УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ. II

In normed spaces of functions analytic in the Jordan domain $\Omega \subset \mathbb{C}$, we establish exact order estimates of the Kolmogorov widths of classes of functions which, in Ω, are representable by Cauchy-type integrals along $\Gamma = \partial\Omega$ with densities $f(\cdot)$ such that $f \circ \Psi \in L^{\Psi}_{\beta,p}(T)$. Here, Ψ is a conformal mapping of $C \setminus \overline{\Omega}$ onto $\{w: |w| > 1\}$ and $L^{\Psi}_{\beta,p}(T)$ is some subset of infinitely differentiable functions on $T = \{w: |w| = 1\}$.

У нормованих просторах функцій, аналітичних в жордановій області $\Omega \subset \mathbb{C}$, встановлено точні за порядком оцінки поперечників за Колмогоровим класів функцій, що зображуються в Ω інтегралами типу Коші вздовж $\Gamma = \partial\Omega$ зі щільностями $f(\cdot)$, для яких $f \circ \Psi \in L^{\Psi}_{\beta,p}(T)$, де Ψ — конформне відображення $C \setminus \overline{\Omega}$ на $\{w: |w| > 1\}$, а $L^{\Psi}_{\beta,p}(T)$ — деяка підмножина нескінченно диференційовних функцій на $T = \{w: |w| = 1\}$.

Настоящая статья является второй частью работы [12]. При этом сохраняются принятые обозначения и определения.

Как и в первой части работы, основной результат — оценки величин $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \vec{A}_q(\overline{\Omega}))$ — колмогоровских поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ в пространстве $\vec{A}_q(\overline{\Omega})$ (аналитических в области Ω функций). Отличие в данном случае состоит в ограничениях на последовательность $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$, определяющую класс $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$. Во всей шкале классов $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ выделяются множества, которые в смысле оценок их приближения на $\overline{\Omega}$ n-мерными подпространствами занимают промежуточное положение между классами функций, аналитически продолжимых из области Ω через ее границу (см. [12]), и классами функций, аналитических в Ω и имеющих определенную „среднюю" степень гладкости на границе области Ω, если гладкость выражать в терминах свойств либо обычных производных [13], либо обобщенной (ψ, β)-производной функции [14].

Отметим, что в [15] приведены установленные автором оценки величин $d_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q)$ для классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ 2π-периодических функций в пространстве $L_q(0; 2\pi)$ при некоторых соотношениях между p и q и тех же ограничениях на функции $\psi(\cdot)$, что и в теореме 1 (см. ниже). В частном случае, когда $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$ задача об оценке величин $d_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q)$ была решена В. Н. Темляковым [16,17] и А. К. Кушпелем [18] (оценки снизу), А. И. Степанцом, А. К. Кушпелем [19] и А. К. Кушпелем [20] (оценки сверху).

1. Основной результат. Обозначим через I^a множество функций $s(\cdot)$:

$$I^a := \{s: (\exists C > 0\ \ \forall t_1, t_2,\ 1 \le t_1 \le t_2: s(t_1) \le C s(t_2))\}$$

и положим

$$\mathfrak{M}''_{\infty} = \left\{ \psi \in I_0: \eta(t) - t \in I^a,\ \frac{t}{\eta(t) - t} \uparrow \infty \right\},$$

где $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$; $\psi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi(\cdot)$. В частности, множеству $\mathfrak{M}''_{\infty}$ принадлежит функция $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$.

Теорема 1. *Пусть* Ω *— область, ограниченная кривой* $\Gamma \in RA_q$, $q > 1$. *Тогда если* $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \begin{cases} \psi(n)(\eta(n)-n)^{1/p-1/q}, & 1 < p \le q \le 2, \\ \psi(n), & 2 \le p \le q < \infty, \\ \psi(n), & 2 \le q \le p < \infty, \\ \psi(n)(\eta(n)-n)^{1/p-1/2}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

***Замечание* 1.** В частном случае М. З. Двейрин [9] доказал равенство

$$d_n(FH^{\overline{K}_1}_{p,K_1}; H_p) = R^{-n^r}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{2} \le r \le 1, \quad R > 1,$$

где $FH^{\overline{K}_1}_{p,K_1}$ — класс аналитических в $D = \{w: |w| < 1\}$ функций, определяющихся сверткой Адамара, совпадающий с классом $L^\psi_{0,p}(D)$ при $\psi(t) = R^{-t^r}$, $R > 1$.

При $r = 1$ результат М. З. Двейрина согласуется с теоремой 1 из [12].

