УДК 512.54

О. О. Одінцова (Нац. пед. ун-т, Київ)

ПРО ОДИН КЛАС СЕПАРАТОРНО ДЕДЕКІНДОВИХ ГРУП

We describe locally solvable groups G in which infinite subgroups are normal if they do not belong to some proper subgroup of a group under consideration.

Описуються локально розв'язні групи G, в яких нормальними є нескінченні підгрупи при умові їх неналежності деякій власній підгрупі досліджуваної групи.

У сучасній теорії груп важливу роль відіграє вивчення груп, в яких ті чи інші підгрупи задовольняють заздалегідь задані умови. Однією з умов може бути, наприклад, умова нормальності. Як відомо, групи, всі підгрупи яких нормальні, називаються дедекіндовими групами. Звужуючи систему підгруп, на які накладається умова нормальності, одержують узагальнення дедекіндових груп. У даній статті розглядається одне з таких узагальнень: конструктивно описано групи G, в яких нормальними є нескінченні підгрупи, що не належать деякій власній підгрупі досліджуваної групи G. Такі групи позначено $H(I\backslash S)$-групами. Легко встановити, що ці групи можуть мати довільний періодичний комутант, тому $H(I\backslash S)$-групи описано при додатковій умові локальної розв'язності. $H(I\overline{C}\backslash S)$-групами позначено такі групи G, в яких нормальними є нескінченні нециклічні підгрупи при умові їх неналежності деякій власній підгрупі S з G. Групу, в якій нормальні власні підгрупи, коли вони не належать деякій власній підгрупі досліджуваної групи, позначено $H(S)$-групою. Конструктивний опис $H(S)$-груп подано в твердженні 1.

Твердження 1 (теореми 1, 2 з [1]). *Група G тоді і тільки тоді є $H(S)$-групою, коли вона є групою одного з типів:*

1) *G — неодинична дедекіндова група;*

2) *$G = P \times D$, де D — холлівська періодична дедекіндова підгрупа групи G, P — силовська p-підгрупа групи G, $P = C \cdot B$, де C — локально циклічна підгрупа, нормальна в групі G, що містить таку підгрупу $\langle a \rangle$, для якої*

$$|a| = p^{\alpha}, \quad P' = \langle a^{p^k} \rangle = a \cap B \subset Z(G), \quad \alpha > k \geq \alpha - k > 0,$$

B — група, що породжується своїми підгрупами $B_i = P' \times \langle b_i \rangle$, $|b_i| = p^{\beta_i}$, $i \in I$, $|I| > 0$, $P' < B$; фактор-група B/P' розкладається в прямий добуток підгруп B_i/P'; якщо $|I| = 0$, то $B = P'$, існує таке натуральне m, для якого $k - m + 1 \geq \beta_i > 0$, а якщо $p^{k-m+1} = 2$, то $B' = 1$.

У твердженні 2 вказано ступінь розв'язності $H(I\overline{C}\backslash S)$-груп, цей факт суттєво використовується при доведенні основної теореми статті.

Твердження 2 (наслідок 2 з роботи [2]). *Нехай G — неперіодична локально ступінчаста або періодична локально розв'язна $H(I\backslash S)$-група, тоді G — розв'язна група. Якщо G — нескінченна група, то $G''' = 1$. У неперіодичній групі G комутант $G' = 1$.*

Теорема. *Локально розв'язні $H(I\backslash S)$-групи G вичерпуються групами таких типів:*

1) *G — скінченна неодинична розв'язна група, яка породжується своїми ненормальними циклічними підгрупами;*

2) *G — $H(S)$-група;*

3) *G — розширення своєї квазіциклічної підгрупи R за допомогою $H(S)$-групи;*

4) *$G = R \leftthreetimes D$, де R — прямий добуток $l > 1$ квазіциклічних p-груп, $D =$*

$= B \times P$ — скінченна нільпотентна $H(S)$-група, де P — силовська p-підгрупа з D, в якій нормальні всі підгрупи $\langle g \rangle$, що не належать деякій максимальній підгрупі M з P, а елемент g індукує на R p-адично незвідний автоморфізм, $\langle g \rangle \lhd D$, $D/\langle g \rangle$ — дедекіндова група;

5) $G = P \leftthreetimes B$, де $|B| < \infty$, P — черніковська силовська p-підгрупа з G з повною частиною R, що розкладається в прямий добуток $p-1$ квазіциклічних p-підгруп, p — просте число, $p > 2$, P містить таку підгрупу C, що $C \leq R < G$, $|P : C| = p$, довільний елемент $g \in P \setminus C$ індукує на R p-адично незвідний автоморфізм, $R\langle g \rangle \lhd G$, $[P, B] < R$, $G/(R\langle g \rangle)$ — дедекіндова група.

