) = M(t), \tag{7}$$

де $U = \operatorname{colon}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $M = \operatorname{colon}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$,

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -h \end{pmatrix}.$$

Припускаючи матрицю B невиродженою і позначаючи елементи оберненої матриці B^{-1} через γ_{ij}, з системи (7) знаходимо

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij}\mu_j(t), \quad i = \overline{1,4}, \quad t \in [0, T]. \tag{8}$$

Отже, у випадку $\det B \neq 0$ сукупність нелокальних умов (3) і умов з моментами (4) рівносильна чотирьом крайовим умовам (8), що містять невідомі коефіцієнти $a(t)$ і $c(t)$.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi(x) \in C^1[0, h]$; $\mu_i(t) \in C[0, T]$, $i = 1, 2$; $\nu_i(t) \in C^1[0, T]$, $i = 0, 1$; $f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$;

2) $\beta_{i1}\varphi(0) + \beta_{i2}\varphi(h) + \beta_{i3}\varphi'(0) + \beta_{i4}\varphi'(h) = \mu_i(0)$, $i = 1, 2$;

$$\int_0^h x^i \varphi(x)\,dx = \nu_i(0), \quad i = 0, 1;$$

3) $\det B \neq 0$, $\gamma_{13}\gamma_{24} - \gamma_{14}\gamma_{23} \neq 0$;

4) $\varphi(x) > 0$, $x \in [0, h]$; $\varphi(x) - \varphi(h - x) \geq 0$, $x \in [0, h/2]$; $\nu_0(t) \neq 0$, $\gamma_{13}\nu_0(t) + \gamma_{14}\nu_1(t) \geq 0$, $(\gamma_{23} - \gamma_{13})\nu_0(t) + (\gamma_{24} - \gamma_{14})\nu_1(t) > 0$,

$$\left(\nu_0(t)\nu_1'(t) - \nu_0'(t)\nu_1(t) + \int_0^h (\nu_1(t) - x\nu_0(t))\, f(x,t)\,dx \right)(\gamma_{13}\gamma_{24} - \gamma_{14}\gamma_{23}) > 0,$$

$$((\gamma_{13}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{23})\mu_1(t) + (\gamma_{13}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{23})\mu_2(t))\nu_0(t) +$$

$$+ ((\gamma_{14}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{24})\mu_1(t) + (\gamma_{14}\gamma_{21} - \gamma_{12}\gamma_{24})\mu_2(t))\nu_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

Тоді існує розв'язок задачі (1)–(4) *при* $x \in [0, h]$, $t \in [0, t_0]$, *де число* t_0, $0 < t_0 \leq T$, *визначається вихідними даними.*

Доведення. Припускаючи, що нам відомі неперервні функції $a(t) > 0$ і $c(t)$, за допомогою функції Гріна $G(x, t, \xi, \tau)$ [7] будуємо розв'язок задачі (1), (2), що задовольняє умови

$$u_x(0, t) = \sum_{j=1}^{4}\gamma_{3j}\mu_j(t), \quad u_x(h, t) = \sum_{j=1}^{4}\gamma_{4j}\mu_j(t), \quad t \in [0, T]. \tag{9}$$

Враховуючи позначення (6), отримуємо

$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & \int_0^h G(x, t, \xi, 0)\varphi(\xi)\,d\xi \exp\left(\int_0^t c(\sigma)\,d\sigma\right) - \\ & - \int_0^t\left(\gamma_{33}\left(\int_0^h f(y, \tau)\,dy - \nu_0'(\tau)\right) + \gamma_{34}\left(\int_0^h x f(y, \tau)\,dy - \nu_1'(\tau)\right) + \right. \\ & \left. + (\gamma_{31}\mu_1(\tau) + \gamma_{32}\mu_2(\tau))a(\tau) + (\gamma_{33}\nu_0(\tau) + \gamma_{34}\nu_1(\tau))c(\tau)\right) G(x, t, 0, \tau) \times \\ & \times \exp\left(\int_\tau^t c(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau + \int_0^t\left(\gamma_{43}\left(\int_0^h f(y, \tau)\,dy - \nu_0'(\tau)\right) + \right. \\ & + \gamma_{44}\left(\int_0^h x f(y, \tau)\,dy - \nu_1'(\tau)\right) + (\gamma_{41}\mu_1(\tau) + \gamma_{42}\mu_2(\tau))a(\tau) + \\ & \left. + (\gamma_{43}\nu_0(\tau) + \gamma_{44}\nu_1(\tau))c(\tau)\right) G(x, t, h, \tau) \exp\left(\int_\tau^t c(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau + \\ & + \int_0^t\int_0^h G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau) \exp\left(\int_\tau^t c(\sigma)\,d\sigma\right)d\xi\,d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Беручи до уваги позначення (6) і використовуючи умову 3 теореми, з перших двох умов (8) знаходимо