***Замечание* 2.** Если $\psi(t) = R^{-t^r}$, $R > 1$, $0 < r < 1$, то $\eta(n) - n \asymp n^{1-r}$.

2. Вспомогательное утверждение. Построим последовательность $\{\mathcal{N}_j, j \in \mathbb{N}\}$ натуральных чисел согласно следующей рекуррентной формуле: положим $\mathcal{N}_1 = 1$, а $\mathcal{N}_{k+1} = [\eta(\mathcal{N}_k)] + 1$, $k = 1, 2, \ldots$, где $[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Утверждение 1. *Если* $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, *то*

$$\psi(\mathcal{N}_k) \asymp \psi(\mathcal{N}_{k+1}). \tag{2}$$

Доказательство. Соотношение $\psi(\mathcal{N}_k) >> \psi(\mathcal{N}_{k+1})$ — тривиально: при любом $k \in \mathbb{N}$ $\psi(\mathcal{N}_{k+1}) \le \psi(\eta(\mathcal{N}_k)) = \psi(\mathcal{N}_k)/2$. Доказательство соотношения $\psi(\mathcal{N}_k) << \psi(\mathcal{N}_{k+1})$ также несложно. Поскольку для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$0 < \mathcal{N}_{k+1} - \eta(\mathcal{N}_k) \le 1 \tag{3}$$

и для любого $t \ge 1$ $\eta(t) - t \ge (\eta(1)-1)/C = C^*$, то полагая $r = [1/C^*] + 1$ и $n_1 = \eta(\mathcal{N}_k)$, $n_j = \eta(n_{j-1})$, $j = 2, 3, \ldots$, получаем

$$n_{r+1} - n_1 = (n_{r+1} - n_r) + (n_r - n_{r-1}) + \cdots + (n_2 - n_1) \ge rC^* \ge 1. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что $n_{r+1} > \mathcal{N}_{k+1}$ при любом $k \in \mathbb{N}$ (r не зависит от k), а следовательно, $\psi(n_{r+1}) \le \psi(\mathcal{N}_{k+1})$. Однако, очевидно, $\psi(n_{r+1}) = \psi(\mathcal{N}_k)/2^r$, откуда следует $\psi(\mathcal{N}_k) << \psi(\mathcal{N}_{k+1})$.

3. Доказательство теоремы 1. ***Оценки снизу.*** Прежде всего заметим, что соотношение (1) достаточно доказать только для n, пробегающих последовательность $\{\mathcal{N}_j, j \in \mathbb{N}\}$, определенную в предыдущем пункте. В самом деле, пусть задано произвольное $n \in \mathbb{N}$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $\mathcal{N}_k \le n < \mathcal{N}_{k+1}$. Тогда в силу утверждения 1 $\psi(\mathcal{N}_k) \le C_1\psi(n)$ и $\psi(\mathcal{N}_{k+1}) \ge C_2\psi(n)$. Далее на основании неравенств

$$\frac{1}{K} \le \frac{\eta(l)-l}{\eta(m)-m} \le K, \quad K > 1, \tag{5}$$

где $m \in \mathbb{N}$ — произвольное, $l \in [m;\eta(m)]$ ([3, с. 186], соотношение (5.6)), можем записать

$$\eta(\mathcal{N}_k) - \mathcal{N}_k \le K(\eta(n)-n).$$

В самом же определении множества $\mathfrak{M}''_\infty$ заложено неравенство

$$\eta(\mathcal{N}_{k+1}) - \mathcal{N}_{k+1} \ge C(\eta(n)-n),$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от n.

Сопоставление выписанных неравенств с соотношением

$$d_{\mathcal{N}_{k+1}}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\bar{A}_q(\overline{\Omega})) \le d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\bar{A}_q(\overline{\Omega})) \le d_{\mathcal{N}_k}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\bar{A}_q(\overline{\Omega}))$$

позволяет сделать заключение о справедливости соотношения (1) при всех $n \in \mathbb{N}$ в предположении, что оно выполняется при $n = \mathcal{N}_j$, $j = 1, 2, \ldots$.

Учитывая изложенное выше, докажем вначале оценку снизу в (1) в случае $q = 2$.

Согласно соотношению (10) из [12]

$$d_{\mathcal{N}_j}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\bar{A}_2(\overline{\Omega})) >> d_{\mathcal{N}_j}(L^{\psi}_{\beta,p}(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}};\ L_2(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}), \qquad (6)$$

где, напомним, $\mathcal{P}_m$ — пространство алгебраических полиномов степени m.

Дальнейшая схема доказательства подобна той, которая применялась при установлении оценок снизу величин $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\bar{A}_q(\overline{\Omega}))$ при $q = 2$ в теореме 1 из [12].

Пусть $j \in \mathbb{N}$ — фиксированное и $\tau = \{\tau_s\}_{s=0}^{\mathcal{N}_{j+1}}$ — произвольная, упорядоченная каким-либо образом, ортонормированная система функций в $L_2(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}$ и

$$S_k(f;\tau;w) := \sum_{s=0}^{k}(f;\tau_s)\,\tau_s(w),$$

где $(f;\tau_s)$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$ по системе τ.

