УДК 519.1

К. И. Белоусов, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОНЕЧНОПРЕДСТАВИМЫЕ *K*-МАРКИРОВАННЫЕ КОЛЧАНЫ

We present necessary and sufficient conditions of the finite representability of K-marked quivers.

Наведено необхідні та достатні умови скінченної зображуваності K-маркованих колчанів.

1. Пусть Q — колчан, Q_v и Q_a — множества его вершин и стрелок, t, h : $Q_a \to Q_v$ — отображения, ставящие в соответствие стрелке α ее начало (tail) $t(\alpha)$ и конец (head) $h(\alpha)$, k — алгебраически замкнутое поле, $K = \operatorname{mod} k$ — категория конечномерных векторных пространств над k.

K-маркировка M колчана Q сопоставляет каждой вершине $A \in Q_v$ подагрегат K_A [1] категории K.[1] Представление X K-маркированного колчана Q_M сопоставляет каждой вершине $A \in Q_v$ объект $X(A) \in \operatorname{Ob} K_A$ и каждой стрелке $\alpha : A \to B$ колчана Q морфизм $X(\alpha) : X(A) \to X(B)$ категории K.

Представления Q_M являются объектами категории $\operatorname{Rep} Q_M$: морфизм из X в Y в $\operatorname{Rep} Q_M$ — это набор $\varphi(A) \in K_A(X(A), Y(A))$ (по одному для каждой $A \in Q_v$) такой, что $\varphi(h(\alpha))X(\alpha) = Y(\alpha)\varphi(t(\alpha))$ для каждой $\alpha \in Q_v$.

Через $\operatorname{ind} Q_M$ обозначим множество неразложимых изоклассов (= классов изоморфизма) категории $\operatorname{Rep} Q_M$. Q_M *конечнопредставим*, если $|\operatorname{ind} Q_M| < \infty$.

Если $K_A = K$ для всех $A \in Q_v$, то получаем „обычные" представления Q. Представления вектроидов (= vectorspace problems) получаются как частный случай, если $Q = \{A \to B\}$ и $K_A = K$. Если, кроме того, $K_B = \oplus\, kP$, где P — (конечное) частично упорядоченное множество (чум), kP — линеаризация K и $\oplus\, kP$ — аддитивная оболочка kP [1] (объекты $\oplus\, kP$ — конечные прямые суммы объектов kP), то $\operatorname{Rep} Q_M$ совпадает с категорией представлений чум P.

Вершина A K-маркированного колчана Q_M *n-маркирована*, если $K_A = \oplus\, kP_n$, где P_n — линейно упорядоченное чум порядка n.

2. Колчану Q естественно сопоставляется неориентированный граф

[1] В [2] дано более общее определение маркированного колчана (см. п. 5).

$G(Q)$. Колчан Q *связный* (соответственно *ацикличный*), если $G(Q)$ связный (соответственно ацикличный). Кратность $g(A)$ вершины A — это общее число стрелок, входящих в A и выходящих из нее:

$$g(A) = \left|\{\alpha \in Q_a \mid t(\alpha) = A\}\right| + \left|\{\beta \in Q_a \mid h(\beta) = A\}\right|.$$

В дальнейшем будем полагать Q связным, конечным и ацикличным (ясно, что ацикличность необходима для конечной представимости).

Вершину B назовем 1-*особой*, если она не n-маркирована; 2-*особой*, если она n-маркирована, $n > 1$ и $g(B) > 1$; 3-*особой*, если $g(B) > 2$, B — 1-маркирована. Положим $s(B) = i$, если B — i-особая, и $s(B) = 0$, если B не особая.

Таким образом, неособая вершина A n-маркирована, и если $n > 1$, то $g(A) = 1$.

Предложение 1. *Если* Q_v *не содержит особых вершин, то* $|\operatorname{ind} Q_M| < \infty$.

Предложение 2. *Пусть* $|\operatorname{ind} Q_M| < \infty$. *Тогда* Q_v *содержит не более одной особой вершины, и если* B — i-*особая, то* $g(B) = i$.

3. Напомним [2, 3], что *вектроидом* называется k-подкатегория $\mathscr{V}$ категории K, являющаяся спектроидом в смысле [1] (т. е. объекты $\mathscr{V}$ неразложимы, попарно неизоморфны и $\mathscr{V}(A, B)$ — подпространство в $K(A, B)$).

Каждый подагрегат $\mathscr{A} \in K$ (в частности, K_A, $A \in Q_v$, если Q маркирован) однозначно задается своим вектроидом $\mathscr{V}(\mathscr{A})$, содержащим по одному представителю из каждого неразложимого изокласса ($\mathscr{A} = \oplus \mathscr{V}(\mathscr{A})$). Для $A \in Q_v$ положим $\mathscr{V}_A = \mathscr{V}(K_A)$.

