УДК 512.664

В. В. Любашенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗОВНІШНІЙ ТЕНЗОРНИЙ ДОБУТОК ЗБОЧЕНИХ В'ЯЗОК

Under some assumptions, we prove that the Deligne tensor product of categories of constructible perverse sheaves on pseudomanifolds X and Y is a category of constructible perverse sheaves on $X \times Y$. The functor of Deligne external tensor product is identified with the external geometric tensor product.

При деяких припущеннях доведено, що тензорний добуток Деліня категорій конструктивних збочених в'язок на псевдомноговидах X та Y є категорією конструктивних збочених в'язок на $X \times Y$. Функтор зовнішнього тензорного добутку Деліня ототожнюється із зовнішнім геометричним тензорним добутком.

1. Вступ. Мета цієї статті полягає в тому, щоб показати, що геометричний зовнішній добуток збочених в'язок є конкретною реалізацією їх абстрактного зовнішнього тензорного добутку. Більш докладно, існує функтор $\boxtimes$, що приписує парі збочених в'язок F на просторі X і G на просторі Y їх геометричний зовнішній тензорний добуток $F \boxtimes G$, що є збоченою в'язкою на добутку просторів $X \times Y$. Ми стверджуємо, що за деяких припущень функтор $\boxtimes$ перетворює категорію збочених в'язок на $X \times Y$ у тензорний добуток Деліня абелевих категорій збочених в'язок на X і Y.

Опишемо об'єкти, які будемо розглядати. Всі топологічні простори вважаються локально компактними, локально цілком паракомпактними, локально стягуваними і скінченної когомологічної розмірності над $\mathbb{C}$. Стратифікований простір означає для нас топологічний стратифікований псевдомноговид X, що має стратифіковану компактифікацію; X оснащений стратифікацією $\mathscr{X}$ — локально замкнутим розбиттям X. Зокрема, X може бути компактним або комплексним алгебраїчним многовидом з алгебраїчними стратами. За визначенням псевдомноговиду існує фільтрація замкнутими підпросторами $\mathscr{F}_X := X = X_n \supset \supset X_{n-1} \supset \ldots \supset X_1 \supset X_0 = \varnothing$ така, що $S_i = X_i - X_{i-1}$ є топологічними многовидами, зв'язні компоненти яких є стратами, і виконані умови ([1], означення 1.1.1).

В'язки будуть в'язками $\mathbb{C}$-векторних просторів. Згідно з Борелем ([2], V.3.3) назвемо комплекс в'язок K $\mathscr{X}$-когомологічно локально постійним, якщо когомології $H^\bullet(K)$ — локально постійні на кожному страті. Назвемо K $\mathscr{X}$-когомологічно конструктивним, якщо він $\mathscr{X}$-когомологічно локально постійний, і стебла $H^\bullet(K)$ — скінченновимірні. Повна підкатегорія обмеженої похідної категорії $D^b(X)$, що складається з $\mathscr{X}$-когомологічно локально постійних комплексів, позначена $D^b_{\mathscr{X}}(X)$; підкатегорія, що складається з $\mathscr{X}$-когомологічно конструктивних комплексів, позначена $D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$.

Нехай $(X, \mathscr{X})$ оснащений функцією збоченості $p : \mathscr{X} \to \mathbb{Z}$, що задовольняє умову $0 \leq p(S) - p(T) \leq \dim T - \dim S$, якщо $S \subset \overline{T}$. Бейлінсон, Бернштейн і Делінь [3] пов'язують зі збоченістю t-структуру на $D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$: повну підкатегорію ${}^pD^{\leq 0}_{\mathscr{X}}(X)$ (відповідно ${}^pD^{\geq 0}_{\mathscr{X}}(X)$), утворену комплексами $K \in D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$ такими, що для кожного страту $i_S \colon S \hookrightarrow X$ виконуються наступні умови: $H^m i_S^* K = 0$ для $m > p(S)$ (відповідно $H^m i_S^! K = 0$ для $m < p(S)$). Комплекси, що задовольняють обидві умови, називаються збоченими в'язками в [3]. Категорія збочених в'язок, "серце", позначена

© В. В. ЛЮБАШЕНКО, 2001

$$\mathrm{Perv}(X) = \mathrm{Perv}(X, \mathscr{X}, p) = {}^pD^0_{\mathscr{X}}(X) = {}^pD^{\le 0}_{\mathscr{X}}(X) \cap {}^pD^{\ge 0}_{\mathscr{X}}(X).$$

Функтор зовнішнього тензорного добутку $\boxtimes : D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X) \times D^{b,c}_{\mathscr{Y}}(Y) \to \to D^{b,c}_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}(X \times Y)$ визначається на $K \in D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$, $M \in D^{b,c}_{\mathscr{Y}}(Y)$ як

$$K \boxtimes M = (\mathrm{pr}_X^* K) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{C}} (\mathrm{pr}_Y^* M) = (\mathrm{pr}_X^* K) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathrm{pr}_Y^* M),$$

де $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ — проекції. Позначимо похідні функтори таким же чином, як і функтори для в'язок: префікси R і L будемо часто пропускати. Наш основний результат — наступна теорема.

Теорема. *Обмеження функтора зовнішнього тензорного добутку на збочені в'язки дає функтор*

$$\boxtimes : \mathrm{Perv}(X, \mathscr{X}, p) \times \mathrm{Perv}(Y, \mathscr{Y}, q) \to \mathrm{Perv}(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y}, p \dotplus q),$$

де збоченість $p \dotplus q$ задається виразом $(p \dotplus q)(S \times T) = p(S) + q(T)$ для $S \in \mathscr{X}$, $T \in \mathscr{Y}$. Цей функтор перетворює останню категорію у тензорний добуток Деліня абелевих $\mathbb{C}$-лінійних категорій $\mathrm{Perv}(X, \mathscr{X}, p)$ і $\mathrm{Perv}(Y, \mathscr{Y}, q)$.

Нагадаємо, що тензорний добуток абелевих категорій введений Делінем в [4].

Теорема доводиться в пп. 2 – 5. У п. 2 доводимо деякі попередні допоміжні результати, серед яких головний — ізоморфізм

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, C) \boxtimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D) \xrightarrow{\sim} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A \boxtimes B, C \boxtimes D)$$

для когомологічно конструктивних комплексів (наслідок 2.7). Використовуючи його, показуємо, що $\boxtimes$ буде t-точним і що $\boxtimes$ обмежується на збочені в'язки (наслідок 2.11). У п. 3 вивчаються прості збочені в'язки. Зв'язок між $R\,\mathrm{Hom}^\bullet$ і $\boxtimes$ розглянуто у п. 4. Доведення основної теореми завершується в п. 5 за допомогою декількох лем. Додаток А містить перелік необхідних формул.

