УДК 512.54

В. И. Сенашов (Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, Красноярск)

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГРУПП СО СЛОЙНО КОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ*

We prove a theorem characterizing groups with a layer-finite periodic part in the class of the Shunkov groups with solvable finite subgroups.

Доведено теорему, що характеризує групи з шарово скінченною періодичною частиною у класі груп Шункова з розв'язними скінченними підгрупами.

С. Н. Черников ввел в рассмотрение [1] и полностью описал строение слойно конечных групп. В данной работе изучается вопрос: при каких условиях все элементы конечного порядка в группе образуют слойно конечную подгруппу. Доказана следующая **теорема**: *группа Шункова с разрешимыми конечными подгруппами тогда и только тогда имеет слойно конечную периодическую часть, когда в ней любая периодическая локально разрешимая подгруппа слойно конечна.*

Приведенная теорема является обобщением результата автора для периодических групп из [2]. Изложенное здесь позволяет восполнить пробел в доказательстве более общего результата автора из [3], которое опирается на теорему данной работы без ее доказательства.

Напомним, что группа называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Требование для группы быть группой Шункова в теореме, как показывают примеры групп Новикова–Адяна и Ольшанского [4, 5], отбросить нельзя. Более того, его даже нельзя заменить условием слабой сопряженно бипримитивной конечности, т. е. когда в группе любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. Чтобы это увидеть, достаточно взять свободное произведение двух циклических подгрупп порядка p^2 с объединенной подгруппой порядка p.

Результаты по характеризациям групп со слойно конечной периодической частью при других условиях можно найти в [6–8].

Приведем некоторые необходимые определения.

Под *локально конечным радикалом группы* подразумевается ее максимальная нормальная локально конечная подгруппа.

Если множество всех элементов конечного порядка в группе является подгруппой, то эту подгруппу называют *периодической частью группы*.

Если периодическая часть группы локально (слойно) конечна, то говорим, что группа имеет *локально* (*слойно*) *конечную периодическую часть*.

Элемент называется *строго вещественным* относительно инволюции, если он при сопряжении этой инволюцией переводится в обратный.

Приведем некоторые известные и вспомогательные результаты, на которые в дальнейшем будем ссылаться как на *предложения* с соответствующим номером.

1. *Лемма Дицмана.* В произвольной группе любое конечное инвариантное множество, состоящее из элементов конечного порядка, порождает конечную подгруппу [9].

2. Если в группе все локально конечные подгруппы слойно конечны, то и в фактор-группе по ее локально конечному нормальному делителю все локально конечные подгруппы также слойно конечны.

Доказательство легко получить, используя свойства слойно конечных групп.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00432).

3. Пусть G — группа Шункова, R — ее нормальная слойно конечная подгруппа. Тогда фактор-группа $\overline{G} = G/R$ также группа Шункова [10].

4. *Теорема Шункова* [11]. Пусть G — группа, a — ее элемент простого порядка $p \neq 2$, удовлетворяющие такому условию: подгруппы вида $\text{гр}(a, a^g)$, $g \in G$, конечны и почти все разрешимы. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

1) G имеет конечную периодическую часть;

2) элемент a содержится в некоторой конечной подгруппе из G, в нормализаторе которой бесконечно много элементов конечного порядка;

3) в G существует бесконечная периодическая (a)-инвариантная абелева подгруппа.

5. *Теорема Шмидта.* Расширение G локально конечной группы A с помощью локально конечной группы B локально конечно [9].

6. Пусть G — группа, A, B — некоторые ее локально конечные подгруппы с черниковскими примарными подгруппами. Если $A \cap B = D$ имеет конечные индексы в A и B, то D имеет подгруппу конечного индекса, в нормализатор которой входят A и B [12].

7. Если группа Шункова G не имеет локально конечной периодической части, то в ней найдется бесконечное множество сопряженных элементов конечного порядка, попарно порождающих конечные подгруппы.

Доказательство. Если классы сопряженных элементов конечного порядка из G конечны, то G имеет локально конечную периодическую часть. Значит, в G найдется бесконечный класс элементов, сопряженных с некоторым элементом g конечного порядка.

