УДК 512.643.5; 517.988.57

Я. М. Дымарский (Луган. пед. ун-т)

О МНОГООБРАЗИЯХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ. II

We consider a manifold of normalized eigenvectors of self-adjoint operators. We present the homotopic classification of typical quasilinear eigenvector problems on the basis of properties of the manifold.

Розглянуто многовид нормованих власних векторів самоспряжених операторів. За допомогою властивостей многовиду наведено гомотопічну класифікацію типових квазілінійних задач на власні вектори.

Настоящая работа является завершением работы [19], поэтому мы продолжаем нумерацию пунктов, утверждений, ссылок и т. д.

6. Отображение $\mathrm{Gr}A$. Исследуем свойства отображений A и $\mathrm{Gr}A$ (см. (2), (6)) в связи со свойствами многообразия с особенностями P^* (лемма 5).

Определение 3. *Отображение* A *и соответствующую задачу* (1) *назовем типичными, если* $\mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A) \cap P^* = \varnothing$.

Теорема 4. *Типичные отображения образуют открытое, всюду плотное множество в пространстве* C^r*-отображений* $(r \geq 0)$ *сферы* S^{n-1} *в* $L^{(n)}$.

Доказательство. Открытость непосредственно следует из компактности S^{n-1} и замкнутости P^* (лемма 5). Поскольку непрерывное отображение можно аппроксимировать гладким, достаточно доказать плотность гладких типичных отображений. В $L^{(n)} \times S^{n-1}$ $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A) - \operatorname{codim} P^* = -1$ (лемма 5). Малым δ-возмущением отображения $\mathrm{Gr}A$ в пространстве C^r-отображений $(r \geq 1)$ из S^{n-1} в $L^{(n)} \times S^{n-1}$ можно добиться, чтобы образ $\mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A)_\delta$ и многообразие P^* пересекались трансверсально, т. е. $\mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A)_\delta \cap P^* = \varnothing$. Покажем, что найдется отображение A_δ, близкое A, у которого $\mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A_\delta) = \mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A)_\delta$ (откуда и будет следовать доказательство теоремы). Поскольку $\nu_2 \mathrm{Gr}A = \mathrm{id}(S^{n-1})$ (см. (10)), то для достаточно малых δ произведение $\nu_2(\mathrm{Gr}A)_\delta$ является диффеоморфизмом, близким тождественному. Искомое отображение $A_\delta = \nu_1(\mathrm{Gr}A)_\delta(\nu_2(\mathrm{Gr}A)_\delta)^{-1}$. В самом деле, $(\nu_2(\mathrm{Gr}A)_\delta) \times (\nu_2(\mathrm{Gr}A)_\delta)^{-1} = \mathrm{id}$. Поэтому $((\mathrm{Gr}A)_\delta(\nu_2(\mathrm{Gr}A)_\delta)^{-1})(u) \in L^{(n)} \times u$. Следовательно, отображение $(\mathrm{Gr}A)_\delta(\nu_2(\mathrm{Gr}A)_\delta)^{-1}$ является сечением и $\mathrm{Gr}A_\delta = (\mathrm{Gr}A)_\delta(\nu_2(\mathrm{Gr}A)_\delta)^{-1}$. Отсюда уже следует совпадение образов $\mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A_\delta) = \mathrm{Im}(\mathrm{Gr}A)_\delta$.

Отметим очевидные свойства отображения $\mathrm{Gr}A$, которые понадобятся нам в следующем пункте. В силу определения, отображение $\mathrm{Gr}A$ является сечением тривиального расслоения ν_2. Если же A типично, то $\mathrm{Gr}A$ является также сечением подрасслоения $\nu_2(R)$ и, кроме того, $(n-1)$-мерным сфероидом многообразия R.

7. Индекс пересечения. Роль многообразий P, $P(k,m)$ (см. (5), (9)) и отображения $\mathrm{Gr}A$ в обнаружении н. с. в. объясняет очевидная, но принципиальная в предлагаемой конструкции теорема.

Теорема 5. *Вектор* u *является н.с.в. задачи* (1) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Gr}\,A(u) \in P$. *Номер и кратность н.с.в. определяются индексами* (k,m) *того страта, которому принадлежит точка* $\mathrm{Gr}\,A(u) \in P(k,m) \subset P$.

