УДК 517.911

А. Е. Зернов (Одес. политехн. ун-т)

О РАЗРЕШИМОСТИ И АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

We prove the existence of continuously differentiable solutions with required asymptotic properties as $t \to +0$ and determine the number of solutions of the following Cauchy problem for a functional differential equation:

$$\alpha(t)x'(t) = at + b_1 x(t) + b_2 x(g(t)) + \varphi(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0,$$

where $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$, $g : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ and $h : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ are continuous functions, $0 < g(t) \le t$, $0 < h(t) \le t$, $t \in (0, \tau)$, $\lim\limits_{t \to +0} \alpha(t) = 0$, and the function φ is continuous in some domain.

Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків з потрібними асимптотичними властивостями при $t \to +0$ та визначено кількість розв'язків такої задачі Коші для функціонально-диференціального рівняння:

$$\alpha(t)x'(t) = at + b_1 x(t) + b_2 x(g(t)) + \varphi(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0,$$

де $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$, $g : (0, \tau) \to (0, +\infty)$, $h : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервні функції, $0 < g(t) \le t$, $0 < h(t) \le t$, $t \in (0, \tau)$, $\lim\limits_{t \to +0} \alpha(t) = 0$, функція φ неперервна в деякій області.

Известно, сколь большое внимание исследователей привлекают как функционально-дифференциальные уравнения (см., например, [1]), так и сингулярные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [2 – 6]). В то же время сингулярные задачи для функционально-дифференциальных уравнений пока исследованы относительно мало (см., например, [7, 8]). В настоящей работе сделана попытка рассмотреть одну из этих задач. При ее изучении использованы методы качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, [2 – 5]) и функционального анализа (см., например, [3 – 6, 8 – 10]).

Пусть $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\alpha'(t) \ge 0$, $t \in (0, \tau)$, $\lim\limits_{t \to +0} \alpha(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{\alpha(t)}{t} = +\infty$. Обозначим $I = \int_0^\tau \dfrac{dr}{\alpha(r)}$. Пусть функция $\xi : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ определена равенством

$$\xi(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{dr}{\alpha(r)}, & \text{если } I < +\infty; \\ \displaystyle\left(\int_t^\tau \frac{dr}{\alpha(r)}\right)^{-1}, & \text{если } I = +\infty, \end{cases}$$

а множество $D_I \subset (0, \tau) \times R^4$ определяется следующим образом:

1) если $I < +\infty$, то

$$D_I = \left\{(t, x, y, v, w) : t \in (0, \tau),\ |x| < rt,\ |y| < rt,\ |v| < \frac{rt}{\alpha(t)},\ |w| < \frac{rt}{\alpha(t)}\right\};$$

2) если $I = +\infty$, то

$$D_I = \{(t, x, y, v, w) : t \in (0, \tau),\ |x| < r\xi(t),\ |y| < r\xi(t)\}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\alpha(t)x'(t) = at + b_1 x(t) + b_2 x(g(t)) + \varphi(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \tag{1}$$

$$x(0)=0, \tag{2}$$

где a, b_1, b_2 — постоянные, и предположим, что выполнены следующие *условия A*:

1) $g:(0,\tau)\to(0,+\infty)$, $h:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $0<g(t)\le t$, $0<h(t)\le t$, $t\in(0,\tau)$;

2) $|h'(t)|\le 1$, $|g'(t)|\le g_0$, $t\in(0,\tau)$;

3) $\varphi: D_I\to R$ — непрерывная функция;

4) $|\varphi(t,x,y,v,w)|\le o(t+|x|+|y|)$, $(t,x,y,v,w)\in D_I$, $t\to+0$;

5) $|\varphi(t_1,x,y,v,w)-\varphi(t_2,x,y,v,w)|\le l_t(\mu)|t_1-t_2|$, $(t_i,x,y,v,w)\in D_I$,

$$0<\mu\le t_1, t_2<\tau,$$

$$|\varphi(t,x_1,y,v,w)-\varphi(t,x_2,y,v,w)|\le L_1(t)|x_1-x_2|,\ (t,x_i,y,v,w)\in D_I,$$

$$|\varphi(t,x,y_1,v,w)-\varphi(t,x,y_2,v,w)|\le L_2(t)|y_1-y_2|,\ (t,x,y_i,v,w)\in D_I,$$

$$|\varphi(t,x,y,v_1,w)-\varphi(t,x,y,v_2,w)|\le l_v\alpha(t)|v_1-v_2|,\ (t,x,y,v_i,w)\in D_I,$$

$$|\varphi(t,x,y,v,w_1)-\varphi(t,x,y,v,w_2)|\le l_w\beta_I(t)|w_1-w_2|,\ (t,x,y,v,w_i)\in D_I,$$

$$i\in\{1,2\},$$

где $L_i:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $L_i'(t)\le 0$, $t\in(0,\tau)$, $i\in\{1,2\}$, $l_t:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывная функция, $t_1<t_2\Rightarrow$ $\Rightarrow l_t(t_1)\ge l_t(t_2)$, $0<t_1,t_2<\tau$, функция $\beta_I:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ определена равенством

$$\beta_I(t)=\begin{cases}\alpha(t), & \text{если } I<+\infty;\\ \dfrac{\alpha(t)}{t}h(t), & \text{если } I=+\infty;\end{cases}$$

6) $0\le l_v+l_w<1$.