Среди подгрупп из (g) найдется подгруппа (a) (не обязательно отличная от (g)), лежащая в бесконечном классе сопряженных подгрупп в то время, когда классы сопряженных подгрупп с любой собственной подгруппой из (a) конечны. Покажем, что класс элементов, сопряженных с a, является искомым. Для этого рассмотрим в (a) подгруппу (b) простого индекса (это может быть, в частности, единичная группа) и заметим, что в силу выбора элемента (a) нормальное замыкание $\text{гр}(b^G)$ элемента b в группе G конечно. В фактор-группе $\overline{G} = G/\text{гр}(b^G)$ образы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}, \ldots$ элементов $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$, сопряженных с a, сопряжены и имеют простой порядок. Поскольку согласно предложению 3 $\overline{G}$ является группой Шункова, то группы $A_{ij} = \text{гр}(\overline{a_i}, \overline{a_j})$ для произвольных i, j конечны. Поскольку фактор-группа берется по конечной подгруппе, то полный прообраз группы A_{ij} конечен и содержит элементы a_i, a_j. Это означает, что все элементы, сопряженные с a, попарно порождают конечные подгруппы. Предложение доказано.

8. Пусть G — группа Шункова с бесконечным множеством элементов конечного порядка, K — ее конечная нормальная подгруппа. Тогда нормализатор циклической подгруппы, порожденной любым элементом $c \in K$, в группе G также содержит бесконечно много элементов конечного порядка.

Доказательство. Если классы сопряженных элементов конечного порядка из G конечны, то согласно лемме Дицмана G имеет бесконечную локально конечную периодическую часть и тогда, учитывая конечность индекса $|G : N_G((c))|$, получаем требуемое утверждение.

Пусть теперь G не имеет локально конечной периодической части. По предложению 7 в G найдется бесконечный класс сопряженных элементов конечного порядка $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, попарно порождающих конечные подгруппы. Рассмотрим подгруппы $g_1^{-1}(c)g_1, g_2^{-1}(c)g_2, \ldots, g_n^{-1}(c)g_n, \ldots$. Все они содержатся в конечной подгруппе K и, следовательно, среди них бесконечно много одинаковых, т. е. для бесконечного множества индексов $\mathfrak{N}$ имеем $g_i^{-1}(c)g_i = g_j^{-1}(c)g_j$ при $i, j \in \mathfrak{N}$. Тогда элементы конечных порядков $g_jg_i^{-1}$ содержатся в $N_G((c))$. Предложение доказано.

9. Пусть G — группа Шункова, в которой любая локально конечная подгруппа слойно конечна, K — ее конечная нормальная подгруппа. Если $C_G(K)$ имеет слойно конечную периодическую часть, то группа G также имеет слойно конечную периодическую часть.

Доказательство. Если группа G не имеет локально конечной периодической части, которая по условию предложения должна быть слойно конечной, то по предложению 7 в G имеется бесконечный класс сопряженных элементов конечного порядка $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, попарно порождающих конечные подгруппы. Рассмотрим последовательности длины $|K|$ элементов вида $\{g_n^{-1}a_1g_n, \ldots, g_n^{-1}a_{|K|}g_n\}$, где a_i — различные элементы из K. Поскольку группа K конечна и $g_n^{-1}a_ig_n \in K$, то различных последовательностей такого вида конечное число. Значит, для некоторого бесконечного подмножества $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ из множества $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ и для любого $i = 1, \ldots, |K|$ имеем $f_1^{-1}a_if_1 = f_2^{-1}a_if_2 = \ldots = f_n^{-1}a_if_n = \ldots$.

Тогда очевидно для любого $j = 1, 2, 3, \ldots$ элемент $f_jf_1^{-1}$ принадлежит централизатору $C_G(K)$. Так как элемент $h_j = f_jf_1^{-1}$ содержится в конечной подгруппе гр (f_j, f_1), то его порядок конечен.

Поскольку периодическая часть P группы $C_G(K)$ локально конечна, то группа $P_1 =$ гр (f_1, P) также локально конечна ввиду нормальности группы P в группе G и предложения 5. Значит, P_1 слойно конечна согласно условиям предложения и в то же время содержит бесконечно много сопряженных элементов $f_j = h_jf_1$. Противоречие. Предложение доказано.

Предпошлем доказательству теоремы ряд лемм, которые имеют самостоятельное значение.