Имеем

$$w^k = \sum_{s=0}^{\mathcal{N}_{j+1}}(w^k;\tau_s)\,\tau_s(w), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_{j+1},$$

$$\tau_l(w) = \sum_{k=0}^{\mathcal{N}_{j+1}}(\tau_l;w^k)\,w^k, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_{j+1},$$

и

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}_{j+1}}\left|a_s^k\right|^2 = \sum_{s=0}^{\mathcal{N}_{j+1}}\left|a_s^k\right|^2 = 1,$$

где $a_s^k := (w^k;\tau_s)$. Погрешность приближения в пространстве $L_2(T)$ функции w^k, $w \in T$, ее частной суммой Фурье порядка $\mathcal{N}_j - 1$ по системе τ легко вычисляется:

$$\left\| w^k - \sum_{s=0}^{\mathcal{N}_j-1} a_s^k \tau_s(w)\right\|_{T,2}^2 = \left\|\sum_{s=\mathcal{N}_j}^{\mathcal{N}_{j+1}} a_s^k \tau_s(w)\right\|_{T,2}^2 = \sum_{s=\mathcal{N}_j}^{\mathcal{N}_{j+1}}\left|a_s^k\right|^2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_{j+1}. \qquad (7)$$

Рассмотрим функции

$$f_l^{(1)}(w) = \Delta_l^{-1/2} \sum_{k \in I_l} \psi(k) w^k, \quad l = 0, 1, \ldots, j,$$

при $2 \le p < \infty$ и

$$f_l^{(2)}(w) = \Delta_l^{1/p-1} \sum_{k \in I_l} \psi(k) w^k, \quad l = 0, 1, \ldots, j,$$

при $1 < p \le 2$, где $I_l = (\mathcal{N}_l; \mathcal{N}_{l+1}]$, $l = 1, 2, \ldots, j$, $\Delta_l = \mathcal{N}_{l+1} - \mathcal{N}_l$, $I_0 = [0;1]$, $\Delta_0 = 1$ (полагаем, что $\psi(0) = 1$).

Используя неравенство (5.30) из [3, с. 214], легко заключить, что для некоторого $C > 0$

$$C f_l^{(1)} \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}} \text{ при } 2 \le p < \infty$$

и

$$C f_l^{(2)} \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}} \text{ при } 1 < p \le 2.$$

В дальнейшем без потери общности считаем, что $C = 1$.

Положим

$$f_l^*(t) = \sum_{k \in I_l} \psi(k) e^{ikt}, \quad \chi_s(t) = \tau_s(e^{it}), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_{j+1}.$$

и пусть

$$R_l(\theta) := \left\| f_l^*(\cdot + \theta) - S_{\mathcal{N}_j - 1}(f_l^*(\cdot + \theta); \chi) \right\|_2^2,$$

где $S_n(f_l^*; \chi)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f_l^*(\cdot)$ по системе $\chi = \{\psi_s\}_{s=0}^n$.

Тогда, с учетом равенства (7), введя обозначение $\tilde{I}_j = [\mathcal{N}_j; \mathcal{N}_{j+1}]$, $j \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$R_l(\theta) = \left\| \sum_{k \in I_l} e^{ik\theta} \psi(k) \sum_{s \in \tilde{I}_j} a_s^k \chi_s(\cdot) \right\|_2^2 = \sum_{s \in \tilde{I}_j} \left| \sum_{k \in I_l} a_s^k e^{ik\theta} \psi(k) \right|^2. \tag{8}$$

Значит,

$$\sigma_l := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_l(\theta) d\theta = \sum_{s \in \tilde{I}_j} \sum_{k \in I_l} \psi^2(k) \left| a_s^k \right|^2. \tag{9}$$

Покажем, что существует постоянная $C > 0$ (возможно, зависящая от $\psi(\cdot)$, но не зависящая от j) такая, что для некоторого l, $0 \le l \le j$,

$$\sigma_l \ge C \Delta_j \psi^2(\mathcal{N}_j). \tag{10}$$

Предположим противное. Тогда, так как для любого l, $0 \le l \le j$,

$$\psi^2(\mathcal{N}_{l+1}) \sum_{s \in \tilde{I}_j} \sum_{k \in I_l} \left| a_s^k \right|^2 \le \sigma_l \le \psi^2(\mathcal{N}_l) \sum_{s \in \tilde{I}_j} \sum_{k \in I_l} \left| a_s^k \right|^2,$$

то при каждом $j \in \mathbb{N}$

$$\Delta_j+1 = \sum_{l=0}^{j}\left(\sum_{s\in \bar I_j}\sum_{k\in I_l}\left|a_s^k\right|^2\right) \le \sum_{l=0}^{j}\frac{\sigma_l}{\psi^2(\mathcal{N}_{l+1})} \le C\Delta_j\,\psi^2(\mathcal{N}_j)\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{\psi^2(\mathcal{N}_{l+1})}, \tag{11}$$

какое бы ни было $C>0$.