Определение. *Пусть* $\rho\in(0,\tau)$ — *постоянная. Будем называть* ρ*-решением задачи* (1), (2) *непрерывно дифференцируемую функцию* $x:(0,\rho]\to R$ *такую, что*:

1) $(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))\in D_I$ *при* $t\in(0,\rho]$;

2) x *удовлетворяет* (1) *при* $t\in(0,\rho]$;

3) $\lim\limits_{t\to+0}x(t)=0$.

Следуя Ф. Хартману [5, с. 52], введем понятия точки строгого входа и точки строгого выхода.

Определение. *Пусть*

$$\Phi=\{(t,x): 0<t\le\nu, |x-g_1(t)|=g_2(t)\},$$

$$G=\{(t,x): 0<t\le\nu, |x-g_1(t)|<g_2(t)\},$$

где ν — *постоянная,* $\nu>0$, $g_i:(0,\nu]\to R$ — *непрерывные функции,* $i\in\{1,2\}$. *Пусть* G_0 — *открытое* (t,x)*-множество,* $G\cup\Phi\subset G_0$, *а* $F:G_0\to R$ — *непрерывная функция. Тогда точка* $(t_0,x_0)\in\Phi$ *называется точкой строгого входа (соответственно, точкой строгого выхода) для множества* G *по отношению к уравнению* $x'=F(t,x)$, *если для каждого решения* $x=x(t)$ *этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию* $x(t_0)=x_0$, *существует* $\delta>0$ *такое, что*:

а) *при* $0<t_0<\nu$: $(t,x(t))\in G$ *для* $t_0-\delta<t<t_0$ *и* $(t,x(t))\,\overline{\in}\,\overline{G}$ *для* $t_0<$

$< t < t_0 + \delta$ *(соответственно,* $(t, x(t)) \overline{\in} \overline{G}$ *для* $t_0 - \delta < t < t_0$ *и* $(t, x(t)) \in G$ *для* $t_0 < t < t_0 + \delta$);

б) *при* $t_0 = \nu : (t, x(t)) \in G$ *для* $\nu - \delta < t < \nu$ *(соответственно,* $(t, x(t)) \overline{\in} \overline{G}$ *для* $\nu - \delta < t < \nu$).

Предположим, что выполнены следующие *условия B*:

$$1)\ I < +\infty;\ 2)\ |a| < r;\ 3)\ \lim_{t \to +0} t \frac{L_i'(t)}{L_i(t)} = l_i, \quad -\infty < l_i \le 0, \quad i \in \{1, 2\};$$

$$4)\ -1 < l_1 + l_2 \le 0;\ 5)\ \lim_{t \to +0} t \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \lambda, \quad 0 \le \lambda < 1,$$

и обозначим через $U_1(\rho, M)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $u: (0, \rho] \to R$, каждая из которых при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам

$$|u(t)| \le M t \xi(t), \qquad |u'(t)| \le M \frac{t}{\alpha(t)}. \tag{3}$$

Здесь ρ, M — положительные постоянные, $\rho < \tau$.

Теорема 1. *Если выполнены условия A, B, то существуют постоянные* $\rho \in (0, \tau)$, $M \in (|a|, r)$ *такие, что задача* (1), (2) *имеет хотя бы одно* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $U_1(\rho, M)$.

Доказательство. Прежде всего выбираем постоянные $M \in (|a|, r)$ и $\rho \in (0, \tau)$. Условия, определяющие выбор ρ, здесь не приводим; укажем только, что ρ достаточно мало и выбор ρ, M обеспечивает законность всех дальнейших рассуждений.

Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x: [0, \rho] \to R$ с нормой $\|x\|_B = \max\limits_{t \in [0, \rho]} (|x(t)| + |x'(t)|)$.

Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $u: [0, \rho] \to R$ которого при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам (3), $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, и при этом $\forall \varepsilon > 0$, $\forall u \in U$, $\forall t_1, t_2 \in [0, \rho]: |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon$. Здесь $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon(1 - l_\upsilon - l_w)}{4 A_*(\varepsilon)}$, где

$$A_*(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha(t(\varepsilon))} (|a| + M\lambda + 1 + l_t(t(\varepsilon)) + L_1(t(\varepsilon)) + L_2(t(\varepsilon))),$$

причем постоянная $t(\varepsilon) \in (0, \rho/2]$ определяется из условия

$$\frac{t}{\alpha(t)} < \frac{\varepsilon}{8M}(1 - l_\upsilon - l_w) \quad \text{при} \quad t \in (0, t(\varepsilon)].$$

Нетрудно убедиться в том, что U — замкнутое, ограниченное, выпуклое множество. В соответствии с критерием Арцела, множество U компактно.

Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = \frac{1}{\alpha(t)} (at + b_1 x(t) + b_2 u(g(t)) + \varphi(t, u(t), u(g(t)), u'(t), u'(h(t)))), \tag{4}$$

где $t \in (0, \rho]$, $u \in U$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $D_0 = \{(t, x): t \in (0, \rho], x \in R\}$. В области D_0 для (4) выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Пусть

$$\Phi_1 = \{(t, x): t \in (0, \rho],\ |x| = M t \xi(t)\},$$

$$D_1 = \{ (t, x) \colon t \in (0, \rho], \ |x| < Mt\xi(t) \},$$
$$H = \{ (t, x) \colon t = \rho, \ |x| < M\rho\xi(\rho) \}.$$

Пусть вспомогательная функция $A_1 : D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством $A_1(t, x) = x^2(t\xi(t))^{-2}$ и $a_1 : D_0 \to R$ — производная функции A_1 в силу уравнения (4). Нетрудно убедиться в том, что $a_1(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$. Поэтому [3, с. 758] все точки Φ_1 — точки строгого выхода для D_1 по отношению к (4). Отсюда следует, что хотя бы одна интегральная кривая $J_0 \colon (t, x_u(t))$ уравнения (4) из числа тех интегральных кривых (4), которые пересекают H, определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в D_1 при $t \in (0, \rho]$ [3, с. 758]. Докажем теперь, что $J_0 : (t, x_u(t))$ — единственная интегральная кривая уравнения (4), лежащая в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. Для этого строим однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi_2(\nu) = \{ (t, x) \colon t \in (0, \rho], \ |x - x_u(t)| = \nu t(\xi(t))^{1-\sigma} \},$$

где $\sigma \in (0, 1)$ — постоянная, ν — параметр, $0 < \nu \le \nu_0$, рассматриваем вспомогательную функцию $A_2 : D_0 \to [0, +\infty)$, определяемую равенством $A_2(t, x) = (x - x_u(t))^2 (t(\xi(t))^{1-\sigma})^{-2}$ и доказываем, что ее производная в силу уравнения (4) отрицательна при всех $(t, x) \in D_0$ таких, что $x \ne x_u(t)$. Для завершения доказательства повторяем те же рассуждения, что и в [3, с. 758, 759]. Нетрудно убедиться в том, что $|x_u(t)| \le Mt\xi(t)$, $|x'_u(t)| \le M \dfrac{t}{\alpha(t)}$, $t \in (0, \rho]$. Доопределим x_u, x'_u при $t = 0$ по непрерывности, полагая $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = 0$.

Докажем теперь, что $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t_1, t_2 \in [0, \rho]$:

$$|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \le \varepsilon.$$

Пусть вначале $t_i \in [t(\varepsilon), \rho]$, $i \in \{1, 2\}$. Как показывают непосредственные вычисления,

$$|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \le A_*(\varepsilon)|t_1 - t_2| + l_v|u'(t_1) - u'(t_2)| + \\ + l_w|u'(h(t_1)) - u'(h(t_2))|.$$

Поскольку $|h'(t_1)| \le 1$, $t \in (0, \tau)$, то $|h(t_1) - h(t_2)| \le |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$. Обозначая $r_i = h(t_i)$, $i \in \{1, 2\}$, имеем $r_i \in [0, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$ и $|r_1 - r_2| \le \delta(\varepsilon)$ и поэтому, согласно определению множества U, $|u'(r_1) - u'(r_2)| \le \varepsilon$. Кроме того, $|u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon$. Таким образом, если $t_i \in [t(\varepsilon), \rho]$, $i \in \{1, 2\}$, $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, то

$$|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \le A_*(\varepsilon)|t_1 - t_2| + (l_v + l_w)\varepsilon \le A_*(\varepsilon)\delta(\varepsilon) + (l_v + l_w)\varepsilon = \\ = \frac{\varepsilon}{4}(1 + 3l_v + 3l_w), \tag{5}$$

причем $\dfrac{\varepsilon}{4}(1 + 3l_v + 3l_w) < \varepsilon$, так как $l_v + l_w < 1$. Пусть, далее, $t_i \in [0, t(\varepsilon)]$, $i \in \{1, 2\}$. Если $t_i \in (0, t(\varepsilon)]$, $i \in \{1, 2\}$, то

$$|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \le |x'_u(t_1)| + |x'_u(t_2)| \le 2M \frac{t(\varepsilon)}{\alpha(t(\varepsilon))} < \frac{\varepsilon}{4}(1 - l_v - l_w), \tag{6}$$

причем $\dfrac{\varepsilon}{4}(1 - l_v - l_w) < \dfrac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Кроме того, $x'_u(0) = 0$. Пусть, наконец, $t_1 \in [0, t(\varepsilon)]$, $t_2 \in [t(\varepsilon), \rho]$. Тогда в соответствии с (5), (6)

$$|x_u'(t_1)-x_u'(t_2)| \le |x_u'(t_1)-x_u'(t(\varepsilon))| + |x_u'(t(\varepsilon))-x_u'(t_2)| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{4}(1-l_v-l_w)+\frac{\varepsilon}{4}(1+3l_v+3l_w) = \frac{\varepsilon}{2}(1+l_v+l_w) < \varepsilon,$$

так как $l_v + l_w < 1$. В результате мы установили, что существует функция $x_u : [0, \rho] \to R$, принадлежащая множеству U, и притом единственная, которая при $t \in (0, \rho]$ является решением задачи Коши (4), (2). Определим оператор $T : U \to U$, полагая $(Tu)(t) = x_u(t)$. Докажем, что оператор T непрерывен на U. Пусть $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, — произвольные фиксированные функции и $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть далее $\| u_1 - u_2 \|_B = r$, $r > 0$. Очевидно, что $x_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, и при $t \in (0, \rho]$ выполнены тождества

$$x_i'(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\big(at + b_1 x_i(t) + b_2 u_i(g(t)) +$$
$$+ \varphi(t, u_i(t), u_i(g(t)), u_i'(t), u_i'(h(t)))\big), \quad i \in \{1, 2\}. \tag{7}$$