Лемма 1. *Пусть G — группа Шункова с бесконечным множеством элементов конечного порядка, любая локально конечная подгруппа которой слойно конечна и локально разрешима. Тогда для любого элемента a простого порядка найдется конечная a-инвариантная подгруппа, в нормализаторе которой содержится бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Если порядок элемента a нечетен, то заключение леммы следует из предложения 4. Пусть порядок a равен двум.

Если в группе G число инволюций конечно, то искомой a-инвариантной группой является группа, порожденная всеми инволюциями из G. Для конечного числа инволюций утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $j_1, \ldots, j_n, \ldots$ — бесконечное множество инволюций группы G. Если среди элементов $aj_1, \ldots, aj_n, \ldots$ найдется хоть один элемент c нечетного порядка, то он является строго вещественным относительно инволюции a.

Докажем, что $N_G((c))$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Согласно предложению 4 элемент c либо содержится в некоторой конечной подгруппе K из G, в нормализаторе которой бесконечно много элементов конечного порядка, либо в G существует бесконечная периодическая c-инвариантная абелева подгруппа.

В первом случае $N_G((c))$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Действительно, учитывая конечность индекса $|N_G(K): N_G((c))|$ (теорема 2. 5. 6 из [9]) из предположения о конечности периодической части группы $N_G((c))$ согласно предложению 8 получили бы конечность периодической части группы $N_G(K)$, что неверно.

Во втором случае в группе G согласно предложению 5 найдется бесконечная локально конечная подгруппа, содержащая элемент c. Поскольку эта подгруппа слойно конечна в силу условий леммы, то $N_G((c))$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка согласно свойствам слойно конечных групп.

Таким образом, в случае нечетности порядка одного из элементов множества $aj_1, \ldots, aj_n, \ldots$ получаем утверждение леммы.

Осталось рассмотреть случай, когда все элементы $aj_1, \ldots, aj_n, \ldots$ имеют четные порядки (эти элементы не могут иметь бесконечные порядки вследствие того, что G является группой Шункова). В этом случае в каждой из подгрупп

$$\text{гр}\,(a, j_1), \ldots, \text{гр}\,(a, j_n), \ldots$$

найдутся центральные инволюции $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ соответственно.

Если среди инволюций $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ бесконечно много различных, то в $C_H(a)$ бесконечно много инволюций и снова получим утверждение леммы, выбрав в качестве конечной подгруппы группу (a).

Если же одна из инволюций, например t_1, встречается в множестве $\{t_k\}$ бесконечное число раз, то уже в ее централизаторе содержится a и бесконечно много инволюций. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — группа Шункова с бесконечным множеством элементов конечного порядка, любая локально конечная подгруппа которой слойно конечна и локально разрешима. Тогда любой элемент конечного порядка из G содержится в бесконечной локально конечной подгруппе.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент простого порядка группы G. Согласно лемме 1 найдется конечная a-инвариантная подгруппа K, в нормализаторе которой содержится бесконечно много элементов конечного порядка. В фактор-группе $G_1 = N_G(K)/K$ через a_1 обозначим образ элемента a, если этот образ неединичен, и произвольный элемент простого порядка из группы G_1 — в противном случае.

Согласно предложениям 2, 3 группа G_1 удовлетворяет всем условиям леммы. Снова воспользовавшись леммой 1, найдем в G_1 конечную a_1-инвариантную подгруппу K_1, в нормализаторе которой содержится бесконечно много элементов конечного порядка.

Предположим, что мы построили подгруппу K_n. В фактор-группе $G_{n+1} = N_{G_n}(K_n)/K_n$ выбираем элемент a_{n+1} — образ элемента a_n, если этот образ неединичен, и произвольный элемент простого порядка из группы G_n в противном случае. Согласно предложениям 2, 3 группа G_{n+1} удовлетворяет всем условиям леммы. С помощью леммы 1 находим в G_{n+1} конечную a_{n+1}-инвариантную подгруппу K_{n+1}, в нормализаторе которой содержится бесконечно много элементов конечного порядка.