2. Попередні результати. *2.1.* **Лема** (порівн. з формулою 10.23(2) з [2]). *Нехай Z є локально компактним локально цілком паракомпактним топологічним простором скінченної когомологічної розмірності. Нехай $A, B, C \in \in D^b(Z)$. Тоді існує природний морфізм функторів $\nu : R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \otimes C \to \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B \otimes C)$.*

Доведення. Спочатку будуємо морфізм в'язок $\nu : \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \otimes C \to \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, B \otimes C)$ для в'язок A, B, C на Z. Потім узагальнюємо його на комплекси в'язок $A, B, C \in D^b(Z)$. Вважаючи B комплексом ін'єктивних в'язок, одержуємо шуканий морфізм

$$\nu : R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \otimes C =$$

$$= \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \otimes C \xrightarrow{\nu} \underline{\mathrm{Hom}}(A, B \otimes C) \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B \otimes C).$$

2.2. Наслідок. *Користуючись ν двічі, одержуємо для $A, B, C, D \in D^b(Z)$ морфізм*

$$\mu : R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, C) \otimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D) \xrightarrow{\nu}$$

$$\xrightarrow{\nu} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, C \otimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D)) \xrightarrow{R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, \nu')}$$

$$\xrightarrow{R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, \nu')} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, C \otimes D)) \xrightarrow{(A.2)} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A \otimes B, C \otimes D),$$

де

$$\nu' : C \otimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D) \xrightarrow[\sim]{\sigma} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D) \otimes C \xrightarrow{\nu}$$

$$\xrightarrow{\nu} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D \otimes C) \xrightarrow[\sim]{R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B,\sigma)} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, C \otimes D)$$

і σ *є симетрією в категорії комплексів — перестановкою зі знаком.*

2.3. Наслідок. *Для* $Z = X \times Y$, $A, C \in D^b(X)$, $B, D \in D^b(Y)$ *існує природний морфізм*

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, C) \boxtimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D) =$$

$$= p_X^* R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, C) \otimes p_Y^* R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D) \xrightarrow{(A.5)}$$

$$\xrightarrow{(A.5)} R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_X^*A, p_X^*C\big) \otimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_Y^*B, p_Y^*D\big) \xrightarrow{\mu}$$

$$\xrightarrow{\mu} R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_X^*A \otimes p_Y^*B,\ p_X^*C \otimes p_Y^*D\big) = R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A \boxtimes B, C \boxtimes D).$$

2.4. Лема. *Нехай* $f: U \to X$, $g: V \to Y$ *— неперервні відображення. Для* $A \in D^b(X)$, $B \in D^b(Y)$ *маємо природний ізоморфізм* $(f \times g)^*(A \boxtimes B) \simeq f^*A \boxtimes$ $\boxtimes\, g^*B$.

Доведення. Використовуючи (A.1), одержуємо $(f \times g)^*\big(p_1^*A \otimes p_2^*B\big) \simeq$ $\simeq (f \times g)^* p_1^*A \otimes (f \times g)^* p_2^*B \simeq p_1^* f^* A \otimes p_2^* g^* B$.

2.5. Лема. *Нехай* $i : S \to U$ *— стратифіковане відображення стратифікованих псевдомноговидів і нехай* p_S, p_U *— проекції, як і в наступній діаграмі:*

$$\begin{tikzcd} S \times Y \arrow[r, "i \times 1"] \arrow[d, "p_S"'] & U \times Y \arrow[d, "p_U"] \\ S \arrow[r, "i"] & U \end{tikzcd}.$$

Тоді для будь-якого $\mathfrak{U}$*-когомологічно конструктивного* $A \in D_{\mathfrak{U}}^{b,c}(U)$ *маємо* $(i \times 1)^! p_U^* A \simeq p_S^* i^! A$.

Доведення. Доведемо ізоморфізм, двоїстий за Верд'є, до шуканого ізоморфізму $(i \times 1)^* p_U^! B \simeq p_S^! i^* B$ для $B = \mathfrak{D}A \in D_{\mathfrak{U}}^{b,c}(U)$. Ізоморфізм (A.7) дає $p_U^! B \simeq B \boxtimes \mathfrak{D}_Y$ і $p_S^!(i^*B) \simeq (i^*B) \boxtimes \mathfrak{D}_Y$. Отже,

$$(i \times 1)^* p_U^! B \simeq (i \times 1)^*(B \boxtimes \mathfrak{D}_Y) \simeq (i^*B) \boxtimes \mathfrak{D}_Y \simeq p_S^! i^* B.$$

2.6. Пропозиція. *Нехай* $(X, \mathscr{X})$ *— стратифікований псевдомноговид. Припустимо, що* $A \in D_{\mathscr{X}}^{b,c}(X)$ *є* $\mathscr{X}$*-когомологічно конструктивним,* $B \in$ $\in D_{\mathscr{X}}^{b}(X)$ *є* $\mathscr{X}$*-когомологічно локально постійним і нехай* $C \in D^b(Y)$. *Тоді морфізм з леми* 2.1

$$\nu: R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_X^*A, p_X^*B\big) \otimes p_Y^*C \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_X^*A, p_X^*B \otimes p_Y^*C\big)$$

є ізоморфізмом.

Доведення. Нехай $\mathscr{F}_X : X = X_n \supset X_{n-1} \supset \ldots \supset X_1 \supset X_0 = \varnothing$ — замкнена фільтрація X така, що зв'язні компоненти $S_i = X_i - X_{i-1}$ є стратами X. Нехай $U_i = X - X_{n-i}$ — доповнююча відкрита фільтрація, тоді $S_{n-k} = U_{k+1} - U_k =$ $= X_{n-k} - X_{n-k-1}$. Позначимо деякі вкладення і проекції, як у наступній діаграмі:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, "p_1"'] & U_k \times Y \arrow[l, hook', "J_k"'] \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d, "p_1"] & U_{k+1} \times Y \arrow[d, "p_1"] & S_{n-k} \times Y \arrow[l, hook', "I"'] \arrow[d, "p_1"] \\
X & U_k \arrow[l, hook', "j_k"'] \arrow[r, hook, "j"] & U_{k+1} & S_{n-k} \arrow[l, hook', "i"']
\end{tikzcd}.$$

Для комплексу $K \in D^b(X \times Y)$ позначимо $(K)_k = J_k^* K \in D^b(U_k \times Y)$. Для $N > n$ маємо $(K)_N = K$. Доведемо за індукцією по k, що

$$\nu_k : R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big((p_1^* A)_k, (p_1^* B)_k\big) \otimes (p_2^* C)_k \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big((p_1^* A)_k, (p_1^* B)_k \otimes (p_2^* C)_k\big) \tag{2.1}$$

є ізоморфізмом. Випадки $k = 1$ (або $n = 1$) зводяться до найпростішого випадку, у якому X — об'єднання відкритих стратів. Оскільки комплекс A — когомологічно локально постійний зі скінченновимірними стеблами когомологій, *локально* його можна замінити комплексом постійних в'язок зі скінченновимірними стеблами. Отже, $\underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* A, D)$ є ізоморфним сумі зсунутих копій D (з модифікованим диференціалом), отже, збігається з $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* A, D)$. Зрозуміло, що ν_1 — ізоморфізм.

