УДК 517.911

А. Е. Зернов (Одес. политехн. ун-т)

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

For an ordinary first order differential equation, we find conditions under which the Cauchy singular problem possesses a unique continuously differentiable solution with a required asymptotic behavior.

Для деякого звичайного диференціального рівняння першого порядку знайдено умови, за яких сингулярна задача Коші має єдиний неперервно диференційовний розв'язок з потрібною асимптотичною поведінкою.

Сингулярные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно производных неизвестных функций, подробно исследованы в [1, 2]. Общие вопросы существования и числа решений дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных неизвестных функций, рассмотрены в [3, 4], а также в [5, 6]; в [7] построена асимптотика решения полиномиального уравнения такого типа в регулярном случае. В настоящей работе доказаны существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения сингулярной задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции. При этом использованы методы качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, [1, 8], а также [9]).

Рассмотрим задачу Коши

$$\sum_{i+j+k=1}^{m} a_{ijk} t^i x^j (x')^k + f(t, x, x') = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

при следующих условиях:

1) i, j, k — целые неотрицательные, $1 \le i+j+k \le m$, $m \ge 2$; все a_{ijk} — постоянные, $a_{00k} = 0$, $k \in \{1, \ldots, m\}$;

2) $f: D \to R$ — непрерывная функция, $D = \{(t, x, y): t \in (0, \tau),\ |x| < \mu t,\ |y| < \mu\}$;

3) $|f(t, x, y)| \le t^m \alpha(t)$, $(t, x, y) \in D$, где $\alpha: (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t\to+0} \alpha(t) = 0$;

4) $|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \le t\beta(t)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$, $(t, x_i, y_i) \in D$, $i \in \{1, 2\}$, где $\beta: (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\beta'(t) \ge 0$ при $t \in (0, \tau)$, $\lim_{t\to+0} \beta(t) = 0$, $\lim_{t\to+0} t\beta'(t)\beta^{-1}(t) = \beta_0$, $0 \le \beta_0 < +\infty$;

5) если $\beta_0 = 0$, то $\beta'(t) \ne 0$ при $t \in (0, \tau)$, $\lim_{t\to+0} \beta'(t) = 1_\beta$, $0 < 1_\beta \le +\infty$, $\lim_{t\to+0} \beta^2(t)(t\beta'(t))^{-1} = 0$, $\lim_{t\to+0} t\beta'(t)\beta^{-(1+r)}(t) = +\infty$, где $r \in (0, 1)$ — постоянная;

6) если $\beta_0 \ne 0$, то существует непрерывно дифференцируемая функция $\gamma: (0, \tau) \to (0, +\infty)$ такая, что $\gamma'(t) \ge 0$ при $t \in (0, \tau)$, $\lim_{t\to+0} \gamma(t) = 0$, $\lim_{t\to+0} t(\beta(t)\gamma(t))^{-1} = \sigma$, $0 \le \sigma < +\infty$.

Определение. *Для любого* $\rho \in (0, \tau)$ *под* ρ*-решением задачи* (1), (2) *понимается непрерывно дифференцируемая функция* $x: (0, \rho] \to R$ *со следующими свойствами:* 1) $(t, x(t), x'(t)) \in D$ *при* $t \in (0, \rho]$; 2) x *тождественно* *удовлетворяет уравнению* (1) *при* $t \in (0, \rho]$; 3) $x(t) \to 0$ *при* $t \to +0$.

Пусть

$$P(c) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{10k} c^k + \sum_{k=0}^{m-1} a_{01k} c^{k+1}$$

и c_0 — кратный корень уравнения $P(c) = 0$, т. е. считаем, что

$$P(c_0) = 0, \qquad P'(c_0) = 0.$$

Пусть выполнены условия $|c_0| < \mu$ и $a \neq 0$, где $a = \sum_{k=0}^{m-1} a_{01k} c_0^k$; функция $\eta_1 : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ определена равенством

$$\eta_1(t) = \begin{cases} \beta(t), & \text{если} \quad \beta_0 = 0; \\ \beta(t)\gamma(t), & \text{если} \quad \beta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим через $U(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $x\colon (0, \rho] \to R$, каждая из которых при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам

$$|x(t) - c_0 t| \le M t \eta_1(t), \quad |x'(t) - c_0| \le qM\eta_1(t), \tag{3}$$

где ρ, M, q — постоянные, $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$, $q > 1$.

Теорема. *Для любого* $q > 1$ *существуют такие* M, ρ, *что задача* (1), (2) *имеет* ρ *-решение* $x_0 \colon (0, \rho] \to R$, *принадлежащее множеству* $U(\rho, M)$, *и притом единственное.*