Соотношение (11) становится противоречивым, если показать, что при некотором $C_0>0$, не зависящем от j,

$$\alpha(j) := \psi(\mathcal{N}_j)\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{\psi(\mathcal{N}_{l+1})} < C_0. \tag{12}$$

Представим $\alpha(j)$ в виде $\alpha(j)=\alpha_1(j)+\alpha_2(j)$, где $\alpha_1(j)=\psi(\mathcal{N}_j)\times$ $\times\sum_{l=1}^{j-1}1/\psi(\mathcal{N}_{l+1})$ и $\alpha_2(j)=\psi(\mathcal{N}_j)/\psi(\mathcal{N}_{j+1})$. Тогда оценка для $\alpha_2(j)$ содержится в утверждении 1: $\alpha_2(j)<C_1$, где C_1 — постоянная, не зависящая от j. Далее, достаточно заметить, что для любого $r\in\mathbb{N}$ $\psi(\mathcal{N}_r)\le\psi(\mathcal{N}_{r-1})/2$, чтобы записать $\alpha_1(j)<2$ и тем самым убедиться в справедливости неравенства (12), а значит, и (10).

Таким образом, возвращаясь к соотношениям (10) и (9), можно заключить, что для некоторого l, $0\le l\le j$, существует $\theta^*\in[-\pi,\pi]$, для которого

$$R_l(\theta^*) \gg \Delta_j\psi^2(\mathcal{N}_j),$$

т. е.

$$\left\|f_l^*(\cdot+\theta^*)-S_{\mathcal{N}_j-1}(f_l^*(\cdot+\theta^*);\chi)\right\|_2 \gg \Delta_j^{1/2}\psi(\mathcal{N}_j).$$

Следовательно, полагая

$$h_l(t) = \begin{cases}\Delta_l^{-1/2}f_l^*(t) & \text{при}\quad 2\le p<\infty,\\ \Delta_l^{1/p-1}f_l^*(t) & \text{при}\quad 1<p\le 2,\end{cases}$$

убеждаемся, что $h_l\in L^{\psi}_{\beta,p}(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}$ и

$$\left\|h_l(\cdot+\theta^*)-S_{\mathcal{N}_j-1}(h_l(\cdot+\theta^*);\chi)\right\|_2 \gg \begin{cases}\Delta_l^{-1/2}\Delta_j^{1/2}\psi(\mathcal{N}_j), & 2\le p<\infty,\\ \Delta_l^{1/p-1}\Delta_j^{1/2}\psi(\mathcal{N}_j), & 1<p\le 2.\end{cases} \tag{13}$$

Однако, если $\psi\in\mathfrak{M}''_\infty$, то существует постоянная $C'>0$ такая, что для любого l, $0\le l\le j$, $\Delta_l\le C'\Delta_j$.

Поэтому следствием соотношения (13) являются такие оценки:

$$d_{\mathcal{N}_j}\left(L^{\psi}_{\beta,p}(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}};\ L_2(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}\right) \asymp \left\|h_l(\cdot+\theta^*)-S_{\mathcal{N}_j-1}(h_l(\cdot+\theta^*);\chi)\right\|_2 \gg$$
$$\gg \begin{cases}\psi(\mathcal{N}_j), & 2\le p<\infty,\\ \psi(\mathcal{N}_j)(\eta(\mathcal{N}_j)-\mathcal{N}_j)^{1/p-1/2}, & 1<p\le 2,\end{cases} \tag{14}$$

сопоставляя которые с соотношением (6), получаем требуемые оценки снизу в (1) в случае $q=2$.

Соотношение (14) является отправным для получения оценок снизу в (1) при $q\ne 2$. Пусть сначала $1<p\le q<2$. Тогда для произвольной линейно независимой системы функций $\varphi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}_j}$ из $\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}$, обозначая через $S_n[g]$ частную сумму Фурье порядка n по системе $w^k, k=0,1,\dots$, функции $g(w)$, имеем

$$\sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}} \inf_{c_i}\left\| f-\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_j} c_i\varphi_i\right\|_{T,q} \overset{(a)}{\gg}$$

$$\overset{(a)}{\gg} \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}} \inf_{c_i}\left\|(S_{\mathcal{N}_{j+1}}-S_{\mathcal{N}_j})[f]-\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_j} c_i(S_{\mathcal{N}_{j+1}}-S_{\mathcal{N}_j})[\varphi_i]\right\|_{T,q} \overset{(b)}{\gg}$$

$$\overset{(b)}{\gg} \Delta_j^{1/2-1/q} \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}} \inf_{c_i}\left\| f-\left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_j} c_i(S_{\mathcal{N}_{j+1}}-S_{\mathcal{N}_j})[\varphi_i]+S_{\mathcal{N}_j}[f]\right]\right\|_{T,2} \overset{(c)}{\gg}$$

$$\overset{(c)}{\gg} \Delta_j^{1/2-1/q}\, d_{\mathcal{N}_j}(L^{\psi}_{\beta,p}(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}};\, L_2(T)\cap\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}) \overset{(d)}{\gg} \psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p-1/q}. \qquad (15)$$