$$a(t) = \frac{(\gamma_{13}\gamma_{24} - \gamma_{14}\gamma_{23})\kappa_0(t)}{R(t, a(t), c(t))}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} c(t) = {} & \left(\nu_0'(t) - \int_0^h f(x, t)\,dx + a(t)\left(\kappa_2(t) + \gamma_{24}u(0, t) - \gamma_{14}u(h, t)\right)\right) \times \\ & \times \frac{1}{(\gamma_{13}\gamma_{24} - \gamma_{14}\gamma_{23})\nu_0(t)}, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned} \kappa_0(t) = {} & \nu_0(t)\nu_1'(t) - \nu_0'(t)\nu_1(t) + \int_0^h (\nu_1(t) - x\nu_0(t)) f(x, t)\,dx, \\ \kappa_1(t) = {} & ((\gamma_{13}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{23})\mu_1(t) + (\gamma_{13}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{23})\mu_2(t))\nu_0(t) + \\ & + ((\gamma_{14}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{24})\mu_1(t) + (\gamma_{14}\gamma_{21} - \gamma_{12}\gamma_{24})\mu_2(t))\nu_1(t), \\ \kappa_2(t) = {} & (\gamma_{14}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{24})\mu_1(t) + (\gamma_{14}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{24})\mu_2(t), \\ R(t, a(t), c(t)) = {} & \kappa_1(t) + (\gamma_{23}\nu_0(t) + \gamma_{24}\nu_1(t))u(0, t) - \\ & - (\gamma_{13}\nu_0(t) + \gamma_{14}\nu_1(t))u(h, t). \end{aligned} \tag{13}$$

До системи рівнянь (11), (12) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Використовуючи відомі оцінки функції Гріна [7], з (10) знаходимо

$$|u(x,t)| \le C_1 \exp\left(\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right) + C_2\int_0^t (1+a(\tau)+|c(\tau)|) \times \\ \times \left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right)\exp\left(\int_\tau^t |c(\sigma)|d\sigma\right)d\tau, \tag{14}$$

де сталі $C_1 > 0$, $C_2 \ge 0$ виражаються через відомі величини.

Встановимо додатність $a(t)$. Оскільки $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in [0,h]$, з умови 4 теореми випливає існування деякого проміжку $[0, t_0]$, $0 < t_0 \le T$, на якому $u(0,t) > 0$, $u(0,t) - u(h,t) \ge 0$ (число t_0 буде визначено нижче). Подамо $R(t, a(t), c(t))$ у вигляді

$$R(t,a(t),c(t)) = \kappa_1(t) + ((\gamma_{23}-\gamma_{13})\nu_0(t) + (\gamma_{24}-\gamma_{14})\nu_1(t))u(0,t) + \\ + (\gamma_{13}\nu_0(t)+\gamma_{14}\nu_1(t))(u(0,t)-u(h,t)).$$

Тоді внаслідок умови 4 теореми $R(t, a(t), c(t)) > 0$ при $t \in [0, t_0]$, що дає можливість з рівняння (11) встановити нерівність

$$a(t) \le C_3 \exp\left(\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right), \quad t \in [0, t_0]. \tag{15}$$

Застосовуючи оцінки (14), (15), з (12) знаходимо

$$|c(t)| \le C_4 + C_5\exp\left(\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right) + a(t)\exp\left(\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right)\Bigg(C_6 + \\ + C_7\int_0^t (1+a(\tau)+|c(\tau)|)\left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right)\exp\left(-\int_0^\tau |c(\sigma)|d\sigma\right)d\tau\Bigg).$$