Обозначив через L_l полный прообраз группы K_l в G, построим цепь

$$K < L_1 < \ldots < L_n < L_{n+1} < \ldots$$

конечных подгрупп, причем по построению каждая из подгрупп этой цепи a-инвариантна. Объединение этой цепи — бесконечная локально конечная a-инвариантная подгруппа, которая вместе с элементом a порождает согласно предложению 5 искомую бесконечную локально конечную подгруппу. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — группа Шункова с бесконечным множеством элементов конечного порядка, любая локально конечная подгруппа которой слойно конечна и локально разрешима. Тогда любая конечная подгруппа из G содержится в бесконечной локально конечной подгруппе.*

Доказательство. Пусть H — конечная подгруппа из G. Утверждение леммы докажем индукцией по порядку группы H. Если H простого порядка, то заключение леммы следует из леммы 2. Если порядок подгруппы H — составное число, то в силу разрешимости группа H содержит собственную неединичную нормальную подгруппу K, в нормализаторе которой, согласно индуктивному предположению, содержится бесконечно много элементов конечного порядка.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = N_G(K)/K$. В ней согласно предложениям 2, 3 выполняются все условия леммы и образ $\overline{H}$ подгруппы H имеет меньший порядок, чем $|H|$. Согласно индуктивному предположению группа $\overline{H}$ содержится в бесконечной локально конечной подгруппе из $\overline{G}$. Отсюда с помощью предложения 5 получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Определение. *Если конечная подгруппа L нормальна в любой подгруппе T группы G, как только L содержится в локально конечном радикале из T, то будем говорить, что подгруппа L группы G имеет свойство $(*)$.*

Понятие, аналогичное свойству $(*)$, впервые рассмотрел В. П. Шунков.

Лемма 4. *Если в группе G любая локально конечная подгруппа слойно конечна, то любая конечная подгруппа K группы G содержится в подгруппе L, имеющей свойство $(*)$.*

Доказательство. Пусть U_1 — подгруппа из G, имеющая локально конечный радикал W_1, содержащий K. Согласно условию леммы W_1 — слойно конечна. Из слойной конечности W_1 следует, что замыкание $Z_1 = \text{гр}\left(K^{U_1}\right)$ подгруппы K в U_1 конечно. Очевидно, что Z_1 нормальна в U_1. Если теперь нашлась подгруппа U_2, имеющая локально конечный радикал W_2, содержащий Z_1, то, как и выше, строим $Z_2 = \text{гр}\left(\left(K^{U_1}\right)^{U_2}\right)$.

Если процесс построения Z_i не обрывается, то объединение этой цепи является бесконечной локально конечной группой, которая содержит бесконечно много конечных подгрупп, изоморфных K. Согласно условию леммы подгруппа Z слойно конечна. Получаем противоречие со свойствами слойно конечных групп. Следовательно, процесс построения подгрупп Z_i должен оборваться на конечном шаге, но тогда в качестве L мы и возьмем последнюю подгруппу этой цепочки. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — сопряженно бипримитивно конечная группа, не имеющая локально конечной периодической части, любая локально конечная подгруппа которой слойно конечна и локально разрешима. Тогда централизатор любого элемента простого порядка группы G не имеет локально конечной периодической части.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент простого порядка p. Предположим, что $C_G(a)$ имеет локально конечную периодическую часть C. Согласно лемме 2 группа C бесконечна и согласно лемме Цорна ее можно включить в бесконечную максимальную локально конечную подгруппу H.

Если H содержит любой элемент, сопряженный с a в G, то вследствие слойной конечности H нормальное замыкание $\text{гр}(a^G)$ элемента a в группе G конечно. Тогда централизатор $C_G(a)$ имеет конечный индекс в G и согласно предложению 9 группа G должна иметь локальную конечную периодическую часть вопреки условию леммы.

Следовательно, существует элемент $a^g \notin H$. Поскольку G является группой Шункова, то группа $\text{гр}(a, a^g)$ — конечна и согласно лемме 3 и лемме Цорна ее можно включить в максимальную бесконечную локально конечную подгруппу B. Так как B слойно конечна, то $|B : B \cap C| < \infty$, но $C \leq H$ и, следовательно, $|B : B \cap H| < \infty$, причем $X = B \cap H \neq B$ ввиду включения $g^{-1}ag \in B \setminus H$. Поскольку H — слойно конечная подгруппа и $X < H$, то в H существует такая подгруппа N, что $X < N$, $X \neq N$ и $|N : X| < \infty$. Согласно предложению 6 X содержит такую подгруппу T конечного индекса в подгруппах N и B, что $B, N < N_G(T)$.