Для того щоб довести твердження теореми, нам потрібні наступні результати.

Лема 1. *Розв'язні нечерніковські $H(I\overline{C}\backslash S)$-групи G тоді і тільки тоді є нечерніковськими $H(S)$-групами, коли вони є групами, в яких нормальні всі нерозкладні циклічні підгрупи при умові їх неналежності деякій власній підгрупі досліджуваної групи G.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Якщо G — дедекіндова група, то вона є $H(S)$-групою, і необхідність доведено.

Нехай в подальшому G — недедекіндова група, тоді за лемою 2 з [3] G — періодична група з нормальними нескінченними нециклічними підгрупами, що не належать деякій власній підгрупі S.

Нехай $\langle g \rangle$ — довільна підгрупа з G, що не належить S. Покажемо, що $\langle g \rangle \lhd G$. Дійсно, оскільки G — розв'язна, а значить, локально розв'язна нечерніковська неперіодична група, то за результатами [4] легко встановити, що $\langle g \rangle \lhd G$. Тоді за теоремою 1 роботи [3] G — $H(S)$-група.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — нечерніковська $H(S)$-група, тоді зрозуміло, що в G нормальні всі циклічні підгрупи, у тому числі примарні циклічні підгрупи та циклічні підгрупи нескінченного порядку, які не належать деякій власній підгрупі S з G, тобто G — група, в якій нормальними є всі нерозкладні циклічні підгрупи при умові їх неналежності деякій власній підгрупі з G.

Достатність доведено, а отже, доведено і лему.

Лема 2. *Нехай G — нескінченна локально розв'язна $H(I\overline{C}\backslash S)$-група і $\langle g \rangle$ — ненормальна в G підгрупа порядку p^{α}, що не належить S, p — просте число, $\alpha > 0$. Тоді перетин M всіх нормальних в G підгруп, які містять $\langle g \rangle$, є нескінченною локально скінченною нормальною підгрупою групи G, а G — розширення квазіциклічної p-підгрупи R за допомогою скінченної $H(S)$-групи, $G'' = 1$, $[M, R] = 1$.*

Доведення. Нехай G, M та $\langle g \rangle$ задовольняють умови леми. Покажемо, що M — локально скінченна група. Нехай це не так, тоді M містить нескінченну скінченнопороджену підгрупу U, що містить $\langle g \rangle$. З локальної ступінчастості групи G випливає, що підгрупа $U = U_0$ має нескінченний строго спадний ланцюг

$$U_0 > \ldots > U_i > U_{i+1} > \ldots$$

нормальних нескінченних підгруп U_i скінченного індексу в U. Зрозуміло, що знайдеться таке натуральне $k > 0$, для якого $|U : U_k| > p^{\alpha}$.

Покладемо $Y = U_k\langle g \rangle$. Тоді Y — нескінченна нециклічна підгрупа, а $Y < U < M$, значить, за умовою леми $Y \lhd G$, що суперечить вибору M. Отже, всі скінченнопороджені підгрупи з M, що містять $\langle g \rangle$, а тому і всі скінченнопороджені підгрупи з M є скінченними групами. З цього випливає твердження леми.

Лему доведено.

Доведення теореми. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група, тоді $G > 1$. Якщо G — $H(S)$-група, то вона є групою типу 2 розглядуваної теореми. В подальшому G — не $H(S)$-група.

Припустимо, що G — скінченна група, тоді вона — розв'язна група, яка не може бути $H(S)$-групою. У цьому випадку легко встановити, що G породжується ненормальними циклічними підгрупами, і G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай $|G| = \infty$. Якщо G — неперіодична група, то за твердженням 2 неперіодична локально ступінчаста $H(I \backslash S)$-група G є абелевою, а значить, і $H(S)$-групою, тому в подальшому G — періодична група. За цим же твердженням $G''' = 1$, тому G — розв'язна, значить, локально скінченна не $H(S)$-група нескінченного порядку.

Нехай G — група, в якій нормальні всі нескінченні підгрупи, тоді за теоремами 1. 3. 1 з роботи [5] та 6. 10 з роботи [6] G — група типу 3 розглядуваної теореми.

Припустимо, що G не є групою, в якій нормальні всі нескінченні підгрупи. З цього припущення та умови теореми випливає, що в G нормальні нескінченні підгрупи, які не належать деякій власній підгрупі S, і G має ненормальні нескінченні підгрупи, які, очевидно, належать S і породжують у підгрупі S нормальну в G підгрупу K нескінченного порядку. За лемою 1 з роботи [3] G/K є періодичною $H(S)$-групою, комутант $(G/K)'$ якої є центральною циклічною підгрупою [7]. З цього без порушення загальності випливає, що $G \leq S$.