В силу теоремы 4, имеет смысл рассматривать типичные отображения (т. е. искать простые н. с. в.) — только так будем поступать впредь. Поскольку в P, согласно лемме 4, $\operatorname{codim} P(k,1) = 0$, ориентация P индуцирует ориентацию в стратах $P(k,1)$. В $L^{(n)} \times S^{n-1}$ коразмерность $\operatorname{codim} P(k,1) = n-1$, поэтому для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ определен ориентированный индекс пересечения (см. [14, с. 147]) $\chi^{(k)}(A) = \chi(P(k,1), \mathrm{Gr}\,A)$ страта с отображением $\mathrm{Gr}\,A$. Из свойств индекса и теоремы 5 следует, что отличие $\chi^{(k)}(A)$ от нуля гарантирует существование у задачи (1) по крайней мере одного простого н. р. с номером k. Если же отображение $\mathrm{Gr}\,A$ трансверсально страту $P(k,1)$ (а этот случай типичен для гладких отображений), то количество н. р. не менее, чем $\left|\chi^{(k)}(A)\right|$.

Оказывается для любого отображения A между всеми введенными индексами пересечения и эйлеровой характеристикой сферы [13, с. 526] существует линейная зависимость, которую описывает следующая лемма.

Лемма 14. *Для любого отображения* A *сумма всех индексов пересечения равна эйлеровой характеристике сферы, т. е. сумма* $(\chi^{(1)}(A)+\ldots+\chi^{(n)}(A))$ *равна* 2, *если* n *нечетно, и* 0, *если* n *четно.*

Доказательство. Отображение $\mathrm{Gr}\,A$ является сечением тривиального расслоения $L^{(n)} \times S^{n-1}$ над сферой (см. (10)). В силу теоремы 3, $L^{(n)} \times S^{n-1} = \nu_2(P) \oplus TS^{n-1}$. Поэтому сечение представимо в виде суммы двух сечений: $\mathrm{Gr}\,A = \mathrm{Pr}_P\,\mathrm{Gr}\,A + \mathrm{Pr}_T\,\mathrm{Gr}\,A$. Из этого разложения следует, что:

1) $\mathrm{Gr}\,A(u) \in P \Leftrightarrow \mathrm{Pr}_T\,\mathrm{Gr}\,A(u) = 0$, т. е. u является особой точкой касательного векторного поля на сфере;

2) отображение $\mathrm{Gr}\,A(u)$ трансверсально P в точке $u \Leftrightarrow u$ — *невырожденная* особая точка касательного векторного поля на сфере. (Легко видеть, что касательное поле задается отображением $\mathrm{Pr}_T\,\mathrm{Gr}\,A(u) = A(u)u - \langle A(u)u, u\rangle u \in T_u S^{n-1}$.) Пусть $U \subset S^{n-1}$ — окрестность точки u, тогда $W = U \times L_u^{(n)} \times T_u S^{n-1}$ — локальная тривиализация расслоения ν_2 над U. Дальнейшие рассуждения проводим в W.

Возьмем в точке $p = (A(u), u) = \mathrm{Gr}\,A(u)$, удовлетворяющей свойствам 1 и 2, такой ориентирующий для W репер, чтобы первые $(n-1)$ векторов принадлежали U, следующие $(n-1)n/2+1$ — принадлежали $L_u^{(n)}$, а оставшиеся $(n-1)$ векторы репера принадлежали пространству $T_u S^{n-1}$. Тогда индекс пересечения многообразия $P = U \times L_u^{(n)}$ с отображением $\mathrm{Gr}\,A$ *в точке* p совпадает с *индексом особой точки* u касательного векторного поля. Но полный индекс пересечения и эйлерова характеристика равны каждый сумме названных совпадающих индексов точек. Лемма доказана.

Определение 4. *Вектор-индексом пересечения задачи* (1) *назовем целочисленный* $(n-1)$*-мерный вектор* $\overline{\chi}(A) = (\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n-1)})$.