В этой цепочке при переходе (a) использована ограниченность оператора Фурье $S_n: L_q(T)\to L_q(T)$, $1<q<\infty$; неравенство (b) является следствием соотношения (7) из [12] и того факта, что $S_{\mathcal{N}_{j+1}}[f]=f$, если $f\in\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}$; справедливость соотношения (c) основана на том, что поскольку, начиная с некоторого $j\in\mathbb{N}$ $\mathcal{N}_{j+1}-\mathcal{N}_j\le\mathcal{N}_j-1$ (см. соотношение $\dfrac{t}{\eta(t)-t}\uparrow\infty$ в определении множества $\mathfrak{M}''_{\infty}$), а $(S_{\mathcal{N}_{j+1}}-S_{\mathcal{N}_j})[\varphi_i]\in\mathcal{P}_{\mathcal{N}_j+1,\mathcal{N}_{j+1}}$, и $S_{\mathcal{N}_j}[f]\in\mathcal{P}_{\mathcal{N}_j}$, то в квадратных скобках при каждом фиксированном $f\in\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}$ и фиксированных c_i, $i=1,2,\dots,\mathcal{N}_j$, содержится элемент линейной оболочки $\mathcal{L}$, натянутой на систему, состоящую из не более чем $\mathcal{N}_j$ взаимно ортогональных функций: $\mathcal{L}=\operatorname{span}\left\{S_{\mathcal{N}_j}[f],\{w^k\}_{k=\mathcal{N}_j+1}^{\mathcal{N}_{j+1}}\right\}$, неравенство (d) следует из соотношения (14).

Сопоставляя соотношение (15) с (10) из [12] и учитывая замечание, сделанное в начале пункта, получаем

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n)(\eta(n)-n)^{1/p-1/q}, \quad 1<p\le q\le 2.$$

Для случая $1<p\le 2\le q<\infty$ непосредственно из последней оценки находим

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\tilde{A}_2(\overline{\Omega})) \gg \psi(n)(\eta(n)-n)^{1/p-1/2}.$$

В случае, когда $2\le p\le q<\infty$ или $2\le q\le p<\infty$, для получения оценки

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n)$$

достаточно воспользоваться соотношениями (6) и (14) (ринимая во внимание, что $\tilde{A}_q(\overline{\Omega})\subset\tilde{A}_2(\overline{\Omega})$) при $q\ge 2$).

Оценки сверху в случаях $1<p\le q\le 2$ и $1<q\le\cdot<\infty$ вытекают из следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* Ω *— область, ограниченная кривой* $\Gamma\in RA_q$, $1<p$, $q<$ $<\infty$ *и* $\psi\in\mathfrak{M}''_{\infty}$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тогда*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \ll \psi(n)(\eta(n)-n)^{(1/p-1/q)_+}, \qquad (16)$$

где $a_+ := \max\{0; a\}$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно использовать соотношение (16) из [12], а затем сослаться на теорему 6.1 из [3, с. 219] (см. также неравенство (6.30′) [3, с. 225]).

Продолжим установление оценок сверху в теореме 1 в оставшихся случаях.

Итак, пусть теперь $1 < p \le 2 \le q < \infty$. Как было отмечено ранее, оценку достаточно установить для значений n, пробегающих последовательность $\{\mathcal{N}_j;\ j \in \mathbb{N}\}$.

Положим для любой функции $f \in L^{\Psi}_{\beta,p}(\Gamma)$ и $z \in \Omega$

$$\varphi_0(z) = S^F_{\mathcal{N}_0}(\mathcal{K} f; z), \quad \mathcal{N}_0 = 0,$$