Зведемо дану нерівність до вигляду

$$|c(t)|\exp\left(-\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right) \le C_8 + a(t)\Bigg(C_9 + C_{10}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + \\ + C_{11}\int_0^t \left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right)|c(\tau)|\exp\left(-\int_0^\tau |c(\sigma)|d\sigma\right)d\tau\Bigg). \tag{16}$$

Позначимо

$$v(t) = |c(t)|\exp\left(-\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right). \tag{17}$$

З (16) для функції $v(t)$ отримуємо

$$v(t) \le C_8 + a(t)\left(C_9 + C_{10}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{11}\int_0^t v(\tau)d\tau + C_{11}\int_0^t \frac{v(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right).$$

Застосовуючи дану нерівність для оцінки інтеграла $\int_0^t \frac{v(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, зводимо її до вигляду

$$v(t) \le C_8 + a(t)\left(C_{12} + C_{14}\sqrt{\theta(t)} + C_{13}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + \right.$$

$$\left. + \left(C_{11} + C_{16}\sqrt{\theta(t)}\right)\int_0^t v(\tau)d\tau\right). \tag{18}$$

Методом, що використовується при доведенні леми Гронуолла, легко переконатись у справедливості наступного твердження.

Лема. *Якщо неперервна на* $[0, T]$ *функція* $v(t) \ge 0$ *задовольняє нерівність*

$$v(t) \le p(t) + q(t)\int_0^t v(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T],$$

з неперервними на $[0, T]$ *функціями* $p(t) \ge 0$, $q(t) > 0$, *то для* $v(t)$ *має місце оцінка*

$$v(t) \le p(t) + q(t)\int_0^t p(\tau)\exp\left(\int_\tau^t q(\sigma)d\sigma\right)d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Застосовуючи лему до нерівності (18), отримуємо оцінку

$$v(t) \le C_8 + C_{13}a(t)\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + a(t)r_1(\theta(t)), \quad t \in [0, t_0], \tag{19}$$

з відомою неперервною функцією $r_1(s)$, визначеною при $s \ge 0$. Повертаючись в (19) до невідомої функції $c(t)$ згідно з формулою (17) та інтегруючи отриману нерівність, знаходимо

$$\exp\left(\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right) \le \left(1 - C_8 t - r_2(\theta(t))\right)^{-1}, \tag{20}$$

де $r_2(s) \ge 0$ — відома неперервна на $[0, \infty)$ функція така, що $r_2(0) = 0$. Застосування (15) дає можливість перейти від нерівності (20) до нерівності

$$a(t) \le C_3\left(1 - C_8 t - r_2(\theta(t))\right)^{-1},$$

яка, в свою чергу, зводиться до вигляду

$$a(t) \le C_3\left(\frac{1}{2} - r_2(\theta(t))\right)^{-1}, \quad t \in [0, t_0], \tag{21}$$

якщо вважати, що число t_0, $0 < t_0 \le T$, задовольняє умову

$$0 < t_0 \le \frac{1}{2C_8}. \tag{22}$$

З (21) отримуємо

$$r_3(\theta(t)) \le C_3 t, \tag{23}$$

де $r_3(s) = \int_0^s (1/2 - r_2(z))dz$.

Позначимо через s_0 таке число, що $1/2 - r_2(s) \ge 0$ на $[0, s_0]$. Зауважимо, що s_0 залежить від відомих величин. Тоді існує функція $r_3^{-1}(s)$, обернена до

$r_3(s)$ і визначена на проміжку $[0, R_0]$, де $R_0 = r_3(s_0)$. Це дає можливість отримати з (23) оцінку

$$\theta(t) \leq r_3^{-1}(C_3 t) \leq \Theta_0, \quad t \in [0, t_0], \tag{24}$$

якщо число t_0 крім умови (22) задовольняє умову

$$0 < C_3 t_0 \leq R_0. \tag{25}$$

Внаслідок (24) з нерівності (21) отримуємо оцінку

$$a(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0, t_0], \tag{26}$$

застосовуючи яку до (20), одержуємо

$$|c(t)| \leq C_0 < \infty, \quad t \in [0, t_0]. \tag{27}$$

Наявність оцінок (26), (27) дає можливість з (11) отримати оцінку для $a(t)$ знизу

$$a(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, t_0], \tag{28}$$

так, як це зроблено в [7].