Рассмотрим группу $M = \text{гр}(N, B)$. Согласно построению N не содержится в B и, следовательно, в разности $M \setminus B$ имеются неединичные элементы конечных порядков. В фактор-группе $M/T = \overline{M}$ подгруппа $B/T = \overline{B}$ конечна. Если группа $\overline{M}$ имеет конечную периодическую часть, то полный прообраз этой периодической части вследствие предложения 5 тоже локально конечен и содержит B и N. Получили противоречие с выбором подгруппы B. Если же $\overline{M}$ имеет бесконечное множество элементов конечного порядка, то согласно предложениям 2, 3 $\overline{M}$ удовлетворяет всем условиям леммы 3. На основании леммы 3 можем включить $\overline{B}$ в локально конечную группу, не совпадающую с $\overline{B}$, а это снова противоречит согласно предложению 5 выбору B как максимально локально конечной подгруппы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — группа Шункова, не имеющая локально конечной периодической части, любая локально конечная подгруппа которой слойно конечна и локально разрешима. Тогда централизатор любой конечной подгруппы группы G не имеет локально конечной периодической части.*

Доказательство. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из G. Будем доказывать лемму индукцией по $|K|$. Если K имеет простой порядок, то утверждение леммы вытекает из леммы 5.

Пусть порядок группы K — составной. Ввиду ее разрешимости она имеет собственную нормальную подгруппу R. Обозначим $L = N_G(R)$. Согласно индуктивному предположению L не имеет локально конечной периодической части. Тогда и фактор-группа $\overline{L} = L/R$ по конечной подгруппе R не имеет локально конечной периодической части. Согласно предложениям 2, 3 группа $\overline{L}$ удовлетворяет всем условиям леммы. Поскольку порядок подгруппы $\overline{K} = K/R$ меньше, чем $|K|$, то согласно индуктивному предположению $G_{\overline{L}}(\overline{K})$ не имеет локально конечной периодической части.

Если бы централизатор $C_G(K)$ полного прообраза K группы $\overline{K}$ имел локально конечную периодическую часть, то согласно предложению 9 и $N_G(K)$ имел бы эти свойства. Поскольку фактор-группа берется по конечной подгруппе, то в $G_{\overline{L}}(\overline{K})$ все элементы конечных порядков являются образами элементов конечных порядков из $N_G(K)$. Следовательно, $G_{\overline{L}}(\overline{K})$ должна иметь локально конечную периодическую часть. Полученное противоречие означает, что $C_G(K)$ не имеет локально конечной периодической части. Лемма доказана.

Теорема. *Группа Шункова с разрешимыми конечными подгруппами тогда и только тогда содержит слойно конечную периодическую часть, когда в ней любая периодическая локально разрешимая подгруппа слойно конечна.*

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы очевидна, докажем его *достаточность.* Предположим, что теорема неверна, и множество групп Шункова с разрешимыми конечными подгруппами, в которых любая периодическая локально разрешимая подгруппа слойно конечна, и не имеющих слойно конечной периодической части, непусто.

Тогда непусто и множество $\mathfrak{M}$ подгрупп с перечисленными свойствами и единичными локально конечными радикалами. (Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть фактор-группы групп из рассматриваемого множества по их локально конечным радикалам: фактор-группы уже имеют единичные локально конечные радикалы и согласно предложениям 2, 3 остаются группами Шункова с разрешимыми конечными подгруппами, в которых любая периодическая локально разрешимая подгруппа слойно конечна, и, очевидно, эти группы снова не содержат слойно конечные периодические части).

Каждую нетривиальную конечную подгруппу K из G согласно лемме 4 можно включить в конечную подгруппу L со свойством $(*)$.

В качестве контрпримера к теореме теперь выберем группу G из множества $\mathfrak{M}$ с неединичной подгруппой L типа $(*)$ наименьшего возможного порядка.

Доказательство теоремы разбивается на ряд лемм.

Лемма 7. *Нормализатор любой неединичной подгруппы D, нормальной в подгруппе L типа $(*)$, содержится в $H = N_G(L)$.*

Доказательство. Пусть D — произвольная нетривиальная нормальная подгруппа из L.

Согласно предложениям 2, 3 фактор-группа $N = N_G(D)/D$, является группой Шункова, в ней любая периодическая локально разрешимая подгруппа слойно конечна. Согласно лемме 6 и предложению 5 эти группы снова не имеют слойно конечных периодических частей, причем неединичная подгруппа L/D имеет свойство $(*)$.