и

$$\varphi_k(z) = S^F_{\mathcal{N}_{k+1}-1}(\mathcal{K} f; z) - S^F_{\mathcal{N}_k-1}(\mathcal{K} f; z), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда согласно теореме 2, с учетом соотношения $E_n(L^{\Psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \asymp \mathcal{E}_n(L^{\Psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q}$, $1 < q < \infty$, при $k \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi_k\|_{\Gamma,p} \le \left\|S^F_{\mathcal{N}_{k+1}-1}(\mathcal{K} f;\cdot) - \mathcal{K} f(\cdot)\right\|_{\Gamma,p} + \left\|S^F_{\mathcal{N}_k-1}(\mathcal{K} f;\cdot) - \mathcal{K} f(\cdot)\right\|_{\Gamma,p} <<$$

$$<< \psi(\mathcal{N}_{k+1}) + \psi(\mathcal{N}_k) << \psi(\mathcal{N}_k)$$

(в последнем неравенстве использовано утверждение 1) и

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\mathcal{K} f(\cdot) - \sum_{k=0}^{l}\varphi_k(\cdot)\right\|_{\Gamma,p} = \lim_{l\to\infty}\left\|\mathcal{K} f(\cdot) - S^F_{\mathcal{N}_{l+1}-1}(\mathcal{K} f;\cdot)\right\|_{\Gamma,p} = 0,$$

т. е. $\mathcal{K} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)$, $z \in \Omega$, (сходимость по норме пространства $\tilde{A}_p(\overline{\Omega})$). Таким образом, справедливо вложение

$$L^{\Psi}_{\beta,p}(\Omega) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q^{(k)}_p(\Omega), \tag{17}$$

где $Q^{(0)}_p(\Omega)$ — множество всевозможных постоянных, а при $k \in \mathbb{N}$

$$Q^{(k)}_p(\Omega) := \left\{f \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_k) : \|f\|_{\Gamma,p} << \psi(\mathcal{N}_k)\right\};$$

$\mathcal{P}(\mathcal{N}_k)$ — пространство алгебраических полиномов вида $\sum_{m=\mathcal{N}_k}^{\mathcal{N}_{k+1}-1} c_m z^m$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть далее $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность целых неотрицательных чисел такая, что $\sum_{k=0}^{\infty} m_k \le n$. Тогда на основании леммы Майорова [10] и вложения (17) имеем

$$d_n(L^{\Psi}_{\beta,p}(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) << d_{m_0}(Q^{(0)}_p(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) + \sum_{j=1}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\, d_{m_j}(\tilde{B}^{(j)}_p(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})), \tag{18}$$

где

$$\tilde{B}^{(j)}_p(\Omega) = \left\{f \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_j) : \|f\|_{\Gamma,p} \le 1\right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, полагая $m_0 = 1$ (так, что $\sum_{k=1}^{\infty} m_k \le n-1$), получаем неравенство

$$d_n(L^{\Psi}_{\beta,p}(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) << \sum_{j=1}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\, d_{m_j}(\tilde{B}^{(j)}_p(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \tag{19}$$

Далее, учитывая, что согласно неравенству (7)

$$\bar{B}_p^{(j)}(D) \subset C\Delta_j^{1/p-1/2}\bar{B}_2^{(j)}(D),$$

где C — постоянная, не зависящая от j, $\Delta_j := \mathcal{N}_{j+1} - \mathcal{N}_j$, $j \in \mathbb{N}$, используя свойства операторов $\mathcal{F}^{\Omega}$ и $\mathcal{F}_{\Omega}$ (см. утверждение 1 из [12]), записываем

$$d_{m_j}(\bar{B}_p^{(j)}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll d_{m_j}(\bar{B}_p^{(j)}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)) \ll$$

$$\ll d_{m_j}(\bar{B}_p^{(j)}(D); L_q(T) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)) \ll$$

$$\ll \Delta_j^{1/p-1/2} d_{m_j}(\bar{B}_p^{(j)}(D); L_q(T) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)).$$

Сопоставляя это соотношение с (19), имеем

$$d_m(L_{\beta,p}^{\psi}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j)\, \Delta_j^{1/p-1/2} d_{m_j}(\bar{B}_2^{(j)}(D); L_q(T) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)).$$

Далее, понятно, что между пространствами $L_q(T) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)$ и $L_q(T) \cap \mathcal{P}_{\Delta_j - 1}$ можно установить изометрическое отображение:

$$L_q(T) \cap \mathcal{P}_{\Delta_j-1} \ni f(z) \xrightarrow{A} z^{\mathcal{N}_j} f(z) \in L_q(T) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j),$$

при котором прообразом шара $\bar{B}_2^{(j)}(D)$ является шар $\bar{B}_2^{\Delta_j-1}(T) = \{f \in \mathcal{P}_{\Delta_j-1}\colon \|f\|_{T,2} \le 1\}$.