Пусть ν — постоянная, $\nu \in (0, 1 + l_1 + l_2)$ (и поэтому $\nu < 1$). При $t \in (0, \rho]$ доказываем последовательно следующие четыре неравенства:

$$|u_1(t)-u_2(t)| = |u_1(t)-u_2(t)|^{\nu} |u_1(t)-u_2(t)|^{1-\nu} \le$$
$$\le \big(\max_{t\in[0,\rho]} (|u_1(t)-u_2(t)|+|u_1'(t)-u_2'(t)|)\big)^{\nu} (|u_1(t)|+|u_2(t)|)^{1-\nu} \le r^{\nu}(2Mt\xi(t))^{1-\nu},$$

$$|u_1(g(t))-u_2(g(t))| = |u_1(g(t))-u_2(g(t))|^{\nu} |u_1(g(t))-u_2(g(t))|^{1-\nu} \le$$
$$\le \big(\sup_{s\in(0,t]\subset(0,\rho]} (|u_1(s)-u_2(s)|+|u_1'(s)-u_2'(s)|)\big)^{\nu} (|u_1(g(t))|+|u_2(g(t))|)^{1-\nu} \le$$
$$\le \big(\max_{s\in[0,\rho]} (|u_1(s)-u_2(s)|+|u_1'(s)-u_2'(s)|)\big)^{\nu} (2Mg(t)\xi(g(t)))^{1-\nu} \le r^{\nu}(2Mt\xi(t))^{1-\nu},$$

$$|u_1'(t)-u_2'(t)| = |u_1'(t)-u_2'(t)|^{\nu} |u_1'(t)-u_2'(t)|^{1-\nu} \le$$
$$\le \big(\max_{t\in[0,\rho]} (|u_1(t)-u_2(t)|+|u_1'(t)-u_2'(t)|)\big)^{\nu} (|u_1'(t)|+|u_2'(t)|)^{1-\nu} \le r^{\nu}\left(2M\frac{t}{\alpha(t)}\right)^{1-\nu},$$

$$|u_1'(h(t))-u_2'(h(t))| = |u_1'(h(t))-u_2'(h(t))|^{\nu} |u_1'(h(t))-u_2'(h(t))|^{1-\nu} \le$$
$$\le \big(\sup_{s\in(0,t]\subset(0,\rho]} (|u_1(s)-u_2(s)|+|u_1'(s)-u_2'(s)|)\big)^{\nu} (|u_1'(h(t))|+|u_2'(h(t))|)^{1-\nu} \le$$
$$\le \big(\max_{s\in[0,\rho]} (|u_1(s)-u_2(s)|+|u_1'(s)-u_2'(s)|)\big)^{\nu} \left(2M\frac{h(t)}{\alpha(h(t))}\right)^{1-\nu} \le$$
$$\le r^{\nu}\left(2M\frac{t}{\alpha(t)}\right)^{1-\nu},$$

так как $\left(\dfrac{t}{\alpha(t)}\right)' > 0$ при $t \in (0, \tau)$, и поэтому $\dfrac{h(t)}{\alpha(h(t))} \le \dfrac{t}{\alpha(t)}$, $t \in (0, \rho]$. Далее

$$|\varphi(t, u_1(t), u_1(g(t)), u_1'(t), u_1'(h(t))) - \varphi(t, u_2(t), u_2(g(t)), u_2'(t), u_2'(h(t)))| \le$$
$$\le L_1(t)|u_1(t)-u_2(t)| + L_2(t)|u_1(g(t))-u_2(g(t))| + l_v\alpha(t)|u_1'(t)-u_2'(t)| +$$
$$+ l_w\alpha(t)|u_1'(h(t))-u_2'(h(t))| \le (L_1(t)+L_2(t))r^{\nu}t^{1-\nu}\omega_1(t), \quad t\in(0,\rho], \tag{8}$$

где $\omega_1 : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \omega_1(t) = 0$.

Будем рассматривать интегральные кривые уравнения

$$x'(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\big(at + b_1 x(t) + b_2 u_1(g(t)) + \\ + \varphi(t, u_1(t), u_1(g(t)), u_1'(t), u_1'(h(t)))\big). \qquad (9)$$

Пусть

$$\Phi_3 = \{(t,x):\ t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| = r^{\nu} t^{1-\nu}(L_1(t) + L_2(t))\},$$

$$D_2 = \{(t,x):\ t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| < r^{\nu} t^{1-\nu}(L_1(t) + L_2(t))\}.$$

Пусть вспомогательная функция $A_3 : D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством $A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 (t^{1-\nu}(L_1(t) + L_2(t)))^{-2}$ и $a_3 : D_0 \to R$ — производная функции A_3 в силу уравнения (9). Легко видеть, что $a_3(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_3$. Поэтому [3, с. 758] все точки Φ_3 — точки строгого выхода для D_2 по отношению к (9). При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t)| + |x_2(t)| \le 2Mt\xi(t) < (L_1(t) + L_2(t)) r^{\nu} t^{1-\nu},$$

если $t \in (0, t(r)]$, где (достаточно малое) $t(r) \in (0,\rho)$ выбрано так, чтобы

$$t^{\nu}\xi(t) < \frac{L_1(\rho) + L_2(\rho)}{2M} r^{\nu} \quad \text{при} \quad t \in (0, t(r)].$$

Это означает, что при $t \in (0, t(r)]$ интегральная кривая $J : (t, x_1(t))$ уравнения (9) лежит в D_2. Из изложенного следует, что при $t \in (0,\rho]$ J не может иметь общих точек с Φ_3. Поэтому если t возрастает от $t = t(r)$ до $t = \rho$, то J остается в D_2. Итак, доказано, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le r^{\nu} t^{1-\nu}(L_1(t) + L_2(t)), \quad t \in (0,\rho]. \qquad (10)$$

Из тождеств (7) с помощью (8), (10) получаем

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \le \frac{L_1(t) + L_2(t)}{\alpha(t)} r^{\nu}\omega_2(t), \quad t \in (0,\rho], \qquad (11)$$

где $\omega_2 : (0,\rho] \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \omega_2(t) = 0$.