***Пример* 4.** $A(u) \equiv A$. В этом случае $\overline{\chi}(A) = (2, -2, \ldots)$. Обоснуем это утверждение. Понятно, что каждый страт $P(k,1)$, $k = 1, \ldots, n$, пересекается образом отображения $\mathrm{Gr}\,A(u) = (A, u)$ в двух точках $(A, \pm u_k)$, где u_k — н. с. в. оператора A. Покажем, что индексы точек пересечения, принадлежащих одному страту, совпадают, а принадлежащих соседним стратам, — отличаются знаком. Рассмотрим случай $n = 2$ (примеры 2, 3а). Выйдем из точки $A \in$

$\in \hat{L}^{(2)}(1,1)$ и обойдем в плоскости $\hat{L}^{(2)}$ один раз вокруг особой точки $0 = \hat{L}^{(2)}(1,2)$. Поднимем эту петлю в $\hat{P}$, выйдя из точки (A, u_1). Тогда получим в качестве конечной точки $(A, -u_1)$. Последнее означает, что у точек $(A, \pm u_1)$ индексы совпадают. Чтобы попасть из точки (A, u_1) в точку (A, u_2), придется пересечь особое многообразие $\hat{P}(1,2)$. В момент пересечения проекция ориентирующего репера многообразия $\hat{P}$ на плоскость $\hat{L}^{(2)}$ вырождается, а затем ориентация проекции изменяется на противоположную. Для произвольного n эти рассуждения остаются справедливыми — достаточно выделить в пространстве операторов $\hat{L}^{(n)}$ двумерное подпространство $\hat{L}^{(2)} \times A_1$, где первый сомножитель — все операторы, действующие в плоскости $\{u_k, u_{k+1}\}$, а второй сомножитель — сужение A на ортогональное к $\{u_k, u_{k+1}\}$ подпространство. Переход от фактор-пространства $\hat{L}^{(n)}$ к пространству $L^{(n)}$ не отменяет полученные выводы, так как и $\hat{L}^{(n)}$, и $\hat{P}$ домножаются на одномерное пространство скалярных операторов.

Было отмечено, что отображение $\mathrm{Gr}\,A$ является $(n-1)$-мерным сфероидом. Поэтому, в силу гомотопической инвариантности индекса пересечения, вектор-индекс $\overline{\chi}$ зависит только от того, какому элементу гомотопической группы $\pi_{n-1}(R)$ принадлежит сфероид $\mathrm{Gr}\,A$. Однако $\mathrm{Gr}\,A$ также является сечением расслоения $\nu_2(R)$, поэтому достаточно исследовать то подмножество гомотопической группы $\pi_{n-1}(R)$, которое порождают все сечения расслоения $\nu_2(R)$. Поскольку расслоение $\nu_2(R)$ имеет сечение, то [14, с. 78] при $n \geq 3$ имеет место изоморфизм

$$\pi_{n-1}(R) = \pi_{n-1}(R_u) \oplus \pi_{n-1}(S^{n-1}) = \pi_{n-1}(R_u) \oplus \mathbf{Z}. \tag{11}$$

При $n \geq 3$ многообразия R, R_u, S^{n-1} односвязны (лемма 6, следствие 4), поэтому мы не указываем отмеченную точку в группах гомотопий.

При $n = 2$ изоморфизм (11) также справедлив и $\pi_1(R_u) = \mathbf{Z}$, так как многообразие R гомотопически эквивалентно двумерному тору (примеры 2, 3а).

Исследуем первое слагаемое в прямой сумме.

Теорема 6. $\pi_{n-1}(R_u) = \mathbf{Z}^{n-1}$.

Доказательство. Известно [20, с. 82], что если $M \subset \mathbf{R}^l \subset \mathbf{R}^{l+1}$, где M — произвольное подмножество, то имеет место гомотопическая эквивалентность: $\mathbf{R}^{l+1} \setminus M \simeq \Sigma(\mathbf{R}^l \setminus M)$ (где знак Σ означает надстройку [14, с. 21]). В нашей ситуации (в силу леммы 9 и следствия 3): а) $M = P_u^* \subset L_u^{(n)} = \mathbf{R}^l \subset L^{(n)} = \mathbf{R}^{l+(n-1)}$, причем в $L_u^{(n)}$ коразмерность $\operatorname{codim} P_u^* = 1$; б) $L_u^{(n)} \setminus P_u^* = \bigcup_{k=1}^{n} L_u^{(n)}(k,1)$; $L_u^{(n)}(k,1)$ — связные открытые подмножества $L_u^{(n)}$; в) $R_u = L^{(n)} \setminus P_u^*$. Заменяя $(n-1)$ раз вложение надстройкой, получаем $R_u \simeq \Sigma^{n-1}(\mathbf{R}^l \setminus P_u^*)$. Теперь, применяя $(n-1)$ раз теорему о приведенных гомологических группах надстройки [14, с. 106], выражаем $(n-1)$-ю гомологическую группу через нулевую: $\tilde{H}_{n-1}(R_u) = \tilde{H}_0(\mathbf{R}^l \setminus P_u^*)$. Поскольку $\mathbf{R}^l \setminus P_u^*$ — объединение n связных открытых множеств $L_u^{(n)}(k,1)$ (см. п. б)), нулевая приведенная гомологическая группа $\tilde{H}_0(\mathbf{R}^l \setminus P_u^*) = \mathbf{Z}^{n-1}$. Очевидно, что $\tilde{H}_i(R_u) = 0$ для всех $i = 0, \ldots, n-2$. В силу обратной теоремы Гуревича [14, с. 120], $\pi_{n-1}(R_u) = \tilde{H}_{n-1}(R_u) = \tilde{H}_0(\mathbf{R}^l \setminus P_u^*) = \mathbf{Z}^{n-1}$. Теорема доказана.