Биупорядоченное множество (= бум) — это чум, на котором кроме $\leq$ задано отношение $\lhd$ такое, что: 1) если $a \lhd b$, то $a \leq b$; 2) если $a \lhd b \leq c$ или $a \leq b \lhd$ $\lhd c$, то $a \lhd c$ [2, 3].

Бум *пополнено*, если кроме отношений $\leq$ и $\lhd$ на нем задано отношение эквивалентности $\simeq$. Вектроиду $\mathscr{V}$ сопоставляется пополненное бум $S(\mathscr{V})$ следующим образом [3]. Пусть $U \in \operatorname{Ob}\mathscr{V}$, U — пространство над k с нулем 0_U. Введем на U эквивалентность $\varepsilon_U : \varepsilon_U(a, b)$, если существует обратимый $\varphi \in \mathscr{V}(U, U)$ такой, что $\varphi(a) = b$. Положим $U^* = U \setminus \{0_U\}$, $\overline{U}^* = U^* / \varepsilon_U$, $S(\mathscr{V}) = \bigcup \overline{U}^*$. Если $u, w \in S(\mathscr{V})$ и $\overline{u}$, $\overline{w}$ — их представители соответственно в U, $W \in \operatorname{Ob}\mathscr{V}$, то положим:

1) $u \leq w$, если существует $\psi \in \mathscr{V}(U, W)$ такой, что $\psi(\overline{u}) = \overline{w}$;

2) $u \lhd w$, если, кроме того, ранг ψ (как линейного оператора из U в W) равен 1;

3) $u \simeq w$, если $U = W$.

Если S — пополненное бум, $s \in S$, то положим $\dim s = |\{y \in S \mid y \simeq s\}|$, $\dim S = \sup_{s \in S} \dim s$; $S_i = \{s \in S \mid \dim s = i\}$. При $\dim s = 2$ будем обозначать через s^* такой элемент, что $s^* \simeq s$, $s^* \neq s$.

Если $\dim S(\mathscr{V}) = 1$, то $\mathscr{V} = \oplus kP$, где P — чум, отношения $\leq$ и $\lhd$ совпадают, и если $u \simeq w$, то $u = w$.

Если $A \in Q_v$, то положим $S(A) = S(\mathscr{V}_A)$, $\dim Q_M = \sup_{A \in Q_v} \dim S(A)$.

Предложение 3. *Пусть* $|\operatorname{ind} Q_M| < \infty$. *Тогда* $\dim Q_M \leq 3$. *Если* $\dim Q_M = 3$, *то* $Q = \{A \to B\}$, *и либо* A, *либо* B 1-*маркирована.*

Таким образом, при $\dim Q_M = 3$ конечная представимость Q_M сводится к конечной представимости триадического множества $S(B)$ или $S(A)$ (см. [4], Для чум критерий конечной представимости дан в [5]. Если Q не маркирован, то легко видеть, что данный здесь критерий конечной представимости совпадает с приведенным в [6, 7].

Для диадического множества, т. е. $Q = A \to B$, $K_A = \mathrm{mod}\,k$, $\dim S(B) \le 2$, $C(Q_M)$ совпадает с $St(S(\mathcal{V}_B))$ в смысле [1], а критерий конечной представимости — с теоремой 5. 8 [1].

Пример. Пусть $\mathcal{V}$ — следующая подкатегория $\mathrm{mod}\,k$: $\mathrm{Ob}\mathcal{V} = \{X, Y\}$, $\dim X = 2$, $\dim Y = 1$, $\mathrm{Hom}(Y, X) = 0$, $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$, $\{1, r\}$ — базис в $\mathrm{Hom}(X, X)$, $r^2 = 0$; $\mathcal{V}$ — вектроид, $S(\mathcal{V}) = \{x, x^*, y\}$, $x \lhd x^*$, $y \lhd y$.

Пусть, далее, $Q = S \leftarrow D \to B$, $\mathcal{V}_B = \mathcal{V}$, D — 1-маркированная ($K_D = \mathrm{mod}\,k$), C — 2-маркированная вершина, $s(B) = 1$ $(s(D) = s(C) = 0)$, $S_1(B) = \{y\}$, $S_2(B) = \{x, x^*\}$, $M(D) = \{1\}$, $M(C) = \{1, 2\}$.