На основании (10), (11)

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le \frac{L_1(t) + L_2(t)}{\alpha(t)} r^{\nu}, \quad t \in (0,\rho]. \qquad (12)$$

Перейдем непосредственно к доказательству непрерывности оператора T. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда существует такое $t(\varepsilon) \in (0,\rho)$, что

$$2Mt\xi(t) + 2M\frac{t}{\alpha(t)} \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad t \in (0, t(\varepsilon)].$$

Поэтому для любых $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$,

$$|u_1(t) - u_2(t)| + |u_1'(t) - u_2'(t)| \le |u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_1'(t)| + |u_2'(t)| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$t \in (0, t(\varepsilon)].$$

В частности,

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad t \in (0, t(\varepsilon)]. \qquad (13)$$

Пусть теперь $t \in [t(\varepsilon), \rho]$. Тогда из (12) следует

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|x_1'(t)-x_2'(t)| \le \frac{L_1(t(\varepsilon))+L_2(t(\varepsilon))}{\alpha(t(\varepsilon))} r^{\nu}, \quad t\in[t(\varepsilon),\rho]. \tag{14}$$

Пусть $\delta(\varepsilon)=\left(\dfrac{\alpha(t(\varepsilon))}{L_1(t(\varepsilon))+L_2(t(\varepsilon))}\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{1/\nu}$. Если $\|u_1-u_2\|_B = r<\delta(\varepsilon)$, то из (14) получаем

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|x_1'(t)-x_2'(t)| \le \frac{L_1(t(\varepsilon))+L_2(t(\varepsilon))}{\alpha(t(\varepsilon))}(\delta(\varepsilon))^{\nu} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in[t(\varepsilon),\rho]. \tag{15}$$

Поскольку $x_i(0)=0$, $x_i'(0)=0$, $i\in\{1,2\}$, из (14), (15) имеем

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|x_1'(t)-x_2'(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in[0,\rho]. \tag{16}$$

Так как левая часть неравенства (16) непрерывна при $t\in[0,\rho]$, то она достигает при $t\in[0,\rho]$ своего максимума. Поэтому $\max\limits_{t\in[0,\rho]}\left(|x_1(t)-x_2(t)|+|x_1'(t)-x_2'(t)|\right) \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, или $\|x_1-x_2\|_B \le \varepsilon/2<\varepsilon$. Таким образом, если $\|u_1-u_2\|_B=r<\delta(\varepsilon)$, то $\|Tu_1-Tu_2\|_B=\|x_1-x_2\|_B<\varepsilon$. Проведенные рассуждения не зависят ни от выбора $\varepsilon>0$, ни от выбора $u_i\in U$, $i\in\{1,2\}$. Поэтому оператор $T:U\to U$ непрерывен.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается применить к оператору $T:U\to U$ принцип Шаудера неподвижной точки.

Пусть функции $G:(0,\tau)\to[1,+\infty)$, $H:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ определяются равенствами $G(t)=\dfrac{t}{g(t)}$, $H(t)=\dfrac{\alpha(t)}{h(t)}$. Предположим, что выполнены следующие *условия C*:

1) $I=+\infty$; 2) $|b_2|<b_1$; 3) $G'(t)\le 0$, $H'(t)\le 0$, $t\in(0,\tau)$;

4) $g'(t)\ge 0$, $h'(t)\ge 0$, $t\in(0,\tau)$; 5) $\lim\limits_{t\to+0} t\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}=\lambda$, $0\le\lambda<1$.

Обозначим через $U_2(\rho,M)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x:(0,\rho]\to R$, каждая из которых при $t\in(0,\rho]$ удовлетворяет неравенству $|x(t)|\le M\xi(t)$. Здесь ρ, M — положительные постоянные, $\rho<\tau$.

Теорема 2. *Если выполнены условия A, C, то существуют постоянные* $\rho\in(0,\tau)$, $M\in(0,r)$ *такие, что задача* (1), (2) *имеет бесконечно много* ρ*-решений, принадлежащих множеству* $U_2(\rho,M)$. *При любом выборе постоянной* μ, *удовлетворяющей условию* $|\mu|\le M\xi(\rho)$, *найдется хотя бы одно* ρ*-решение* $x_\mu\in U_2(\rho,M)$ *такое, что* $x_\mu(\rho)=\mu$.

Доказательство. Вначале выбираем постоянные $M\in(0,r)$ и $\rho\in(0,\tau)$. Неравенства, определяющие выбор ρ, M, здесь не приводим ввиду ограниченности объема работы; отметим лишь, что ρ достаточно мало и выбор ρ, M гарантирует законность всех последующих рассуждений.

Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x:[0,\rho]\to R$ с нормой $\|x\|_B=\max\limits_{t\in[0,\rho]}(|x(t)|+|x'(t)|)$.

Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $u:[0,\rho]\to R$ которого при $t\in(0,\rho]$ удовлетворяет неравенствам $|u(t)|\le Mt\xi(t)$, $|u'(t)|\le 2M\xi(t)$, $u(0)=0$, $u'(0)=0$, и при этом $\forall\varepsilon>0$, $\forall t_1,t_2\in[0,\rho]$:

$$|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon;$$

здесь

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(1 - l_v - l_w)}{4B_*(\varepsilon)},$$

$$B_*(\varepsilon) = \frac{1}{g(t(\varepsilon))} + \frac{1}{h(t(\varepsilon))} + l_t(t(\varepsilon)) + \frac{L_1(t(\varepsilon)) + L_2(t(\varepsilon))}{g(t(\varepsilon))},$$

причем постоянная $t(\varepsilon) \in (0, \rho/2]$ определяется из условия

$$\xi(t) < \frac{\varepsilon}{16M}(1 - l_v - l_w) \quad \text{при} \quad t \in (0, t(\varepsilon)].$$

Легко установить, что U — замкнутое, ограниченное, выпуклое множество. Множество U компактно на основании критерия Арцела.

Положим $x = y/t$, где y — новая неизвестная функция. Тогда (1) примет вид

$$\alpha(t)y'(t) = at^2 + b_1 y(t) + \frac{\alpha(t)}{t}y(t) + b_2\frac{t}{g(t)}y(g(t)) +$$
$$+ t\varphi\left(t, \frac{y(t)}{t}, \frac{y(g(t))}{g(t)}, \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2}, \frac{y'(h(t))}{h(t)} - \frac{y(h(t))}{h^2(t)}\right).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\left(at^2 + b_1 y(t) + \frac{\alpha(t)}{t}y(t) + b_2\frac{t}{g(t)}u(g(t)) +\right.$$
$$\left.+ t\varphi\left(t, \frac{u(t)}{t}, \frac{u(g(t))}{g(t)}, \frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2}, \frac{u'(h(t))}{h(t)} - \frac{u(h(t))}{h^2(t)}\right)\right), \tag{17}$$

$$y(0) = 0, \tag{18}$$

где $t \in (0, \rho]$, $u \in U$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $D_0 = \{(t, y) \colon t \in (0, \rho],\ y \in R\}$. В области D_0 для (17) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Пусть

$$\Phi_1 = \{(t, y) \colon t \in (0, \rho],\ |y| = Mt\xi(t)\},$$
$$D_1 = \{(t, y) \colon t \in (0, \rho],\ |y| < Mt\xi(t)\},$$
$$H = \{(t, y) \colon t = \rho,\ |y| < M\rho\xi(\rho)\}.$$

Пусть, кроме того, вспомогательная функция $A_1 \colon D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством $A_1(t, y) = y^2(t\xi(t))^{-2}$ и $a_1 \colon D_0 \to R$ — производная функции A_1 в силу уравнения (17). Непосредственные вычисления показывают, что $a_1(t, y) > 0$ при $(t, y) \in \Phi_1$. Поэтому все точки Φ_1 — точки строгого входа для D_1 по отношению к уравнению (17). Действительно, пусть $P(t_0, y_0)$ — произвольная точка кривой Φ_1, а $J_P \colon (t, y_P(t))$ — интегральная кривая (17), проходящая через точку P. Тогда $A_1(t_0, y_P(t_0)) = M^2$, $a_1(t_0, y_P(t_0)) > 0$. Поэтому если $0 < t_0 < \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что $\operatorname{sign}(A_1(t, y_P(t)) - A_1(t_0, y_P(t_0))) = \operatorname{sign}(t - t_0)$, $|t - t_0| < \delta$, т. е. $\operatorname{sign}(|y_P(t)|(t\xi(t))^{-1} - M) = \operatorname{sign}(t - t_0)$, $|t - t_0| < \delta$. Значит, $(t, y_P(t)) \in D_1$, если $t_0 - \delta < t < t_0$, и $(t, y_P(t)) \overline{\in} \overline{D_1}$, если $t_0 < t < t_0 + \delta$. Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что $A_1(t, y_P(t)) < A_1(t_0,$

$y_P(t_0))$, если $\rho-\delta<t<\rho$, т. е. $|y_P(t)|(t\xi(t))^{-1}<M$, если $\rho-\delta<t<\rho$. Следовательно, каждая из интегральных кривых уравнения (17), пересекающих H, определена при $t\in(0,\rho]$ и лежит в D_1 при $t\in(0,\rho]$.

Пусть $G(\rho, y_G)\in H$ — произвольная фиксированная точка. Обозначим через $J_G:(t, y_{uG}(t))$ интегральную кривую (17), проходящую через точку G. Легко видеть, что $|y_{uG}(t)|\le Mt\xi(t)$, $|y'_{uG}(t)|\le 2M\xi(t)$, $t\in(0,\rho]$. Доопределим y_{uG}, y'_{uG} при $t=0$ по непрерывности, полагая $y_{uG}(0)=0$, $y'_{uG}(0)=0$.