Поэтому

$$d_n(L_{\beta,p}^{\psi}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j)\, (\Delta_j)^{1/p-1/2} d_{m_j}(\bar{B}_2^{\Delta_j-1}(T); L_q(T) \cap \mathcal{P}_{\Delta_j-1}),$$

откуда, воспользовавшись теоремой из [11, с. 49], получаем соотношение

$$d_n(L_{\beta,p}^{\psi}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j)\, (\Delta_j)^{1/p-1/q} d_{m_j}(B_2^{\Delta_j}; l_q^{\Delta_j}), \tag{20}$$

где l_q^s — банахово пространство векторов $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_s\} \in \mathbb{R}^s$ с нормой $\|\xi\|_{l_q^s} = \left(\sum_{r=1}^{s} |\xi_r|^q\right)^{1/q}$, а $B_p^s = \{\xi \in l_p^s\colon \|\xi\|_{l_p^s} \le 1\}$.

Пусть $n = \mathcal{N}_{s+1}$, где $s \ge 2$ — фиксировано. Положим

$$m_j = \begin{cases} \Delta_j, & 1 \le j \le s-1, \\ \left[C(2^{j-s}\Delta_j)^{-\delta}\Delta_s^{1+\delta}\right], & j \ge s, \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$; $C > 0$ и $\delta > 0$ — достаточно малые постоянные, выбор которых будет уточнен ниже. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_j \le \sum_{j=1}^{s-1} \Delta_j + \left[C\sum_{j=s}^{\infty}(2^{j-s}\Delta_j)^{-\delta}\Delta_s^{1+\delta}\right] := S_1 + S_2.$$

Имеем $S_1 = \mathcal{N}_{s+1} - \Delta_s - \mathcal{N}_1$, а $S_2 = \left[C\Delta_s^{1+\delta}\sum_{j=s}^{\infty}(2^{j-s}\Delta_j)^{-\delta}\right]$. Согласно определению множества $\mathfrak{M}_{\infty}''$ имеем $\Delta_j \ge K\Delta_i$, $j \ge i$, где K — некоторая положительная постояннная, не зависящая от j. Поэтому

$$S_2 \le CK^{-\delta}\Delta_s^{1+\delta}\Delta_s^{-\delta}\sum_{j=s}^{\infty}(2^{-\delta})^{j-s} \le C_\delta^*\Delta_s.$$

При любом заданном $\delta > 0$ выберем $C > 0$ так, что $S_2 \le \Delta_s$. Тогда $\sum_{j=1}^{\infty} m_j \le$ $\le \mathcal{N}_{s+1} - 1$.

Далее известно (см., например, [11, с. 210]), что если $2 \le r \le s < \infty$, $n < m$ и $\alpha = (1/r - 1/s)/(1 - 2/s)$, то $d_n(B_r^m; l_s^m) \asymp \min\{1; m^{2\alpha/s}n^{-\alpha}\}$. А поскольку, вследствие оценки для S_2 и с учетом определения множества $\mathfrak{M}''_\infty$ при достаточно малом C в определении последовательности m_j выполняется неравенство $m_j < \Delta_j$ при $j \ge s$, то

$$d_{m_j}(B_2^{\Delta_j}; l_q^{\Delta_j}) \le K(m_j)^{-1/2}\Delta_j^{1/q}, \quad j \ge s,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от j. Понятно также, что

$$d_{m_j}(B_2^{\Delta_j}; l_q^{\Delta_j}) = 0, \quad 1 \le j \le s - 1.$$

В результате, возвращаясь к неравенству (20) и учитывая, что исходя из неравенства (5) $\Delta_{j+1} \le C_0\Delta_j$, где $C_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от j, имеем

$$d_{\mathcal{N}_{s+1}}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) << \sum_{j=s}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\,\Delta^{1/p-1/q}(m_j)^{-1/2}\Delta_j^{1/q} =$$

$$= \sum_{j=s}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\Delta^{1/p}(m_j)^{-1/2} << \sum_{j=s}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p}\Delta_s^{-(1+\delta)/2}(2^{j-s}\Delta_j)^{\delta/2} <<$$

$$<< \sum_{j=s}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p}\,\Delta_s^{-(1+\delta)/2}\,\Delta_s^{\delta/2}((2C_0)^{\delta/2})^{j-s} <<$$

$$<< \sum_{j=s}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p}\,\Delta_s^{-1/2}((2C_0)^{\delta/2})^{j-s}. \tag{21}$$

Теперь заметим, что если $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ такова, что существует постоянная $K > 0$, для которой $\eta(t) - t \le K$ при любом $t \ge 1$, то функция ψ принадлежит также множеству $\mathfrak{M}'_\infty$, а оценки величин $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega}))$ при условии $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ найдены в [12].