Покажемо, що G — черніковська група. Оскільки G — не $H(S)$-група, то за лемою 1 G має ненормальну нерозкладну підгрупу $\langle g \rangle$, яка не належить S, $|g| = p^{\alpha}$, де p — просте число, $\alpha > 0$. З припущення нечерніковості групи G та її локальної розв'язності за результатами роботи [4] можна встановити, що $\langle g \rangle \lhd G$, а це суперечить ненормальності $\langle g \rangle$ в G. Отже, G — черніковська група з повною частиною R. За лемою 1 роботи [3] G/R — скінченна $H(S)$-група. Якщо R — квазіциклічна група, то G — група типу 4 розглядуваної теореми. В подальшому вважатимемо, що R — неквазіциклічна група.

Нехай M — перетин всіх нормальних в G підгруп, які містять g, тоді за лемою 2 M — нескінченна локально скінченна група, що не належить S, і за лемою 1 роботи [3] G/M — дедекіндова група.

Припустимо, що g індукує на R p-адично звідний автоморфізм, тобто R містить нескінченну підгрупу R_1 нескінченного індексу в R, допустиму відносно $\langle g \rangle$. За результатами роботи [8] (§ 2)

$$R = R_1 \cdot R_2,$$

де $|R_1 \cdot R_2| < \infty$, R_2 — допустима підгрупа відносно $\langle g \rangle$. З цього випливає, що G має нескінченні підгрупи $R_1 \cdot \langle g \rangle$, $R_2 \cdot \langle g \rangle$, кожна з яких не належить S, а тому є нормальною в G. Звідси

$$\langle g \rangle \leq (R_1 \cdot \langle g \rangle) \cap (R_2 \cdot \langle g \rangle) \lhd G, \quad |(R_1 \cdot \langle g \rangle) \cap (R_2 \cdot \langle g \rangle)| < \infty,$$

що суперечить властивостям M. Отже, g індукує на R p-адично незвідний автоморфізм. За результатами роботи [8] (§ 3) R — прямий добуток l квазіциклічних q-груп, $l > 1$, $[R, G] = R < S$.

Нехай X/R — довільна підгрупа з G/R, яка не належить S/R. Тоді, очевидно, що X — нескінченна підгрупа з G, яка не належить S, але за умовою $X \lhd G$ і $X/R \lhd G/R$. З цього випливає, що в G/R нормальні всі підгрупи, які не належать S/R. Такий результат можна одержати для будь-якої максимальної в G/R підгрупи S_1/R, що не містить $(R\langle g\rangle)/R$, але містить S/R. Тому можна вважати, що S/R — максимальна підгрупа скінченної нільпотентної підгрупи G/R, яка не містить Rg. Оскільки G/R — скінченна нільпотентна група, то без порушення загальності можна вважати, що $|G:S| = p$. Зрозуміло, що $R\langle g\rangle$ — нескінченна підгрупа, яка не належить S, а тому $R\langle g\rangle \lhd G$, і за лемою 1 роботи [3] одержимо, що $G/(R\langle g\rangle)$ — дедекіндова група.

Для підгрупи R можливі такі випадки:

1) R — доповнювана підгрупа в групі G;

2) R — недоповнювана підгрупа в групі G.

У випадку 1 $G = R \leftthreetimes D$, $D = B \times R$ — скінченна нільпотентна $H(S)$-група, P — силовська p-підгрупа з D, у якої нормальні всі підгрупи $\langle g\rangle$, що не належать деякій максимальній підгрупі M з P, а елемент g індукує на R p-адично незвідний автоморфізм, $\langle g\rangle \lhd D$, $D/\langle g\rangle$ — дедекіндова група. З цього випливає, що G — група типу 4 розглядуваної теореми.

Випадок 1 розглянуто повністю.

Покажемо, що у випадку 2 $q = p$. Нехай це не так, тоді $N = R \cdot \langle g\rangle = R \leftthreetimes \langle g\rangle \lhd G$, $N_R(\langle g\rangle) = 1$. За лемою Фраттіні (див., наприклад, [9], лема 17. 1. 8) $G = N \cdot N_G(\langle g\rangle) = R \leftthreetimes N_G(\langle g\rangle)$, що неможливо. Отже, $p = q$ і N — нормальна в G p-підгрупа, для якої G/N — дедекіндова група. За результатами роботи [8] (§ 3) R — прямий добуток $p-1$ квазіциклічних підгруп, а тому в нашому припущенні $p > 2$. З цього випливає, що $G = P \leftthreetimes B$, де P — силовська p-підгрупа, а B — її скінченне дедекіндове доповнення в G, $[P, B] < R$.

Нехай $C = P \cap S$, тоді $R \le C \lhd G$, $|P:C| = p$. Якщо $x \in P \setminus C$, то $x \notin S$, G має нескінченну підгрупу $Y = R\langle x\rangle$, що не належить S, а тому $Y \lhd G$, і за лемою 1 роботи [3] G/Y — дедекіндова група.