Для комплексу $M \in D^b(X)$ позначимо $M_k = j_k^* M \in D^b(U_k)$. Тоді для $M \in D^b(X)$ маємо ізоморфізм $(p_1^* M)_k = J_k^* p_1^* M \simeq p_1^* j_k^* M = p_1^*(M_k) = p_1^* M_k$.

Вважаючи, що ν_k є ізоморфізмом, доведемо, що ν_{k+1} — також ізоморфізм. Застосуємо до стандартного трикутника $I_! I^! (p_1^* B)_{k+1} \to (p_1^* B)_{k+1} \to J_* (p_1^* B)_k \to$ обидва функтори в (2.1). Це дає два трикутники, виписані нижче, і морфізм (ν', ν_{k+1}, ν'') між ними:

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_{k+1}, I_! I^! p_1^* B_{k+1}\big) \otimes (p_2^* C)_{k+1} \to$$

$$\to R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_{k+1}, p_1^* B_{k+1}\big) \otimes (p_2^* C)_{k+1} \to$$

$$\to R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_{k+1}, J_* p_1^* B_k\big) \otimes (p_2^* C)_{k+1} \to$$

$$\to R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_{k+1}, I_! I^! p_1^* B_{k+1} \otimes (p_2^* C)_{k+1}\big) \to$$

$$\to R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_{k+1}, p_1^* B_{k+1} \otimes (p_2^* C)_{k+1}\big) \to$$

$$\to R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_{k+1}, J_* p_1^* B_k \otimes (p_2^* C)_{k+1}\big) \to .$$

Доведемо, що ν'' — ізоморфізм. Дійсно, цей морфізм — композиція кількох ізоморфізмів:

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_{k+1}, J_* p_1^* B_k\big) \otimes (p_2^* C)_{k+1} \xrightarrow[\sim]{(A.3)}$$

$$\xrightarrow[\sim]{(A.3)} J_* R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_k, p_1^* B_k\big) \otimes (p_2^* C)_{k+1} \xrightarrow[\sim]{(A.5)}$$

$$\xrightarrow[\sim]{(A.5)} J_* p_1^* R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A_k, B_k) \otimes (p_2^* C)_{k+1} \xrightarrow[\sim]{}$$

$$\xrightarrow[\sim]{} J_* p_1^* R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)_k \otimes (p_2^* C)_{k+1} \xrightarrow[\sim]{}$$

$$\xrightarrow[\sim]{} J_* \big[p_1^* R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)_k \otimes (p_2^* C)_k\big] \xrightarrow[\sim]{J_* \nu_k}$$

$$\xrightarrow[\sim]{J_* \nu_k} J_* \big[R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^* A_k, p_1^* B_k \otimes (p_2^* C)_k\big)\big] \xrightarrow[\sim]{(A.3)}$$

$$\xrightarrow[\sim]{(A.3)} R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*A_{k+1}, J_*\big[p_1^*B_k \otimes (p_2^*C)_k\big]\big) \xrightarrow[\sim]{}$$
$$\xrightarrow[\sim]{} R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*A_{k+1}, J_*p_1^*B_k \otimes (p_2^*C)_{k+1}\big).$$

Справді, оскільки $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$ є $\mathcal{X}$-когомологічно локально постійним за теоремою 8.6 із [2], можемо двічі застосувати лему 10.22 [2].

Доведемо, що ν' — ізоморфізм. Дійсно, цей морфізм — композиція кількох ізоморфізмів:

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*A_{k+1}, I_!I^!p_1^*B_{k+1}\big) \otimes (p_2^*C)_{k+1} \xrightarrow[\sim]{(A.3)}$$
$$\xrightarrow[\sim]{(A.3)} I_!R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(I^*p_1^*A_{k+1}, I^!p_1^*B_{k+1}\big) \otimes (p_2^*C)_{k+1} \xrightarrow[\sim]{(A.4)}$$
$$\xrightarrow[\sim]{(A.4)} I_!\big[R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(I^*p_1^*A_{k+1}, I^!p_1^*B_{k+1}\big) \otimes I^*(p_2^*C)_{k+1}\big] \xrightarrow[\sim]{\text{Лема 2.5}}$$
$$\xrightarrow[\sim]{\text{Лема 2.5}} I_!\big[R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*i^*A_{k+1}, p_1^*i^!(B_{k+1})\big) \otimes p_2^*C\big] \xrightarrow[\sim]{I_!\nu}$$
$$\xrightarrow[\sim]{I_!\nu} I_!\big[R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*i^*A_{k+1}, p_1^*i^!(B_{k+1}) \otimes p_2^*C\big)\big] \xrightarrow[\sim]{\text{Лема 2.5}}$$
$$\xrightarrow[\sim]{\text{Лема 2.5}} I_!\big[R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(I^*p_1^*A_{k+1}, I^!p_1^*B_{k+1} \otimes I^*(p_2^*C)_{k+1}\big)\big] \xrightarrow[\sim]{(A.3)}$$
$$\xrightarrow[\sim]{(A.3)} R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*A_{k+1}, I_!\big[I^!p_1^*B_{k+1} \otimes I^*(p_2^*C)_{k+1}\big]\big) \xrightarrow[\sim]{(A.4)}$$
$$\xrightarrow[\sim]{(A.4)} R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*A_{k+1}, I_!I^!p_1^*B_{k+1} \otimes (p_2^*C)_{k+1}\big).$$

Оскільки ν' і ν'' — ізоморфізми, то ізоморфізмом буде і ν_{k+1}.

Наведена вище пропозиція визначає, коли морфізми ν з наслідку 2.3 є ізоморфізмами.

2.7. *Наслідок.* *Припустимо, що $A \in D^{b,c}_{\mathcal{X}}(X)$ є $\mathcal{X}$-когомологічно конструктивним, $B \in D^{b,c}_{\mathcal{Y}}(Y)$ є $\mathcal{Y}$-когомологічно конструктивним, $C \in D^b_{\mathcal{X}}(X)$ є $\mathcal{X}$-когомологічно локально постійним і $D \in D^b_{\mathcal{Y}}(Y)$ є $\mathcal{Y}$-когомологічно локально постійним. Тоді морфізм*

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, C) \boxtimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, D) \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A \boxtimes B, C \boxtimes D)$$

є ізоморфізмом.