Докажем, что $\forall\varepsilon>0$, $\forall t_1,t_2\in[0,\rho]:|t_1-t_2|\le\delta(\varepsilon)\Rightarrow|y'_{uG}(t_1)-y'_{uG}(t_2)|\le$ $\le\varepsilon$. В самом деле, нетрудно убедиться в том, что если $t_i\in[t(\varepsilon),\rho]$, $i\in\{1,2\}$, то

$$|y'_{uG}(t_1)-y'_{uG}(t_2)| \le B_*(\varepsilon)|t_1-t_2|+l_v|u'(t_1)-u'(t_2)|+l_w|u'(h(t_1))-u'(h(t_2))|.$$

Затем проводим те же рассуждения, что и в соответствующей части доказательства теоремы 1. Таким образом, доказано существование единственной функции $y_{uG}\in U$, которая при $t\in(0,\rho]$ является решением задачи Коши (17), (18) и удовлетворяет условию $y(\rho)=y_G$. Определим оператор $T_G:U\to U$, полагая $(T_Gu)(t)=y_{uG}(t)$. Поскольку выбор точки $G(\rho,y_G)\in H$ произволен, то мы определили семейство $T=\{T_G: G\in H\}$ операторов $T_G:U\to U$. Докажем, что каждый из операторов $T_G\in T$ непрерывен на U. Пусть $G(\rho,y_G)\in H$ — произвольная фиксированная точка, $u_i\in U$, $i\in\{1,2\}$, — произвольные фиксированные функции и $T_Gu_i=y_i$, $i\in\{1,2\}$. Если $u_1=u_2$, то и $y_1=y_2$. Пусть далее $\|u_1-u_2\|_B=r$, $r>0$. Очевидно, что $y_i\in U$, $i\in\{1,2\}$, и при $t\in$ $\in(0,\rho]$ выполнены тождества

$$y_i'(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\left(at^2+b_1y_i(t)+\frac{\alpha(t)}{t}y_i(t)+b_2\frac{t}{g(t)}u_i(g(t))+\right.$$
$$\left.+\,t\varphi\left(t,\frac{u_i(t)}{t},\frac{u_i(g(t))}{g(t)},\frac{u_i'(t)}{t}-\frac{u_i(t)}{t^2},\frac{u_i'(h(t))}{h(t)}-\frac{u_i(h(t))}{h^2(t)}\right)\right),\quad i\in\{1,2\}. \tag{19}$$

Выберем постоянную $\nu\in(0,1)$. Как и при доказательстве теоремы 1, при $t\in$ $\in(0,\rho]$ доказываются неравенства

$$|u_1(t)-u_2(t)| \le r^\nu(2Mt\xi(t))^{1-\nu},$$
$$|u_1(g(t))-u_2(g(t))| \le r^\nu(2Mt\xi(t))^{1-\nu},$$
$$|u_1(h(t))-u_2(h(t))| \le r^\nu(2Mt\xi(t))^{1-\nu},$$
$$|u_1'(t)-u_2'(t)| \le r^\nu(4M\xi(t))^{1-\nu},$$
$$|u_1'(h(t))-u_2'(h(t))| \le r^\nu(4M\xi(t))^{1-\nu},$$

с помощью которых нетрудно убедиться в том, что

$$t\left|\varphi\left(t,\frac{u_1(t)}{t},\frac{u_1(g(t))}{g(t)},\frac{u_1'(t)}{t}-\frac{u_1(t)}{t^2},\frac{u_1'(h(t))}{h(t)}-\frac{u_1(h(t))}{h^2(t)}\right)-\right.$$
$$\left.-\,\varphi\left(t,\frac{u_2(t)}{t},\frac{u_2(g(t))}{g(t)},\frac{u_2'(t)}{t}-\frac{u_2(t)}{t^2},\frac{u_2'(h(t))}{h(t)}-\frac{u_2(h(t))}{h^2(t)}\right)\right|\le$$
$$\le r^\nu(2Mt\xi(t))^{1-\nu}((L_1(t)+L_2(t))G(t)+(l_v+l_w+\omega_1(t))H(t), \tag{20}$$

где $\omega_1:(0,\rho)\to(0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0}\omega_1(t)=0$.

Будем изучать поведение интегральных кривых уравнения

$$y'(t)=\frac{1}{\alpha(t)}\left(at^2+b_1y(t)+\frac{\alpha(t)}{t}y(t)+b_2\frac{t}{g(t)}u_1(g(t))+\right.$$
$$\left.+\,t\varphi\left(t,\frac{u_1(t)}{t},\frac{u_1(g(t))}{g(t)},\frac{u_1'(t)}{t}-\frac{u_1(t)}{t^2},\frac{u_1'(h(t))}{h(t)}-\frac{u_1(h(t))}{h^2(t)}\right)\right). \tag{21}$$

Пусть функция $\gamma_G:(0,\tau)\to[1,+\infty)$ определена равенством

$$\gamma_G(t)=\begin{cases}G(t), & \text{если } \lim\limits_{t\to+0}G(t)=+\infty;\\ 1, & \text{если } \lim\limits_{t\to+0}G(t)=l_G,\ 1\le l_G<+\infty.\end{cases}$$

Пусть

$$\Phi_2=\{(t,y):t\in(0,\rho],\ |y-y_2(t)|=\eta r^{\nu}(t\xi(t))^{1-\nu}((L_1(t)+L_2(t))\gamma_G(t)+H(t))\},$$

$$D_2=\{(t,y):t\in(0,\rho],\ |y-y_2(t)|<\eta r^{\nu}(t\xi(t))^{1-\nu}((L_1(t)+L_2(t))\gamma_G(t)+H(t))\},$$