Припустимо, що x індукує на R p-адично звідний автоморфізм, тоді, як і раніше для g, $[R, \langle x\rangle] = 1$, у групі G існує підгрупа $K = C \cdot \langle x\rangle$ нескінченного порядку, яка не належить S, де K — квазіциклічна група з R. Зрозуміло, що $K \lhd G$, $C \lhd G$, а це неможливо. Отже x індукує на R теж p-адично незвідний автоморфізм. Звідси G — група типу 5 розглядуваної теореми.

Усі випадки вичерпано.

Достатність. Нехай G — група типів $1-5$ розглядуваної теореми. Очевидно, що G — неодинична розв'язна, а тому локально розв'язна група.

Покажемо, що в G нормальні всі нескінченні підгрупи, які не належать деякій власній підгрупі S групи G. Група G типу 1 не має нескінченних підгруп, тому можна вважати, що $S = 1$, і в G нормальні всі скінченні підгрупи, що не належать S. У групі типу 2 існує власна підгрупа S, для якої нормальні навіть нескінченні підгрупи, що не належать S, тому для груп даного типу достатність доведено.

Нехай G — група типу 3, тоді вона є розширенням квазіциклічної підгрупи R за допомогою $H(S)$-групи G/R. З цього випливає, що в G/R існує власна підгрупа S/R, для якої в G/R нормальна будь-яка підгрупа, що не належить S/R.

Нехай X — довільна нескінченна підгрупа, що не належить S, тоді $X \ge R$, $X/R \le S/R$ і за попереднім $X/R \lhd G/R$, а тому $X \lhd G$. Достатність для групи типу 3 доведено.

Нехай G — група одного з типів 4 або 5. У групі G типу 4 покладемо $S = R \leftthreetimes (B \times M)$, а в групі типу $5 - S = C \leftthreetimes B$, тоді $S \lhd G$, $|G : S| = p$ і G — черніковська група з повною частиною R, $R \leq S$.

Нехай X — нескінченна підгрупа з G, яка не належить S. Оскільки $|G : S| = p$, то $S \cdot X = G$, $G/S \cong X/(X \cap S)$, $|X/(X \cap S)| = p$. З того, що $S \lhd G$, $(X \cap S) \lhd X$, випливає, що всі p'-елементи з $S \cap X$ належать цьому перетину. Звідси $X = (S \cap X)\langle g \rangle$, де $|g| = p^{\alpha}$, p — просте число, $\alpha > 0$. Група G має нормальну, а тому єдину підгрупу U, що містить всі p-елементи групи G, де у групі типу 4 $U = R \leftthreetimes P$, а в групі типу 5 $U = P$. Зрозуміло, що $g \in U$. Звідси $S \cap U = S_1$, у групі типу 4 $S_1 = R \times M$, а в групі типу 5 $S_1 = C$, крім того, $|U : S_1| = p$. У групі G типу 5 $g \in U \setminus C$ і за властивостями розглядуваної групи g індукує на R p-адично незвідний автоморфізм. У групі G типу 4 силовські p-підгрупи скінченні, а значить, спряжені між собою підгрупи локально скінченної групи G, тому з точністю до спряження можна вважати, що $g \in P$ і знов за властивостями груп розглядуваного типу g індукує на R p-адично незвідний автоморфізм. Отже, завжди g індукує на R p-адично незвідний автоморфізм. Оскільки X — нескінченна підгрупа, $|G : R| < \infty$, то $X \cap R = R_1$ — нормальна підгрупа нескінченного порядку з X. За означенням p-адично незвідного автоморфізму $R_1 = R$. Тепер, враховуючи властивості розглядуваних груп, $N = R\langle g \rangle \lhd G$, $N \leq XG/R$ G/N — дедекіндова група, але тоді $X/N \lhd G/N$, і, значить, $X \lhd G$.

Достатність доведено. Теорему доведено повністю.

1. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Будова сепараторно дедекіндових груп // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1342–1351.
2. *Одінцова О. О.* Про ступінь розв'язності $H(I\overline{C} \setminus S)$-груп // Наук. зап. НПУ ім. М. П. Драгоманова: Зб. наук. праць. – Київ: Нац. пед. ун-т, 1999. – С. 201–204.
3. *Одінцова О. О.* Групи з системами сепараторно-нормальних підгруп // Фрактальний аналіз та суміжні питання: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – № 2. – С. 211–214.
4. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР. – 1974. – **21**, № 6. – С. 1250 – 1253.
5. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
7. *Cappit D.* Generalized Dedekind groups // J. Algebra. – 1971. – **17**, № 3. – P. 310–316.
8. *Зайцев Д. И.* О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 72 – 130.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

Одержано 22.10.99