Ориентация в $L_u^{(n)}$ индуцирует ориентацию в открытых подмножествах

$L_u^{(n)}(k,1)$. Поскольку в R_u коразмерность $\operatorname{codim} L_u^{(n)}(k,1) = n-1$ (см. а) – в) в доказательстве теоремы 6), для каждого $(n-1)$-мерного сфероида $sf: S^{n-1} \to$ $\to R_u$ определен целочисленный $(n-1)$-мерный вектор-индекс пересечения $\overline{\chi}_u(sf) = (\chi_u^{(1)}, \ldots, \chi_u^{(n-1)})$, где $\chi_u^{(k)} = \chi(L_u^{(n)}(k,1), sf)$ — ориентированный индекс пересечения страта с отображением. Введенные индексы пересечения назовем слоевыми.

***Замечание* 5.** Поскольку ориентация в стратах $L_u^{(n)}(k,1)$ индуцирована подпространством $L_u^{(n)}$, сумма всех n слоевых индексов пересечения равна индексу пересечения сфероида с объемлющим пространством $L_u^{(n)} \subset R_u$ и по этой причине [13, с. 524] равна нулю:

$$\chi_u^{(1)} + \ldots + \chi_u^{(n)} = \chi(L_u^{(n)}, sf) = 0$$

(ср. с утверждением леммы 14). Связь между слоевым вектор-индексом и данным в определении 4 описана ниже (см. формулу (13)).

Следующее утверждение описывает группу $\pi_{n-1}(R_u)$ с помощью слоевого вектор-индекса пересечения.

Теорема 7. *Два сфероида sf_1 и sf_2 принадлежат одному элементу группы $\pi_{n-1}(R_u) \Leftrightarrow \overline{\chi}_u(sf_1) = \overline{\chi}_u(sf_2)$.*

Доказательство. Описанная в доказательстве предыдущей теоремы гомотопическая эквивалентность позволяет строить все $(n-1)$-мерные циклы $\bar{c}_{n-1}(R_u)$, представляющие приведенные гомологии R_u, в виде композиции надстроек $\Sigma^{n-1}\left(\bar{c}_0\left(\bigcup_{k=1}^{n} L_u^{(n)}(k,1)\right)\right)$ над нульмерными циклами приведенных гомологий объединения n связных множеств [14, с. 106]. Последние, т. е. циклы $\bar{c}_0\left(\bigcup_{k=1}^{n} L_u^{(n)}(k,1)\right)$, представляют собой сумму $(i_1\gamma_1 + \ldots + i_n\gamma_n)$ нульмерных симплексов (точек) каждого множества $L_u^{(n)}(k,1)$ с набором коэффициентов, удовлетворяющих условию $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 0$ [14, с. 97]. Другими словами, произвольный набор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ из первых $(n-1)$ коэффициентов полностью определяет цикл $\bar{c}_{n-1}(R_u)$. Изоморфизм Гуревича позволяет интерпретировать циклы $\bar{c}_{n-1}(R_u)$ как элементы sf группы $\pi_{n-1}(R_u)$, а наборы $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ — как вектор-индексы $\chi(L_u^{(n)}(k,1), sf)$. Теорема доказана.