Отже, припускаючи, що $u(0, t) > 0$, $u(0, t - u(h, t) \geq 0$ при $t \in [0, t_0]$ і число t_0 задовольняє умови (22), (25), отримуємо оцінки (26)–(28). Наявність цих оцінок дає змогу, в свою чергу, визначити довжину проміжку, на якому мають місце нерівності $u(0, t) > 0$, $u(0, t) - u(h, t) \geq 0$. Для цього достатньо зауважити, що перший доданок в (10) є більшим деякого додатного числа при всіх $t \in [0, T]$, а всі інші доданки оцінюються деяким відомим (завдяки оцінкам (26)–(28)) виразом, який при $t = 0$ перетворюється в нуль. Подальша перевірка виконання умов теореми Шаудера здійснюється аналогічно до роботи [7], звідки випливає існування розв'язку системи рівнянь (26)–(28) на проміжку $[0, t_0]$, де число t_0 визначається за допомогою відомих величин.

Отже, теорему доведено.

3. Єдиність розв'язку.

Теорема 2. *Якщо крім умови* 3 *теореми* 1 *виконується умова*

$$\nu_0(t)\nu_1'(t) - \nu_0'(t)\nu_1(t) + \int_0^h (\nu_1(t) - x\nu_0(t) f(x, t))\,dx \neq 0, \quad t \in [0, T], \tag{29}$$

то розв'язок задачі (1)–(4) *єдиний.*

Доведення. Припускаючи, що $(a_i(t), c_i(t), u_i(x, t))$, $i = 1, 2$, — два розв'язки задачі (1)–(4), для їх різниці $b(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $d(t) = c_1(t) - c_2(t)$, $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ отримуємо

$$v_t = a_1(t) v_{xx} + c_1(t) v + b(t) u_{2xx}(x, t) + d(t) u_2(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{30}$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \beta_{ij} v_j(t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T], \tag{32}$$

$$\int_0^h x^i v(x, t)\,dx = 0, \quad i = 0, 1, \quad t \in [0, T], \tag{33}$$

де позначення v_i, $i = \overline{1, 4}$, аналогічні позначенням u_i з умови (3). Застосовуючи умови (33), з рівняння (30) отримуємо

$$v_3(t) - v_4(t) = w_3(t), \quad -v_1(t) + v_2(t) - hv_4(t) = w_4(t), \quad t \in [0, T], \tag{34}$$

де

$$w_3(t) = \frac{b(t)}{a_1(t)}(u_{2x}(h, t) - u_{2x}(0, t)) + \frac{\nu_0(t)}{a_1(t)}d(t),$$

$$w_4(t) = \frac{b(t)}{a_1(t)}(hu_{2x}(h, t) - u_2(h, t) + u_2(0, t)) + \frac{\nu_1(t)}{a_1(t)}d(t). \tag{35}$$

Беручи до уваги припущення $\det B \neq 0$, з умов (32), (34) знаходимо

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij} w_j(t), \quad i = \overline{1, 4}, \quad t \in [0, T], \tag{36}$$

де $w_1(t) = w_2(t) = 0$, а $w_3(t)$, $w_4(t)$ визначені за формулою (35). Використовуючи функцію Гріна $G(x, t, \xi, \tau)$ для рівняння (30) з умовами

$$v_x(0, t) = \gamma_{33} w_3(t) + \gamma_{34} w_4(t),$$

$$v_x(h, t) = \gamma_{43} w_3(t) + \gamma_{44} w_4(t), \quad t \in [0, T], \tag{37}$$

знаходимо розв'язок задачі (30), (31), (37):

$$v(x, t) = -\int_0^t (\gamma_{33} w_3(\tau) + \gamma_{34} w_4(\tau)) a_1(\tau) G(x, t, 0, \tau) \exp\left(\int_\tau^t c_1(\sigma) d\sigma\right) d\tau +$$

$$+ \int_0^t (\gamma_{43} w_3(\tau) + \gamma_{44} w_4(\tau)) a_1(\tau) G(x, t, h, \tau) \exp\left(\int_\tau^t c_1(\sigma) d\sigma\right) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h G(x, t, \xi, \tau) \left(b(\tau) u_{2\xi\xi}(\xi, \tau) + d(\tau) u_2(\xi, \tau)\right) \exp\left(\int_\tau^t c_1(\sigma) d\sigma\right) d\xi\, d\tau. \tag{38}$$