Если локально конечный радикал R группы N не содержит L/D, то фактор-группа $\overline{N} = N/R$ содержится в множестве $\mathfrak{M}$, а образ подгруппы L/D, имеющей свойство $(*)$, имеет порядок меньше, чем $|L|$. Противоречие с выбором контрпримера. Значит, L/D содержится в R, а соответственно подгруппа L содержится в локально конечном радикале группы $N_G(D)$. Тогда в силу свойства $(*)$ подгруппа L нормальна в $N_G(D)$. Лемма доказана.

Группа L конечна и согласно условию теоремы разрешима, поэтому она имеет характеристическую элементарную абелеву p-подгруппу A.

В дальнейшем используем обозначение $H = N_G(L)$.

Лемма 8. *Для любого неединичного элемента подгруппы A найдется перестановочный с ним элемент конечного порядка из $G \setminus H$.*

Доказательство. Пусть для некоторого неединичного элемента b из A все элементы конечных порядков из централизатора $C_G(b)$ принадлежат H. Если $b^g \in H$ для любого элемента $g \in G$, то группа $Z = \text{гр}(b^g \mid g \in G)$ также содержится в H и является нормальной в G. Пересечение $Z \cap L = Y$ нормально в Z и содержит элемент b. Поскольку Y — конечная группа, то она содержится в локально конечном радикале группы Z. Однако Z нормальна в G, а группа G неединичного локально конечного радикала не содержит. Противоречие.

Следовательно, найдется такой элемент $g \in G \setminus H$, что $\text{гр}(b, b^g) = F$ не содержится в H. Ввиду того, что G — группа Шункова, группа F конечна.

Воспользовавшись леммой Цорна, вложим F в максимальную локально конечную подгруппу X из G. Согласно лемме 3 X — бесконечная группа, и из ее слойной конечности следует, что $|X: C_G(b) \cap X| < \infty$.

Обозначим $V = C_G(b) \cap X$. Поскольку все элементы конечных порядков из $C_G(b)$ принадлежат H, то $V < H$ и подгруппа $V_1 = V \cap C_G(L)$ является подгруппой конечного индекса в X. Согласно теореме Пуанкаре (см., например, [13]) найдется подгруппа R из V_1 конечного индекса в X такая, что R нормальна в X. Таким образом, $L, X < N_G(R) = G_1$.

Если $\overline{G_1} = G_1/R$ не имеет локально конечной периодической части, то она согласно предложениям 2, 3 удовлетворяет всем условиям леммы 3, и в силу леммы 3 конечная группа $\overline{X} = X/R$ вкладывается в бесконечную локально конечную группу $\overline{B}$ из $\overline{G_1}$. Полный прообраз B группы $\overline{B}$ — локально конечная группа согласно предложению 5, и $X < B$. Противоречие с максимальностью X.

Следовательно, $\overline{G_1}$ имеет локально конечную периодическую часть. Согласно предложению 5 G_1 также содержит локально конечную периодическую часть. В силу леммы 4 подгруппа L нормальна в G_1, но G_1 не содержится в H. Противоречие. Лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы. Пусть S — подгруппа наибольшего порядка из A такая, что не все элементы конечных порядков из $T = N_G(S)$ содержатся в H. Согласно лемме 7 $S \neq A$, а ввиду леммы 8 $S \neq 1$.

Пусть c — произвольный элемент из $A \setminus S$. Если для некоторого $t \in T$ элемент $c^t \in T \setminus H$, то рассмотрим подгруппу $Q = \text{гр}\,(c, c^t)$. Поскольку G — группа Шункова, то Q конечна.

Если же $c^t \in H_1 = H \cap T$ для любого элемента t из T, то покажем, что T имеет локально конечный радикал, содержащий элемент c. Действительно, если все элементы вида $c^g (g \in T)$ принадлежат H, то группа $V = \text{гр}\,(c^g \mid g \in T)$ также содержится в H и нормальна в T. Пересечение $V \cap L = Y$ содержит элемент c и нормально в V. Поскольку Y — конечная группа, то V имеет неединичный локально конечный радикал, содержащий c. Однако V нормальна в T, значит, и T имеет локально конечный радикал, содержащий c. Тогда, взяв некоторый элемент y конечного порядка из $T \setminus H$ (такой элемент найдется ввиду выбора подгруппы S) имеем конечную подгруппу $\text{гр}\,(c, y)$, содержащую элемент c и не содержащуюся в H. В этом случае под Q будем подразумевать эту подгруппу.