2.8. *Наслідок.* *Нехай $A \in D^{b,c}_{\mathcal{X}}(X)$ є $\mathcal{X}$-когомологічно конструктивним і $B \in D^{b,c}_{\mathcal{Y}}(Y)$ є $\mathcal{Y}$-когомологічно конструктивним. Тоді $\mathfrak{D}A \boxtimes \mathfrak{D}B \simeq \mathfrak{D}(A \boxtimes B)$.*

Доведення. Дійсно,

$$\mathfrak{D}A \boxtimes \mathfrak{D}B = R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathfrak{D}_X) \boxtimes R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, \mathfrak{D}_Y) \xrightarrow[\sim]{\text{Наслідок 2.7}}$$
$$\xrightarrow[\sim]{\text{Наслідок 2.7}} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A \boxtimes B, \mathfrak{D}_X \boxtimes \mathfrak{D}_Y) \xrightarrow[\sim]{(A.8)}$$
$$\xrightarrow[\sim]{(A.8)} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A \boxtimes B, \mathfrak{D}_{X\times Y}) = \mathfrak{D}(A \boxtimes B).$$

2.9. Пропозиція. *i) Нехай $A \in D^{b,c}_{\mathcal{X}}(X)$, $B \in D^{b,c}_{\mathcal{Y}}(Y)$ і $f: U \to X$, $g: V \to Y$ — стратифіковані відображення. Тоді $(f\times g)^!(A \boxtimes B) \simeq f^!A \boxtimes g^!B$.*

ii) Припустимо, що $A \in D^b(X)$, $B \in D^b(Y)$ і нехай $f: X \to U$, $g: V \to Y$ — неперервні відображення. Тоді $(f\times g)_!(A \boxtimes B) \simeq f_!A \boxtimes g_!B$.

iii) Крім цього, якщо $A \in D^{b,c}_{\mathcal{X}}(X)$, $B \in D^{b,c}_{\mathcal{Y}}(Y)$ і стратифіковані відображення f, g властиві або комплексно алгебраїчні, або кожний прошарок f, g має стратифіковану компактифікацію, то $(f\times g)_*(A \boxtimes B) \simeq f_*A \boxtimes g_*B$.

Доведення. i) Виведемо цей ізоморфізм для об'єктів $\mathfrak{D}A$, $\mathfrak{D}B$, користуючись лемою 2.4:

$$(f\times g)^!(\mathfrak{D}A\boxtimes\mathfrak{D}B)\xrightarrow[\sim]{\text{Наслідок 2.8}}(f\times g)^!\mathfrak{D}(A\boxtimes B)\xrightarrow[\sim]{(A.9)}$$

$$\xrightarrow[\sim]{(A.9)}\mathfrak{D}(f\times g)^*(A\boxtimes B)\xrightarrow[\sim]{\text{Лема 2.4}}\mathfrak{D}(f^*A\boxtimes g^*B)\xrightarrow[\sim]{\text{Наслідок 2.8}}$$

$$\xrightarrow[\sim]{\text{Наслідок 2.8}}\mathfrak{D}f^*A\boxtimes\mathfrak{D}g^*B\xrightarrow[\sim]{(A.9)}f^!\mathfrak{D}A\boxtimes g^!\mathfrak{D}B.$$

ii) Досить розглянути випадок $g=\mathrm{id}$. Поєднуючи його з подібним випадком $f=\mathrm{id}$, одержуємо загальний випадок, оснований на діаграмі

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X\times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f\times 1"] & Y \arrow[d, equal] \\
U & U\times Y \arrow[l, "p_U"'] \arrow[r, "p_2"] & Y
\end{tikzcd},$$

шуканий ізоморфізм складається із наступних ізоморфізмів:

$$(f\times 1)_!(A\boxtimes B)=(f\times 1)_!\big(p_X^*A\otimes p_2^*B\big)\simeq(f\times 1)_!\big(p_X^*A\otimes(f\times 1)^*p_2^*B\big)\xrightarrow[\sim]{(A.4)}$$

$$\xrightarrow[\sim]{(A.4)}(f\times 1)_!p_X^*A\otimes p_2^*B\xrightarrow[\sim]{\text{Заміна бази}}p_U^*f_!A\otimes p_2^*B=f_!A\boxtimes B.$$

iii) Виводиться з ii) з використанням (A.10) подібно до i).

2.10. Пропозиція. *Функтор* $\boxtimes:{}^pD^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)\times{}^qD^{b,c}_{\mathscr{Y}}(Y)\to{}^{p\dotplus q}D^{b,c}_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}(X\times Y)$ *є t-точним.*

Доведення. Для $K\in D^b(X)$, $L\in D^b(Y)$ маємо формулу Кюннета

$$H^n(K\boxtimes L)=H^n\big(p_1^*K\otimes p_2^*L\big)\simeq\oplus_{k+l=n}H^kp_1^*K\otimes H^lp_2^*L\backsimeq$$

$$\backsimeq\oplus_{k+l=n}p_1^*H^kK\otimes p_2^*H^lL=\oplus_{k+l=n}H^kK\boxtimes H^lL.$$

Нехай $A\in D^{\le p}_{\mathscr{X}}(X)$, $B\in D^{\le q}_{\mathscr{Y}}(Y)$ і нехай $S\in\mathscr{X}$, $T\in\mathscr{Y}$ будуть стратами. Якщо $n>p(S)+q(T)$, то

$$H^n(i_S\times i_T)^*(A\boxtimes B)=H^n\big(i_S^*A\boxtimes i_T^*B\big)\simeq\oplus_{k+l=n}H^k\big(i_S^*A\big)\boxtimes H^l\big(i_T^*B\big)=0$$

на підставі леми 2.4 і формули Кюннета. Отже, $A\boxtimes B\in D^{\le p\dotplus q}_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}(X\times Y)$.

Припустимо тепер, що $A\in D^{\ge p}_{\mathscr{X}}(X)$, $B\in D^{\ge q}_{\mathscr{Y}}(Y)$. Якщо $n<p(S)+q(T)$, то

$$H^n(i_S\times i_T)^!(A\boxtimes B)=H^n\big(i_S^!A\boxtimes i_T^!B\big)\simeq\oplus_{k+l=n}H^k\big(i_S^!A\big)\boxtimes H^l\big(i_T^!B\big)=0$$

згідно з пропозицією 2.9 і формулою Кюннета. Отже, $A\boxtimes B\in D^{\ge p\dotplus q}_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}(X\times Y)$.

2.11. Наслідок. *Обмеження $\boxtimes$ на збочені в'язки дає $\mathbb{C}$-білінійний функтор*

$$\boxtimes:\mathrm{Perv}(X,\mathscr{X},p)\times\mathrm{Perv}(Y,\mathscr{Y},q)\to\mathrm{Perv}(X\times Y,\mathscr{X}\times\mathscr{Y},p\dotplus q),$$

точний за кожною змінною.