Поэтому, рассматривая только $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty \setminus \mathfrak{M}'_\infty$, из ограничений, определяющих множество $\mathfrak{M}''_\infty$, следует, что существует $t_0 \ge 1$ такое, что по крайней мере при $t \ge t_0$ $\eta(t) - t \ge K_0 > 1$. Далее, поскольку $t/(\eta(t) - t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$, то для произвольного $C > 0$ существует $t_0^{(1)}$ (зависящее от C) такое, что $t/(\eta(t) - t) \ge C$, откуда $\eta(t) \le (1 + 1/C)t$ и для достаточно большого C при при $t \ge t_0^{(1)}$ выполняется неравенство $[\eta(t)] + 1 \le K_1 t$, где $1 < K_1 < 2 - K_0^{-1}$. В частности, для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ при $j \ge j_0$ $\mathcal{N}_{j+1} < K_1\mathcal{N}_j$. Из условия $t/(\eta(t) - t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$, следует также выполнение неравенства

$$\frac{\eta(\mathcal{N}_{j+1}) - \mathcal{N}_{j+1}}{\eta(\mathcal{N}_j) - \mathcal{N}_j} \le \frac{\mathcal{N}_{j+1}}{\mathcal{N}_j},$$

из которого при $j \ge j_0$ получаем

$$\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} = \frac{[\eta(\mathcal{N}_{j+1})]-\mathcal{N}_{j+1}+1}{[\eta(\mathcal{N}_j)]-\mathcal{N}_j+1} \le \frac{\eta(\mathcal{N}_{j+1})-\mathcal{N}_{j+1}+1}{\eta(\mathcal{N}_j)-\mathcal{N}_j} \le$$

$$\le \frac{\mathcal{N}_{j+1}}{\mathcal{N}_j} + \frac{1}{K_0} \le K_1 + \frac{1}{K_0} =: \alpha < 2. \tag{22}$$

Таким образом, при любом $j \ge j_0$ $\Delta_{j+1} \le \alpha\Delta_j$, где $\alpha < 2$, и так как $\psi(\mathcal{N}_{j+1}) \le \le \psi(\mathcal{N}_j)/2$, то

$$\psi(\mathcal{N}_{j+k})\,\Delta_{j+k}^{1/p} \le \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \psi(\mathcal{N}_j)\,\Delta_j^{1/p} = \gamma^k \psi(\mathcal{N}_j)\,\Delta_j^{1/p}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

где $\gamma < 1$.

Из неравенства (21) с учетом соотношения (23) следует, что

$$d_{\mathcal{N}_s}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(\mathcal{N}_s)\,\Delta_s^{1/p-1/2} \sum_{j=s}^{\infty} ((2C_0)^{\delta/2}\gamma)^{j-s},$$

и поскольку $\Delta_s \asymp \Delta_{s+1} \asymp \eta(\mathcal{N}_{s+1}) - \mathcal{N}_{s+1}$ и $\psi(\mathcal{N}_s) \asymp \psi(\mathcal{N}_{s+1})$, то, выбрав $\delta > 0$ так, что $(2C_0)^{\delta/2}\gamma < 1$, окончательно получим

$$d_{\mathcal{N}_{s+1}}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(\mathcal{N}_{s+1})\big(\eta(\mathcal{N}_{s+1}) - \mathcal{N}_{s+1}\big)^{1/p-1/2}.$$

Таким образом, если $1 < p \le 2 \le q < \infty$, то

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(n)(\eta(n) - n)^{1/p-1/2}.$$

Наконец, если $2 \le p \le q < \infty$, то

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \le d_n(L^{\psi}_{\beta,2}(\Omega); \bar{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(n).$$

Теорема 1 доказана.

12. *Романюк В. С.* Оценки колмогоровских поперечников классов аналитических функций, представимых интегралами типа Коши. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 229 – 237.
13. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций. I // Там же. – 1992. – **44**, № 3. – С. 324 – 333.
14. *Романюк В. С.* Приближение в среднем с весом классов аналитических функций алгебраическими полиномами и конечномерными подпространствами // Там же. – 1999. – **51**, № 5. – С. 645 – 662.
15. *Романюк В. С.* Слабая асимптотика поперечников по Колмогорову классов сверток периодических функций // Тези доп. Міжн. конф. „Теорія апроксимацій та чисельні методи". – Рівне, 19-21 червня 1996. – С. 66.
16. *Темляков В. Н.* К вопросу об оценках поперечников классов бесконечнодифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 5. – С. 155 – 157.
17. *Темляков В. Н.* Об оценках поперечников классов бесконечнодифференцируемых функций // Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. – 1990. – **5**, № 2. – С. 111 – 114.
18. *Кушпель А. К.* Оценки бернштейновских поперечников и их аналогов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 54 – 59.
19. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. – Киев, 1984. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).
20. *Кушпель А. К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q. – Киев, 1987. – 54 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.44).
21. *Двейрин М. З.* Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1975. – Вып. 3. – С. 32 – 46.
22. *Майоров В. Е.* О наилучшем приближении классов $W_1^r(I^s)$ в пространстве $L_\infty(I^s)$ // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 5. – С. 699 – 706.
23. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1 – 615 с.

Получено 12.10.99