$C(Q_M)$ состоит из следующих путей:

$\pi_1 = B$, $m(B) = y$;

π_2 (соответственно π_3, π_4) $= A_1, A_2, A_3$; $A_2 = D$, $A_1 = A_3 = B$, $m(A_1) = x$, $m(A_3) = 0$ (соответственно y, ∞);

π_5 (соответственно π_6, π_7) $= A_1, A_2, A_3$; $A_2 = D$, $A_1 = A_3 = B$, $m(A_1) = x^*$, $m(A_3) = 0$ (соответственно y, ∞);

π_8 (соответственно π_9) $= A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$; $A_1 = A_3 = B$, $A_2 = A_4 = D$, $A_5 = C$; $m(A_1) = x$, $m(A_3) = \square$, $m(C) = 1$ (соответственно 2);

π_{10} (соответственно π_{11}) $= A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$; $A_1 = A_3 = B$, $A_2 = A_4 = D$, $A_5 = C$; $m(A_1) = x^*$, $m(A_3) = \square$, $m(C) = 1$ (соответственно 2);

π_{12} (соответственно π_{13}) $= A_1, A_2, A_3$; $A_1 = B$, $A_2 = D$, $A_3 = C$; $m(B) = \square$, $m(C) = 1$ (соответственно 2);

$$C(Q_M) \simeq \begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dr] & & 1 & & 6 \arrow[dr] & & & \\ 2 \arrow[r] \arrow[urr] & 8 \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] \arrow[urr] & 10 \arrow[r] & 11 \arrow[r] & 7 & 12 \arrow[r] & 13 \end{tikzcd}$$

(здесь $\to$ означает $\le$, для краткости над точкой пишем i вместо π_i).

Согласно критерию Клейнера, $|\mathrm{ind}\, C(Q_M)| = \infty$ (например, π_1, π_3, π_8, π_{12} попарно несравнимы), а значит, $|\mathrm{ind}\, Q_M| = \infty$.

5. Приведем схему доказательства теоремы и предложений 1 –3. Напомним для этого некоторые определения и утверждения из [2].

$(Q, \mathcal{M})$ — *маркированный колчан*, если каждой $A \in Q_v$ и каждой $\alpha \in Q_a$ сопоставлены произвольные категории $\mathcal{M}_A$ и $\mathcal{M}_\alpha$, и для каждой $\alpha \in Q_a$ заданы функторы $T_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to \mathcal{M}_{t(\alpha)}$ и $H_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to \mathcal{M}_{h(\alpha)}$. Естественным образом строится категория представлений $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{M})$. Таким образом, K-маркировка есть частный случай маркировки, если $\mathcal{M}_\alpha = \mathrm{mod}\,k$ при всех $\alpha \in Q_a$, каждый $\mathcal{M}_A (A \in Q_v)$ есть подкатегория $\mathrm{mod}\,k$, а T_α, H_α — функторы вложения Q_C и Q_D в $\mathrm{mod}\,k$ при $\alpha : C \to D$.

Для произвольной $\alpha \in Q_a$, $\alpha : A \to C$, в [2] строится колчан Q'_α, в котором вершины A и C исключаются, а α „переводится" из Q_a в $(Q'_\alpha)_v$, т. е. $(Q'_\alpha)_a = Q_a \setminus \{a\}$, $(Q'_\alpha)_v = \left(Q_v \setminus \{A, C\}\right) \cup \{\overline{\alpha}\}$,

$$t'(\beta) = \begin{cases} t(\beta), & \text{если } t(\beta) \notin \{A, C\}; \\ \overline{\alpha}, & \text{если } t(\beta) \in \{A, C\}, \end{cases} \qquad h'(\beta) = \begin{cases} h(\beta), & \text{если } h(\beta) \notin \{A, C\}; \\ \overline{\alpha}, & \text{если } h(\beta) \in \{A, C\}. \end{cases}$$

жество $\{a_1 < a_2 < a_3, a_4\}$, где $a_1 \simeq a_2 \simeq a_3$, бесконечнопредставимо [4].

Утверждение теоремы при $Q = A \to B$ и $K_A = \mathrm{mod}\, k$ совпадает с теоремой 5.8 из [1] (см. [2, 8, 9]). Общий случай сводится к рассмотренному с применением (несколько раз) леммы 2.

1. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras // Encyclopaedia Math. Sci. Algebra 8. – 1992. – **73**. – 177 p.
2. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Конечнопредставимые диадические множества // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 10. – С. 1363–1396.
3. *Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В.* Элементарные и мультиэлементарные представления вектроидов // Там же. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1451–1477.
4. *Belousov K. I., Nazarova L. A., Roiter A. V.* Finitely representable triadic sets // St. Petersburg Math. J. – 1998. – **9**, № 4. – P. 651–673.
5. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
6. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen I (Oberwolfach 1970) // Manuscr. math. – 1972. – **6**. – P. 71–103.
7. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев А. В.* Функторы Коксетера и теорема Габриеля // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**. – С. 17–32.
8. *Belousov K. I., Nazarova L. A., Roiter A. V.* Representations of finitely represented dyadic sets // Conf. Proc. – Can. Math. Soc., 1998. – **24**. – P. 61–76.
9. *Guidon T., Hassler U., Nazarova L. A., Roiter A. V.* Dyadic set S: a dichotomy for indecomposable S-matrices // C. r. Acad. sci. Sér. I. – 1997. – **324**. – P. 1205–1210.

Получено 17.02.2000