Доведення. Для фіксованого $B\in\mathrm{Perv}(Y)$ функтор T: ${}^pD^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)\to$ $\to{}^{p\dotplus q}D^{b,c}_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}(X\times Y)$, $A\mapsto A\boxtimes B$ є t-точним. Отже, функтор ${}^pT={}^{p\dotplus q}H^0\circ T\circ$ $\circ\,\varepsilon:\mathrm{Perv}(X)\to\mathrm{Perv}(Y)$, $A\mapsto A\boxtimes B$ є точним згідно з [3], пропозиція 1.3.17(i).

3. Прості збочені в'язки. У випадку тривіальної стратифікації $\mathscr{X} = \{X\}$ зв'язного многовида X збоченість p є цілим числом $p(X)$. Категорія збочених в'язок описується як

$$\operatorname{Perv}(X, \mathscr{X}, p) = \{K \in D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X) \mid H^n K = 0 \text{ для } n \neq p(X)\} = \\ = \mathscr{LCSh}(X)[-p(X)],$$

де категорія локально постійних в'язок скінченного рангу $\mathscr{LCSh}(X)$ є еквівалентною до $\pi_1(X)$-mod — категорії $\pi_1(X)$-модулів, скінченновимірних над $\mathbb{C}$.

Згідно з [3], пропозиція 1.4.26, будь-яка проста збочена в'язка на загальному стратифікованому просторі $(X, \mathscr{X}, p)$ є образом простого $\pi_1(S)$-модуля для одного зі стратів S при дії функтора

$$\pi_1(S)\text{-mod} \simeq \mathscr{LCSh}(S)[-p(S)] = \operatorname{Perv}(S, \{S\}, p(S)) \xrightarrow{j_{S!*}} \\ \xrightarrow{j_{S!*}} \operatorname{Perv}(\bar{S}) \xrightarrow{i_{S*}} \operatorname{Perv}(X),$$

де $\bar{S}$ позначає замикання S і $j_S : S \hookrightarrow \bar{S}$, $i_S : \bar{S} \hookrightarrow X$ — вкладення. Функтор продовження $j_{S!*}$ введено в [3] (означення 1.4.22) (див. означення А.1). Функтор i_{S*} є обмеженням t-точного функтора $i_{S*} : D^{b,c}_{\bar{\mathscr{S}}}(\bar{S}) \to D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$, $\bar{\mathscr{S}} = \mathscr{X} \cap \bar{S}$ ([3], пропозиція 1.4.16).

Тепер обговоримо поведінку отриманих таким чином збочених в'язок, які називаються в'язками когомологій перетинів щодо $\boxtimes$.

***3.1.* Пропозиція.** *Нехай $S \in \mathscr{X}$, $T \in \mathscr{Y}$ будуть стратами $(X, \mathscr{X}, p)$ і $(Y, \mathscr{Y}, q)$. Тоді існують функторіальні ізоморфізми*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S)\text{-mod} \times \pi_1(T)\text{-mod} \arrow[r, "\otimes_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \pi_1(S \times T)\text{-mod} \arrow[d, "l"'] \\
\operatorname{Perv}(S) \times \operatorname{Perv}(T) \arrow[r, "\boxtimes"] \arrow[d, "j_{S!*} \times j_{T!*}"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \operatorname{Perv}(S \times T) \arrow[d, "(j_S \times j_T)_{!*}"] \\
\operatorname{Perv}(\bar{S}) \times \operatorname{Perv}(\bar{T}) \arrow[r, "\boxtimes"] \arrow[d, "i_{S*} \times i_{T*}"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \operatorname{Perv}(\bar{S} \times \bar{T}) \arrow[d, "(i_S \times i_T)_*"] \\
\operatorname{Perv}(X) \times \operatorname{Perv}(Y) \arrow[r, "\boxtimes"] & \operatorname{Perv}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

Доведення. По суті, доведення зводиться до побудови функторіального ізоморфізму $(j_S \times j_T)_{!*}(A \boxtimes B) \simeq j_{S!*}A \boxtimes j_{T!*}B$. На підставі ізоморфізму $(j_S \times j_T)_{!*} \simeq (j_S \times 1)_{!*}(1 \times j_T)_{!*}$, що випливає з ізоморфізму 2.1.7 [3], див. також (А.11), ми тільки повинні довести наступну лему.

***3.2.* Лема.** *Нехай U — відкритий стратифікований підпростір стратифікованого псевдомноговиду $Z = (Z, \mathfrak{Z}, p)$ і $j : U \hookrightarrow Z$ — вкладення. Нехай $A \in \operatorname{Perv}(U, p)$ і $B \in \operatorname{Perv}(W, q)$. Тоді в $\operatorname{Perv}(Z \times W, p \dotplus q)$ маємо функторіальний ізоморфізм $(j \times 1)_{!*}(A \boxtimes B) \simeq j_{!*} A \boxtimes B$.*

Доведення. Ліва частина визначена однозначно як продовження C збоченої в'язки $A \boxtimes B$ в $D^{b,c}_{\mathfrak{Z}\times\mathscr{W}}(Z \times W)$, тобто як комплекс, оснащений ізоморфізмом $(j \times 1)^* C \simeq A \boxtimes B$ таким, що для будь-якого страту $s : S \hookrightarrow Z$, що не міститься в U, і для будь-якого страту $t : T \hookrightarrow W$ маємо $H^m\big((s \times t)^* C\big) = 0$

для $m \geq p(S) + q(T)$ і $H^m((s \times t)^! C) = 0$ для $m \leq p(S) + q(T)$ [3], пропозиція 2.1.9 (див. означення А.1).

Перевіримо ці умови для правої частини. Дійсно,

$$(j \times 1)^*(j_{!*} A \times B) \simeq j^* j_{!*} A \times B \simeq A \boxtimes B, \simeq \tag{3.1}$$

$$H^m(s \times t)^*(j_{!*} A \times B) \simeq H^m\left(s^* j_{!*} A \boxtimes t^* B\right) \simeq \oplus_{k+l=m} H^k\left(s^* j_{!*} A\right) \boxtimes H^l\left(t^* B\right) \simeq$$

$$\simeq \bigoplus_{\substack{k+l=m \\ k<p(S),\, l \leq q(T)}} H^k\left(s^* j_{!*} A\right) \boxtimes H^l\left(t^* B\right).$$

Цей простір буде нулем, якщо $m \geq p(S) + q(T)$. Так само

$$H^m(s \times t)^!(j_{!*} A \times B) \simeq H^m\left(s^! j_{!*} A \boxtimes t^! B\right) \simeq \oplus_{k+l=m} H^k\left(s^! j_{!*} A\right) \boxtimes H^l\left(t^! B\right) \simeq$$

$$\simeq \bigoplus_{\substack{k+l=m \\ k>p(S),\, l \geq q(T)}} H^k\left(s^! j_{!*} A\right) \boxtimes H^l\left(t^! B\right).$$

Цей простір буде нулем, якщо $m \leq p(S) + q(T)$.