Перші дві умови в (36) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \gamma_{13} w_3(t) + \gamma_{14} w_4(t), \\ v(h, t) &= \gamma_{23} w_3(t) + \gamma_{24} w_4(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{39}$$

Підставляючи в (39) замість $w_3(t)$, $w_4(t)$ їх значення з формул (35), отримуємо систему рівнянь відносно $b(t)$ і $d(t)$:

$$\begin{aligned} &(\gamma_{13}(u_{2x}(h, t) - u_{2x}(0, t)) + \gamma_{14}(hu_{2x}(h, t) - u_2(h, t) + u_2(0, t)))b(t) + \\ &\quad + (\gamma_{13}\nu_0(t) + \gamma_{14}\nu_1(t))d(t) = a_1(t)v(0, t), \\ &(\gamma_{23}(u_{2x}(h, t) - u_{2x}(0, t)) + \gamma_{24}(hu_{2x}(h, t) - u_2(h, t) + u_2(0, t)))b(t) + \\ &\quad + (\gamma_{23}\nu_0(t) + \gamma_{24}\nu_1(t))d(t) = a_1(t)v(h, t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{40}$$

Зважаючи на те, що з рівняння (1) та умов (4), які задовольняє функція $u_2(x, t)$, випливають співвідношення

$$u_{2x}(h, t) - u_{2x}(0, t) = \frac{1}{a_2(t)}\left(\nu_0'(t) - \nu_0(t) c_2(t) - \int_0^h f(x, t) dx\right),$$

$$hu_{2x}(h, t) - u_2(h, t) + u_2(0, t) = \frac{1}{a_2(t)}\left(\nu_1'(t) - \nu_1(t) c_2(t) - \int_0^h x f(x, t) dx\right),$$

обчислимо визначник δ системи рівнянь (40):

$$\delta = \frac{\gamma_{13}\gamma_{24} - \gamma_{14}\gamma_{23}}{a_2(t)}\left(\nu_0'(t)\nu_1(t) - \nu_0(t)\nu_1'(t) + \int_0^h (x\nu_0(t) - \nu_1(t))\,f(x,t)\,dx\right).$$

Зроблені в теоремі припущення забезпечують виконання умови $\delta \neq 0$, що дає можливість звести систему (40) до однорідної системи інтегральних рівнянь Вольтерра

$$b(t) = \int_0^t (K_{11}(t,\tau)b(\tau) + K_{12}(t,\tau)d(\tau))\,d\tau,$$

$$d(t) = \int_0^t (K_{21}(t,\tau)b(\tau) + K_{22}(t,\tau)d(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{41}$$

з інтегровними ядрами $K_{ij}(t,\tau)$, $i,j = 1,2$. Звідси випливає, що $b(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Беручи до уваги формулу (38), отримуємо також $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$. Теорему доведено.

Зауважимо, що умови теорем 1 і 2 є достатніми. Умови 1 і 2 теореми 1 забезпечують належну гладкість розв'язку задачі, а умова 3 виділяє клас задач, до яких може бути застосований наведений вище підхід. Прикладом нелокальних умов, для яких умова 3 теореми 1 задовольняється, можуть бути умови

$$u(0,t) + u(h,t) + u_x(0,t) = 0,$$

$$u(h,t) + u_x(0,t) + u_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

У цьому випадку виконання умови 4 теореми 1 неважко забезпечити належним вибором функцій $\varphi(x)$, $f(x,t)$, $\nu_i(t)$, $i = 0,1$. Проте невиконання умови 3 теореми 1 не означає, що задача (1)–(4) не має розв'язку. В таких випадках для дослідження задачі (1)–(4) застосовується інший підхід.

1. *Вігак В. М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Допов. НАН України. – 1994. – № 8. – С. 57–60.
2. *Музылев Н. В.* О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1983. – **23**, № 1. – С. 102–108.
3. *Иванчов Н. И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 3. – С. 612–621.
4. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності в багатошаровому середовищі // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Вип. 40, № 2. – С. 153–159.
5. *Cannon J. R., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**. – P. 149–163.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539–550.

Одержано 22.03.99