Теперь опишем подмножество $\pi_{n-1}^{\sec}(R) \subset \pi_{n-1}(R_u)$, порожденное всеми сечениями расслоения $\nu_2(R)$. Обозначим, как обычно, через $\nu_2(R)_*: \pi_{n-1}(R_u) \to$ $\to \pi_{n-1}(S^{n-1})$ эпиморфизм гомотопических групп тотального пространства и базы расслоения, порожденный проектированием $\nu_2(R)$.

Теорема 8. $\pi_{n-1}^{\sec}(R) = (\nu_2(R)_*)^{-1}(1)$, *где* $1 \in \mathbf{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1})$. *Другими словами, $\pi_{n-1}^{\sec}(R)$ является смежным классом по подгруппе $\pi_{n-1}(R_u)$ (см. (11)), который порожден любым сечением.*

Доказательство. Если s — сечение $\nu_2(R)$, то произведение $\nu_2(R)\cdot s =$ $= \operatorname{id}(S^{n-1})$. Поэтому $\pi_{n-1}^{\sec}(R) = (\nu_2(R)_*)^{-1}(1)$.

Пусть $r = (A, v) \in R_v \subset R$ — отмеченная точка. Пусть $s = (A(u), u)$ и sf — соответственно сечение $\nu_2(R)$ и $(n-1)$-мерный сфероид слоя R_v, оба с отмеченной точкой r. Покажем, что сумма $s + sf \simeq s_1$ [14, с. 63] гомотопически эквивалентна в R некоторому сечению s_1 расслоения $\nu_2(R)$. Идея доказательства состоит в том, что мы разнесем точки образа $\operatorname{Im}(sf)$ по разным (близким к R_v) слоям.

Сфероид sf слоя R_v — это отображение, для которого выполняется тождество $sf(u) \equiv ((\nu_1 \cdot sf)(u), v)$, где $\nu_1 \cdot sf : S^{(n)} \to L^{(n)} \setminus P_v^*$. Без ограничения общности можно считать, что:

1) $r \notin P$, т. е. вектор v и все векторы u в некоторой 3ε-окрестности точки v не являются н. с. в. оператора A (расстояние от v до u равно длине дуги меридиана);

2) в 3ε-окрестности точки v первая компонента сечения $s(u) = (A(u), u)$ постоянна, т. е. $A(u) \equiv A$;

3) для каждого u из 3ε-окрестности точки v справедливо $\mathrm{Im}(\nu_1 \cdot sf) \cap \cap P_u^* = \varnothing$. Пусть $S_{j\varepsilon}^{n-2}$, $j = 1, 2,$ — параллели сферы S^{n-1}, отстоящие от полюса v на расстоянии $j\varepsilon$. Введем обозначения для подмножеств сферы, порожденных параллелями: V_ε — ε-окрестность точки v; W_ε — открытый сферический слой, заключенный между параллелями $S_{j\varepsilon}^{n-2}$, $j = 1, 2$; S_{seg}^{n-1} — открытый сферический сегмент, находящийся ниже второй параллели.

Сумму $s + sf$ определим удобным для нас способом (конечно, гомотопически эквивалентным стандартному). Рассмотрим „букет" из двух $(n-1)$-мерных сфер, которые назовем первой и второй. Нам удобно считать, что вторая сфера букета есть второй экземпляр данной сферы S^{n-1} и что общей точкой букета является точка v. Данную сферу сначала превратим в букет, сжав ее по параллели S_ε^{n-2} в точку v, причем превращение в букет осуществим следующим образом: точки замыкания сегмента $\overline{S}_{\text{seg}}^{n-1}$ отображаются тождественно в точки второй сферы; слой $\overline{W}_\varepsilon$ превращается в 2ε-окрестность точки v второй сферы в результате двукратного растяжения дуг меридианов; замыкание окрестности $\overline{V}_\varepsilon$ превращается в первую сферу букета. Обозначим сужение на $\overline{V}_\varepsilon$ построенного отображения через α_1, а сужение на W_ε — через α_2. Точку v букета отобразим в r, первую сферу букета отобразим с помощью sf, а вторую — с помощью s. Полученное отображение есть $s + sf$. Обозначим через $\alpha_2(t,u)$ гомотопию по $t \in [0,1]$ отображения $\alpha_2(0,\cdot) = \alpha_2$ в тождественное отображение сферического слоя W_ε, осуществляемую равномерным по t сжатием дуг меридианов при условии, что на $S_{2\varepsilon}^{n-2}$ для всех t отображение $\alpha_2(t,\cdot) \equiv \mathrm{id}$. Обозначим через $\gamma(t,u) = ((1-t)v + tu)/|(1-t)v + tu|$, где $u \in \in S^{n-1} \setminus (-v)$, гомотопию постоянного отображения (в точку v) в тождественное отображение. Теперь определим искомую гомотопию так:

$$(s+sf)(t,u) = \begin{cases} ((\nu_1 \cdot sf \cdot \alpha_1)(u), \gamma(t,u)), & \text{если } u \in \overline{V}_\varepsilon, \\ (A, \alpha_2(t,u)), & \text{если } u \in W_\varepsilon, \\ s(u) = (A(u), u), & \text{если } u \in \overline{S}_{\text{seg}}^{n-1}. \end{cases} \qquad (12)$$

Опираясь на допущения 1 – 3, сформулированные в начале доказательства, убедимся в том, что отображение $(s+sf)(1,\cdot)$ гомотопно $s+sf = (s+sf)(0,\cdot)$ в R и является сечением. Во-первых, отображение (12) непрерывно на $[0,1] \times S^{(n-1)}$. Достаточно проверить непрерывность на компонентах отображения в точках склейки, т. е. на $S_{j\varepsilon}^{n-2}$. Если $u \in S_\varepsilon^{n-2}$, то:

1) $(\nu_1 \cdot sf \cdot \alpha_1)(u) = (\nu_1 \cdot sf)(v) = \nu_1(A, v) = A$;

2) $\gamma(t,u) \equiv \alpha_2(t,u)$ по t.

Если $u \in S_{2\varepsilon}^{n-2}$, то:

1) $A \equiv A(u)$;

2) $\alpha_2(t,u) \equiv u$.

Во-вторых, для каждого $t \in [0,1]$ образ отображения $(s+sf)(t,\cdot)$ не пересекает особое множество P^*. Наконец, $\gamma(1,u)\equiv u$, $\alpha_2(1,u)\equiv u$, следовательно, $(s+sf)(1,\cdot)$ — сечение. Теорема доказана.

Определение 5. *Две типичные задачи* (1) *назовем гомотопически эквивалентными, если соответствующие отображения* $\mathrm{Gr}\,A$ *гомотопически эквивалентны в классе сечений расслоения* $\nu_2(R)$.

С помощью введенных индексов можно дать гомотопическую классификацию типичных задач. Из теоремы 8 следует, что любое отображение $\mathrm{Gr}\,A$ гомотопически эквивалентно сумме: $\mathrm{Gr}\,A \simeq \mathrm{Gr}\,A + sf$, где sf — некоторый $(n-1)$-мерный сфероид в слой R_u такой, что $r=(A,u)\in \mathrm{Im}\,(sf)$. Без ограничения общности можно считать, что $r=(A,u)\notin P$. В этом случае, в силу аддитивности индекса пересечения, компоненты слоевого вектор-индекса $\overline{\chi}_u(sf)$ являются (при согласованном выборе ориентации слоя $L_u^{(n)}$ и многообразия P) слагаемыми компонент вектор-индекса $\overline{\chi}(A)$. Учитывая пример 4, получаем формулу

$$\overline{\chi}(A) = \overline{\chi}_u(sf) + (2,-2,\ldots). \tag{13}$$

Из теорем 6, 7 и формулы (13) непосредственно следует основная теорема.

Теорема 9. *Вектор-индекс пересечения* $\overline{\chi}(A)$ *типичной задачи* (1) *принимает все значения из* $\mathbf{Z}^{n-1}$. *Две типичные задачи* (1) *гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их вектор-индексы пересечения.*

Следствие 6. *Для любого* $(n-1)$*-мерного вектора* $(m_1,\ldots,\hat{m}_i,\ldots,m_n)$ ($\hat{m}_i$ *пропущено*) *с целыми неотрицательными компонентами существует типичная задача* (1), *у которой количество н.р. с номером* $k=1,\ldots,\hat{i},\ldots,n$ *не меньше чем* m_k.

19. *Дымарский Я. М.* О многообразиях собственных векторов линейных и квазилинейных конечномерных самосопряженных операторов. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 156 – 167.
20. *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т.* Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 182 с.

Получено 27.05.99