Отже, існує єдиний ізоморфізм $\alpha_{A,B} : (j \times 1)_{!*}(A \boxtimes B) \xrightarrow{\sim} j_{!*} A \boxtimes B$ такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd}
(j \times 1)^*(j \times 1)_{!*}(A \boxtimes B) \arrow[r, "(j\times 1)^* \alpha_{A,B}", "\sim"'] \arrow[d, "\wr"'] & (j \times 1)^*(j_{!*} A \boxtimes B) \arrow[d, "\wr\ (3.1)"] \\
A \boxtimes B \arrow[r, equal] & A \boxtimes B
\end{tikzcd}$$

є комутативною. З єдиності ізоморфізму $\alpha_{A,B}$ випливає його функторіальність по A, B.

4. Функтор $R\,\mathrm{Hom}^\bullet$ і зовнішній тензорний добуток. Компонуючи функтор $R\Gamma = Rp_* : D(X) \to D(\mathbb{C}\text{-Vect})$ для $p : X \to pt$ із $R\,\underline{\mathrm{Hom}}$, одержуємо $R\Gamma \circ R\,\underline{\mathrm{Hom}} \simeq R\,\mathrm{Hom}^\bullet : D(X)^{\mathrm{op}} \times D(X) \to D(\mathbb{C}\text{-Vect})$.

***4.1.* Лема.** *Для довільних $E \in D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$ і $F \in D^{b,c}_{\mathscr{Y}}(Y)$ виконано $R\Gamma(E \boxtimes F) \simeq R\Gamma E \otimes_{\mathbb{C}} R\Gamma F$.*

Доведення. Застосувавши пропозицію 2.9 iii) до відображень $p_X : X \to pt$, $p_Y : Y \to pt$, отримаємо $(p_X \times p_Y)_*(E \boxtimes F) \simeq p_{X*} E \boxtimes p_{Y*} F = p_{X*} E \otimes_{\mathbb{C}} p_{Y*} F$.

4.2. Наслідок. *Для $A, B \in D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$ і $C, D \in D^{b,c}_{\mathscr{Y}}(Y)$ існує функторіальний ізоморфізм*

$$R\,\mathrm{Hom}^\bullet(A, B) \otimes_{\mathbb{C}} R\,\mathrm{Hom}^\bullet(C, D) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Hom}^\bullet(A \boxtimes C, B \boxtimes D).$$

Доведення. Можемо вважати, що комплекси B, D складаються з ін'єктивних в'язок. Тоді твердження випливає з леми 4.1 із $E = \underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$ і $F = \underline{\mathrm{Hom}}(C, D)$ і наслідку 2.7.

4.3. Наслідок. *Для $\mathscr{X}$-когомологічно конструктивних A, B і $\mathscr{Y}$-когомологічно конструктивних C, D із формули Кюннета випливає ізоморфізм*

$$\oplus_{i+j=k} \mathrm{Ext}^i_{D(X)}(A, B) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^j_{D(Y)}(C, D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^k_{D(X \times Y)}(A \boxtimes C, B \boxtimes D).$$

Зокрема, якщо $A, B \in \mathrm{Perv}(X)$ і $C, D \in \mathrm{Perv}(Y)$, тоді

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Perv}(X)}(A, B) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Perv}(Y)}(C, D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Perv}(X \times Y)}(A \boxtimes C, B \boxtimes D). \tag{4.1}$$

5. Зовнішній тензорний добуток Деліня збочених в'язок. З [3], пропозиція 1.4.18, випливає за індукцією на стратах, що абелева категорія $\mathrm{Perv}(X)$ є категорією із довжиною (тобто об'єкти мають скінченну довжину і простори Hom скінченновимірні). Отже, $\mathrm{Perv}(X)$ є індуктивною границею повних підкатегорій $\langle M \rangle$, еквівалентною до A-mod для деякої скінченновимірної асоціативної алгебри з одиницею A [4] (наслідок 2.17). Підкатегорія $\langle M \rangle$ утворена підфакторами M^n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Згідно з результатами Деліня [4] існує (абстрактний) зовнішній тензорний добуток категорій $\mathrm{Perv}(X)$ і $\mathrm{Perv}(Y)$ — універсальний функтор $\overset{D}{\boxtimes}: \mathrm{Perv}(X) \times \mathrm{Perv}(Y) \to \mathrm{Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}(Y)$, який набуває значень у деякій $\mathbb{C}$-лінійній абелевій категорії. З універсальності випливає, зокрема, що існує точний $\mathbb{C}$-лінійний функтор F та ізоморфізм

$$\boxtimes \simeq \left(\mathrm{Perv}(X) \times \mathrm{Perv}(Y) \xrightarrow{\overset{D}{\boxtimes}} \mathrm{Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}(Y) \xrightarrow{F} \mathrm{Perv}(X \times Y) \right). \tag{5.1}$$

Наша мета полягає в тому, щоб довести, що F — еквівалентність. Як тільки це буде доведено, зможемо вибрати за зовнішній тензорний добуток Деліня $\overset{D}{\boxtimes}$ геометричний зовнішній тензорний добуток $\boxtimes$ і за $\mathrm{Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}(Y)$ виберемо $\mathrm{Perv}(X \times Y)$. Таким чином, зможемо використати ту ж саму систему позначень $\boxtimes$ в абстрактному і геометричному значеннях.

5.1. Теорема. *Функтор* $F : \mathrm{Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}(Y) \to \mathrm{Perv}(X \times Y)$, *визначений ізоморфізмом* (5.1), *є еквівалентністю. Отже, можемо вибрати за тензорний добуток* $\mathrm{Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}(Y) = \mathrm{Perv}(X \times Y)$ *і* $\overset{D}{\boxtimes} = \boxtimes$.

Доведення. Результати п. 3 описують $\mathrm{Simp\,Perv}(X)$ — множину класів ізоморфізму простих об'єктів $\mathrm{Perv}(X)$. Для $\mathrm{Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}(Y)$ ця множина є тензорним добутком $\mathrm{Simp\,Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Simp\,Perv}(Y)$ множин для X і Y [4] (лема 5.9), внаслідок алгебраїчної замкнутості $\mathbb{C}$. З іншого боку, з пропозиції 3.1 випливає, що $\mathrm{Simp\,Perv}(X \times Y) = \mathrm{Simp\,Perv}(X) \boxtimes \mathrm{Simp\,Perv}(Y)$. Отже, функтор F відображає бієктивно список класів ізоморфізму простих об'єктів $\mathrm{Perv}(X) \overset{D}{\boxtimes} \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}(Y)$ на список класів ізоморфізму простих збочених в'язок $\mathrm{Perv}(X \times Y)$.