Таким образом, нашлась конечная подгруппа $Q < T$, содержащая элемент c и не содержащаяся в H.

Согласно лемме 3 S содержится в бесконечной локально конечной подгруппе из G, которая в силу условий теоремы является слойной конечной. Отсюда по свойствам слойно конечных групп делаем вывод, что в T бесконечно много элементов конечного порядка. Теперь уже для группы T выполняются условия леммы 3. Согласно лемме 3 с помощью леммы Цорна включим Q в максимальную бесконечную локально конечную подгруппу W из T. Поскольку W слойно конечна, то подгруппа $W_1 = C_T(c) \cap W$ имеет конечный индекс в группе W. Вследствие максимальности подгруппы S все элементы конечных порядков из $C_T(c)$ содержатся в H_1. Следовательно, W_1 — бесконечная подгруппа из H_1. Поскольку $C_G(L)$ имеет конечный индекс в H и $W_1 < H$, то подгруппа $W_2 = C_G(L) \cap W_1$ имеет конечный индекс в W_1. Согласно теореме

Пуанкаре (см., например, [12]), существует подгруппа Z из W_2, нормальная в W и имеющая в ней конечный индекс. Таким образом, $L, W < N_G(Z)$.

Рассмотрим подгруппу $M = \text{гр}(L, W)$. Она не имеет локально конечной периодической части, так как согласно лемме 4 в этом случае L нормальна в M, но M не является подгруппой H. Значит, в силу леммы 6 $C_M(S)$ не имеет локально конечной периодической части.

Пусть $T_1 = M \cap T$. Поскольку подгруппа Z нормальна в M, то можем перейти к фактор-группе $\overline{M} = M/Z$. Обозначим $\overline{T_1} = T_1/Z$, $\overline{W} = W/Z$. Если в $\overline{T_1}$ бесконечно много элементов конечного порядка, то согласно предложениям 2, 3 можем применить к группе $\overline{T_1}$ лемму 3, согласно которой $\overline{W}$ вкладывается в бесконечную локально конечную подгруппу из $\overline{T_1}$. Тогда, возвращаясь к полным прообразам, получаем, что W попадает в большую локально конечную подгруппу из T_1 (предложение 5). Противоречие с максимальностью W. Следовательно, в $\overline{T_1}$ множество элементов конечного порядка конечно и тогда в силу предложения 5 $T_1 = N_M(S)$ имеет локально конечную периодическую часть. Однако выше показано, что подгруппа $C_M(S)$ группы T_1 не имеет локально конечной периодической части. Полученное противоречие доказывает теорему.

1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. – 1945. – С. 71–74.
2. *Сенашов В. И.* Характеризация слойно конечных групп в классе периодических групп // Алгебра и логика. – 1985. – **24**, № 5. – С. 608–617.
3. *Сенашов В. И.* Группы со слойно конечной периодической частью // Сиб. мат. журн. – 1997. – **38**, № 6. – С. 1374–1386.
4. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
5. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группе. – М.: Наука, 1989. – 448 с.
6. *Ivko M. N., Senashov V. I.* On a new class of infinite groups // Укр. мат. журн. – 1995. – **46**, № 6. – С. 760–770.
7. *Ивко М. Н., Шунков В. П.* Об одной характеризации групп, обладающих слойно конечной периодической частью // Тр. Ин-та математики НАН Украины. Бесконечные группы и примыкающие алгебраич. структуры. – 1993. – **1**. – С. 17–25.
8. *Ивко М. Н.* Об одной характеризации групп со слойно конечной периодической частью // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7, 8. – С. 942–946.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
10. *Шунков В. П.* О достаточных признаках существования в группе бесконечных локально конечных подгрупп // Алгебра и логика. – 1976. – **15**, № 6. – С. 716–737.
11. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.
12. *Шунков В. П.* О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. – 1971. – **10**, № 12. – С. 199–225.
13. *Курош А. Г.* Теория групп. 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Получено 06.05.99