где η — постоянная, которая выбрана следующим образом:

$$\eta>\frac{(2M)^{1-\nu}}{b_1}\left(\frac{|b_2|}{L_1(\rho)+L_2(\rho)}+l_v+l_w+2\right),\quad \text{если}\quad \lim_{t\to+0}G(t)=+\infty,$$

или

$$\eta>\frac{(2M)^{1-\nu}}{b_1}\left(\frac{|b_2|l_G+1}{L_1(\rho)+L_2(\rho)+H(\rho)}+l_G+l_v+l_w+1\right),$$

если $\lim\limits_{t\to+0}G(t)=l_G,\quad 1\le l_G<+\infty.$

Пусть вспомогательная функция $A_2:D_0\to[0,+\infty)$ определяется равенством $A_2(t,y)=(y-y_2(t))^2((t\xi(t))^{1-\nu}((L_1(t)+L_2(t))\gamma_G(t)+H(t)))^{-2}$ и $a_2:D_0\to R$ — производная функции A_2 в силу уравнения (21). Нетрудно убедиться в том, что $a_2(t,y)>0$ при $(t,y)\in\Phi_2$. Поэтому все точки Φ_2 — точки строгого входа для D_2 по отношению к (21). (Для доказательства этого утверждения повторяются рассуждения, проведенные ранее в отношение кривой Φ_1.) При этом $y_1(\rho)=y_2(\rho)=y_G$ в силу определения оператора $T_G:U\to U$, о котором сейчас идет речь. Из этого следует, что интегральная кривая $(t,y_1(t))$ уравнения (21) при уменьшении t от $t=\rho$ до $t=0$ не может иметь общих точек с Φ_2, и поэтому остается в D_2 при $t\in(0,\rho]$. Таким образом, доказано, что

$$|y_1(t)-y_2(t)|<\eta r^{\nu}(t\xi(t))^{1-\nu}((L_1(t)+L_2(t))\gamma_G(t)+H(t)),\quad t\in(0,\rho]. \tag{22}$$

Из тождеств (19) с помощью (20), (22) получаем

$$|y_1'(t)-y_2'(t)|\le\frac{r^{\nu}}{t}((L_1(t)+L_2(t))\gamma_G(t)+H(t))\,\omega_2(t),\quad t\in(0,\rho], \tag{23}$$

где $\omega_2:(0,\rho)\to(0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0}\omega_2(t)=0$.

Из (22), (23) следует

$$|y_1(t)-y_2(t)|+|y_1'(t)-y_2'(t)|\le\frac{r^{\nu}}{t}((L_1(t)+L_2(t))\gamma_G(t)+H(t)),\quad t\in(0,\rho]. \tag{24}$$

Перейдем непосредственно к доказательству непрерывности оператора T_G. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Очевидно, существует такое $t(\varepsilon) \in (0, \rho)$, что $2Mt\xi(t) + 4M\xi(t) \leq \varepsilon/2$ при $t \in (0, t(\varepsilon)]$. Поэтому

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)| \leq |y_1(t)| + |y_2(t)| + |y_1'(t)| + |y_2'(t)| \leq$$
$$\leq 2Mt\xi(t) + 4M\xi(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in (0, t(\varepsilon)], \tag{25}$$

так как $y_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Пусть далее $t \in [t(\varepsilon), \rho]$. Тогда из (24) получаем

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)| \leq \frac{1}{t(\varepsilon)}((L_1(t(\varepsilon)) + L_2(t(\varepsilon)))\gamma_G(t(\varepsilon)) +$$
$$+ H(t(\varepsilon)))r^{\nu}, \quad t \in [t(\varepsilon), \rho]. \tag{26}$$

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{t(\varepsilon)\varepsilon}{2((L_1(t(\varepsilon)) + L_2(t(\varepsilon)))\gamma_G(t(\varepsilon)) + H(t(\varepsilon)))}\right)^{1/\nu}.$$

Если $\| u_1 - u_2 \|_B = r < \delta(\varepsilon)$, то из (26) следует

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [t(\varepsilon), \rho]. \tag{27}$$

Поскольку $y_i(0) = 0$, $y_i'(0) = (0)$, то из (25), (27) получаем

$$\max_{t \in [0,\rho]} (|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)|) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

или $\| y_1 - y_2 \|_B \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Проведенные рассуждения не зависят ни от выбора точки $G(\rho, \gamma_G) \in H$, ни от выбора $\varepsilon > 0$, ни от выбора $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Поэтому все операторы $T_G \in \mathrm{T}$ непрерывны на U. Доказательство теоремы 2 завершается применением принципа Шаудера неподвижной точки к каждому из операторов $T_G : U \to U$ семейства T.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
3. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 5. – С. 756–760.
4. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1959. – №8. – С. 155–198.
7. *Бравый Е. И.* Линейные функционально-дифференциальные уравнения с внутренними сингулярностями: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 1996. – 18 с.
8. *Kiguradze I., Sokhadze Z.* On the structure of the set of solutions of the weighted Cauchy problem for evolution singular functional differential equations //Fasciculi Mathematici. – 1998. – № 28. – P. 71–92.
9. *Smart D. R.* Fixed point theorems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974. – 94 p.
10. *Tenenbaum M., Pollard H.* Ordinary differential equations. – New York: Dover Publications, 1985. – 818 p.

Получено 16.06.99