5.2. Лема ([5], лема 3.2.4). *Природне відображення* Ext *Йонеди до* Ext *у похідній категорії* $\theta : {}^Y\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Perv}(X)}(A, B) \to \mathrm{Ext}^i_{D(X)}(A, B) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{D(X)}(A, B[i])$ *бієктивне для* $k = 0, 1$ *та ін'єктивне для* $k = 2$ *для всіх* $A, B \in \mathrm{Perv}(X)$.

5.3. Лема. *Нехай* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — $\mathbb{C}$*-лінійні абелеві категорії з довжиною (тобто об'єкти мають скінченну довжину і простори* Hom *скінченновимірні). Тоді*

$$\oplus_{i+j=k} {}^Y\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(K, L) \otimes_{\mathbb{C}} {}^Y\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{B}}(M, N) \xrightarrow{\sim} {}^Y\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A} \overset{D}{\boxtimes} \mathcal{B}}\left(K \overset{D}{\boxtimes} M,\, L \overset{D}{\boxtimes} N\right).$$

Доведення. З визначення ${}^Y\mathrm{Ext}$ Йонеди [6] зрозуміло, що

$${}^Y\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Perv}(X)}(A, B) = \varinjlim_{\mathrm{Perv}(X) \supset \langle P \rangle \ni A, B} {}^Y\mathrm{Ext}^i_{\langle P \rangle}(A, B), \tag{5.2}$$

де P пробігає такі об'єкти $\operatorname{Perv}(X)$, що підкатегорія $\langle P\rangle$ містить A і B. Оскільки категорія $\langle P\rangle$ має достатньо ін'єктивних і проективних об'єктів, то можемо ототожнити ${}^Y\operatorname{Ext}^i_{\langle P\rangle}(C,D)$ з правим похідним функтором $\operatorname{Ext}^i_{\langle P\rangle}(C,D)$ функтора $\operatorname{Hom}_{\langle P\rangle}$.

Досить довести твердження для підкатегорій $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ типу $\langle P\rangle$. Потрібно упевнитись, що відображення зовнішнього добутку

$$\oplus_{i+j=k}\operatorname{Ext}^i_A(K,L)\otimes_{\mathbb{C}}\operatorname{Ext}^j_B(M,N)\ \to\ \operatorname{Ext}^k_{A\otimes_{\mathbb{C}}B}(K\otimes_{\mathbb{C}}M, L\otimes_{\mathbb{C}}N)$$

є біективним для скінченновимірних $\mathbb{C}$-алгебр A, B, скінченновимірних A-модулів K, L і скінченновимірних B-модулів M, N. Це якраз є одним з тверджень теореми XI.3.1 Картана і Ейленберга [7].

Поєднуючи наведені вище леми і наслідок 4.3, одержуємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
{}^Y\operatorname{Ext}^k_{\operatorname{Perv}(X)\overset{D}{\boxtimes}\operatorname{Perv}(Y)}\big(A\overset{D}{\boxtimes}C,\ B\overset{D}{\boxtimes}D\big) \arrow[d, "\wr"', "\text{Лема 5.3}" left] & \\
\underset{i+j=k}{\oplus}{}^Y\operatorname{Ext}^i_{\operatorname{Perv}(X)}(A,B)\otimes_{\mathbb{C}}{}^Y\operatorname{Ext}^j_{\operatorname{Perv}(Y)}(C,D) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "V"] & \underset{i+j=k}{\oplus}{}^Y\operatorname{Ext}^i_{D(X)}(A,B)\otimes_{\mathbb{C}}\operatorname{Ext}^j_{D(Y)}(C,D) \arrow[d, "\wr", "\text{Наслідок 4.3}" right] \\
{}^Y\operatorname{Ext}^k_{\operatorname{Perv}(X\times Y)}(A\boxtimes C, B\boxtimes D) \arrow[r, "\theta"] & \operatorname{Ext}^k_{D(X\times Y)}(A\boxtimes C, B\boxtimes D)
\end{tikzcd}$$

для всіх $A, B\in\operatorname{Perv}(X)$, $C, D\in\operatorname{Perv}(Y)$ і всіх $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тут V відображає

$$[0\to B\to M_1\to\ldots\to M_i\to A\to 0]\ \otimes\ [0\to D\to N_1\to\ldots\to N_j\to C\to 0]$$

до

$$0\to B\boxtimes D\to M_1\boxtimes D\to\ldots\to M_i\boxtimes D\to A\boxtimes N_1\to\ldots\to A\boxtimes N_j\to A\boxtimes C\to 0,$$

де середнє відображення — композиція $M_i\boxtimes D\to A\boxtimes D\to A\boxtimes N_1$. Комутативність квадрата перевіряється подібно до обчислення Йонеди [8] множення Картана і Ейленберга ([7], розділ XI.1).

Згідно з лемою 5.2 горизонтальні стрілки біективні для $k=0,1$ та ін'єктивні для $k=2$. Отже, те ж саме виконано для відображення V. Зокрема, індуковане F відображення груп ${}^Y\operatorname{Ext}^k$ між простими об'єктами $\operatorname{Perv}(X)\overset{D}{\boxtimes}\operatorname{Perv}(Y)$ до груп ${}^Y\operatorname{Ext}^k$ для $\operatorname{Perv}(X\times Y)$ біективне для $k=0,1$ та ін'єктивне для $k=2$. Залишається застосувати наступну лему.

5.4. **Лема.** *Нехай $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ — точний функтор між суттєво малими категоріями з довжиною. Припустимо, що F встановлює біекцію між списками класів ізоморфізму простих об'єктів. Припустимо також, що індуковані F відображення*

$${}^Y\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(T,S)\ \to\ {}^Y\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{B}}(FT,FS) \tag{5.3}$$

є біективними для $k=0,1$ та ін'єктивними для $k=2$ для всіх простих об'єктів T, S категорії $\mathcal{A}$. Тоді F — еквівалентність.

Доведення. Спочатку доводимо за індукцією по довжині T, що (5.3) — ізоморфізм для $k=0,1$ для простого S і довільного T. Дійсно, запишемо довгі точні послідовності для ${}^Y\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{A}}(-,S)$ і ${}^Y\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{B}}(F-,FS)$, пов'язані з $0 \to T' \to T \to T'' \to 0$, де T'' є простим, і використаємо лему про 5 гомоморфізмів. Далі, аналогічно доводимо за індукцією по довжині S, що (5.3) — ізоморфізм для $k = 0$ для всіх об'єктів S, T категорії $\mathscr{A}$. Отже, F — повний і строгий.

Тепер доводимо за індукцією по n, що F встановлює сюр'єкцію на множинах класів ізоморфізму об'єктів довжини $\leq n$ для $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$. Для $n = 1$ — це припущення леми. Для $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ довжини $n > 1$ можемо припустити існування

$$0 \to FS \to X \to FT \to 0 \tag{5.4}$$

для деякого простого $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ і деякого $T \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ з довжиною, меншою ніж n. Оскільки відображення ${}^Y\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(T,S) \to {}^Y\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{B}}(FT,FS)$ бієктивне, то існує коротка точна послідовність $0 \to S \to Y \to T \to 0$ у $\mathscr{A}$ така, що $0 \to FS \to FY \to FT \to 0$ конгруентна з (5.4). Зокрема, $X \simeq FY$.

Отже, F є повним, строгим і суттєво сюр'єктивним на об'єктах.

Застосовуючи цю лему до $\mathscr{A} = \mathrm{Perv}\,(X) \overset{D}{\boxtimes} \mathrm{Perv}\,(Y)$ і $\mathscr{B} = \mathrm{Perv}\,(X \times Y)$, доводимо теорему.

Додаток. А. Деякі співвідношення між похідними функторами. Наведемо деякі формули з роботи Бореля ([2], § 10). Всі простори вважаються локально компактними, локально цілком паракомпактними, локально стягуваними і скінченної когомологічної розмірності над $\mathbb{C}$.

Для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ і $A, B \in D(Y)$ маємо

$$f^*(A \otimes B) \;\simeq\; f^*A \otimes f^*B \tag{A.1}$$

за пропозицією 10.1 [2].

Для $A, B, C \in D(X)$ маємо (за пропозицією 10.2 [2])

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A \otimes B, C) \;\simeq\; R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, R\,\underline{\mathrm{Hom}}(B, C)). \tag{A.2}$$

Для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ і $A \in D(Y)$, $B \in D(X)$ маємо

$$f_*R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(f^*A, B\big) \;\simeq\; R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, f_*B) \tag{A.3}$$

за пропозиціями 10.3(1) і 10.8(2) з [2]

$$f_!\big(B \otimes f^*A\big) \;\simeq\; f_*B \otimes A. \tag{A.4}$$

Позначаючи через $p_1 : X \times Y \to X$ проекцію на перший простір, для $A, B \in D^b(X)$ маємо

$$p_1^*R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \;\simeq\; R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*A, p_1^*B\big) \tag{A.5}$$

за пропозицією 10.21 [2].

Позначаючи через $p_2 : X \times Y \to Y$ проекцію на другий простір, для $\mathscr{X}$-когомологічно локально постійного $A \in D^b_{\mathscr{X}}(X)$ і $\mathscr{Y}$-когомологічно конструктивного $B \in D^{b,c}_{\mathscr{Y}}(Y)$ маємо

$$p_1^*\mathfrak{D}A \otimes p_2^*B \;\simeq\; R\,\underline{\mathrm{Hom}}\big(p_1^*A, p_2^!B\big) \tag{A.6}$$

відповідно до теореми 10.25 [2].

Тут $\mathfrak{D}A = R\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathfrak{D}_X) \in D^b_{\mathscr{X}}(X)$ позначає двоїстий Верд'є до A і $\mathfrak{D}_X =$

$= g^! \mathbb{C} \in D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$, $g : X \to pt$, є дуалізуючою в'язкою [9] (див. також [2], 7.18 і теорему 8.3). Підставляючи $A = \mathbb{C}$ у (A.6), одержуємо

$$\mathfrak{D}_X \boxtimes B \simeq p_2^! B. \tag{A.7}$$

За наслідком 10.26 [2] маємо

$$\mathfrak{D}_X \boxtimes \mathfrak{D}_Y \simeq \mathfrak{D}_{X \times Y} \tag{A.8}$$

і $\mathfrak{D}^2 \simeq \mathrm{Id}$ згідно з [9] (див. також теорему 8.10 [2]).

Якщо $f : X \to Y$ — стратифіковане відображення, то

$$\mathfrak{D} f^* = f^! \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D} f^! = f^* \mathfrak{D}. \tag{A.9}$$

Крім цього, якщо стратифіковане відображення f є властивим, або алгебраїчним над $\mathbb{C}$, або якщо кожний прошарок f має компактифікацію, тоді за теоремою 10.17 [2] маємо

$$\mathfrak{D} f_* = f_! \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D} f_! = f_* \mathfrak{D}. \tag{A.10}$$

A.1. Означення (див. [3], пропозиція 2.1.9). *Нехай $U \subset X$ — відкритий стратифікований підпростір стратифікованого псевдомноговиду $X = (X, \mathscr{X}, p)$. Позначимо через $j : U \hookrightarrow X$ вкладення. Нехай $A \in \mathrm{Perv}(U, U \cap \mathscr{X}, p)$. Його продовження $j_{!*}A$ є об'єктом $B \in D^{b,c}_{\mathscr{X}}(X)$, оснащеним ізоморфізмом $j^* B \simeq A$ таким, що для будь-якого страту $s : S \hookrightarrow X$, що не міститься в U, маємо $H^i s^* B = 0$ для $i \geq p(S)$ і $H^i s^! B = 0$ для $i \leq p(S)$. Об'єкт B визначений однозначно з точністю до єдиного ізоморфізму. Це дає функтор $j_{!*} : \mathrm{Perv}(U, U \cap \mathscr{X}, p) \to \mathrm{Perv}(X, \mathscr{X}, p)$.*

Якщо $k : V \hookrightarrow U$ — інше стратифіковане відкрите вкладення, то існує ізоморфізм (2.1.7.1) із [3]:

$$(j \circ k)_{!*} \xrightarrow{\sim} j_{!*} \circ k_{!*}. \tag{A.11}$$

Автор вдячний П. Делiню, Д. Н. Єттеру, Л. Крейну і С. А. Овсієнку за плідні обговорення.

1. *Haefliger A.* Introduction to piecewise linear intersection homology // Intersection Cohomology. Progress in Math. – 1984. – № 50. – P. 1 – 21.
2. *Borel A.* Sheaf theoretic intersection cohomology // Ibid. – 1984. – № 50. – P. 47 – 182.
3. *Beilinson A. A., Bernstein J., Deligne P.* Faisceaux pervers // Astérisque. – 1982. – № 100. – 172 p.
4. *Deligne P.* Catégories tannakiennes // The Grothendieck Festschrift. Progress in Math. – 1991. – № 87. – P. 111 – 195.
5. *Beilinson A. A., Ginzburg V., Soergel W.* Koszul duality patterns in representation theory // J. Amer. Math. Soc. – 1996. – **9**, № 2. – P. 473 – 527.
6. *Yoneda N.* On the homology theory of modules // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I. – 1954. – 7. – P. 193 – 227.
7. *Cartan H., Eilenberg S.* Homological algebra: Princeton Mathematical Series. Vol. 19. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. – 510 p.
8. *Yoneda N.* Note on products in Ext // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – **9**, № 6. – P. 873 – 875.
9. *Verdier J. L.* Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts // Seminaire Bourbaki, 1965/66, Astérisque. – 1965. – № 300. – P. 1 – 13.

Одержано 15.12.99