Доказательство. Зафиксируем $q > 1$ и выберем M, ρ (условия, определяющие выбор M, ρ, не приводим). Укажем лишь, что все эти условия являются эффективными, ρ достаточно мало, M достаточно велико. Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x\colon [0, \rho] \to R$ с нормой $\|x\|_B = \max\limits_{t \in [0,\rho]} (|x(t)| + |x'(t)|)$. Обозначим через U подмножество B, состоящее из всех функций $x\colon [0, \rho] \to R$, удовлетворяющих при $t \in (0, \rho]$ неравенствам (3), причем $x(0) = 0$, $x'(0) = c_0$. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$at(x' - c_0) = a(x - c_0 t) + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}(x - c_0 t)\big((x')^k - c_0^k\big) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m-1} t(a_{10k} + a_{01k}c_0) \sum_{\nu=2}^{k} C_k^\nu c_0^{k-\nu}(x' - c_0)^\nu + b_1 t^2 + b_2 t^2 (x' - c_0) +$$

$$+ (x - c_0 t)\sum_{k=0}^{m-2} (a_{11k} t + a_{02k}(x + c_0 t))(x')^k +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m-2} t^2\big(a_{20k} + a_{11k}c_0 + a_{02k}c_0^2\big) \sum_{\nu=2}^{k} C_k^\nu c_0^{k-\nu}(x' - c_0)^\nu + \sum_{\substack{i+j+k=1,\\ i+j \ge 3}}^{m} a_{ijk} t^i x^j (x')^k + f(t, x, x'),$$

где

$$b_1 = \sum_{k=0}^{m-2}\big(a_{20k} + a_{11k}c_0 + a_{02k}c_0^2\big)c_0^k, \quad b_2 = \sum_{k=1}^{m-2}\big(a_{20k} + a_{11k}c_0 + a_{02k}c_0^2\big)c_0^{k-1},$$

и рассмотрим уравнение

$$x' = c_0 + \frac{1}{at}\Bigg(a(x - c_0 t) + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}(x - c_0 t)\Big((u'(t))^k - c_0^k\Big) + \sum_{k=0}^{m-1} t(a_{01k}c_0 +$$

$$+ a_{10k})\sum_{\nu=2}^{k} C_k^{\nu} c_0^{k-\nu}(u'(t) - c_0)^{\nu} + b_1 t^2 + b_2 t^2(u'(t) - c_0) + (x - c_0 t)\sum_{k=0}^{m-2}(a_{11k}t +$$

$$+ a_{02k}(u(t) + c_0 t)(u'(t))^k + \sum_{k=2}^{m-2} t^2\Big(a_{20k} + a_{11k}c_0 + a_{02k}c_0^2\Big)\sum_{\nu=2}^{k} C_k^{\nu} c_0^{k-\nu}(u'(t) - c_0)^{\nu} +$$

$$+ \sum_{\substack{i+j+k=1,\\ i+j\geq 3}}^{m} a_{ijk}t^i(u(t))^j(u'(t))^k + f(t, u(t), u'(t))\Bigg), \tag{4}$$

где $u \in U$ — произвольная фиксированная функция.

Пусть $D_0 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho],\ x \in R\}$. В D_0 для (4) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

Обозначим

$$\Phi_1 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho],\ |x - c_0 t| = Mt\eta_1(t)\},$$

$$D_1 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho],\ |x - c_0 t| < Mt\eta_1(t)\},$$

$$H_1 = \{(t,x)\colon t = \rho,\ |x - c_0\rho| < M\rho\eta_1(\rho)\}.$$

Пусть функция $A_1\colon D_0 \to [0,+\infty)$ определена равенством

$$A_1(t,x) = (x - c_0 t)^2(t\eta_1(t))^{-2}$$

и $a_1\colon D_0 \to R$ — производная функции A_1 в силу уравнения (4). Легко видеть, что $a_1(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_1$. Поэтому для любой точки $P(t_0,x_0) \in \Phi_1$ интегральная кривая $J_p\colon (t, x(t))$ уравнения (4), проходящая через точку P, при малых $|t - t_0|$ имеет свойство: $J_p \in D_1$ при $t > t_0$ и $J_p \,\overline{\in}\, \overline{D_1}$ при $t < t_0$. Отсюда следует (см., например, [9, с. 758]), что среди интегральных кривых уравнения (4), пересекающих H, найдется хотя бы одна, которая определена при $t \in$ $\in (0,\rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0,\rho]$. Обозначим указанную интегральную кривую через $J_0\colon (t, x_u(t))$. Докажем, что множеству D_1 принадлежит единственная интегральная кривая уравнения (4) — кривая J_0. С этой целью рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi_2(\nu) = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t\eta_2(t)\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0,\nu_0]$, функция $\eta_2\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ определена равенством

$$\eta_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\beta(t)}, & \text{если} \quad \beta_0 = 0; \\ \beta(t), & \text{если} \quad \beta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого $\nu \in (0,\nu_0]$ обозначим

$$D_2(\nu) = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| < \nu t\eta_2(t)\}.$$

Пусть функция $A_2\colon D_0 \to [0,+\infty)$ определена равенством

$$A_2(t,x) = (x - x_u(t))^2(t\eta_2(t))^{-2}$$

и $a_2\colon D_0 \to R$ — производная функции A_2 в силу уравнения (4). Нетрудно убедиться в том, что $a_2(t,x) < 0$ при $(t,x) \in D_0$, $x \neq x_u(t)$. Поэтому $a_2(t,x) < < 0$ в каждой точке любой кривой $\Phi_2(\nu)$, $\nu \in (0, \nu_0]$. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения (см., например, [9, с. 758, 759]). Легко видеть, что

$$|x_u(t) - c_0 t| \leq Mt\eta_1(t), \quad |x_u'(t) - c_0| \leq qM\eta_1(t), \quad t \in (0, \rho].$$

Доопределим x_u, x_u' при $t = 0$, полагая $x_u(0) = 0$, $x_u'(0) = c_0$. Тогда $x_u \in U$. Определим оператор $T\colon U \to U$, полагая $(Tu)(t) = x_u(t)$. Докажем, что оператор T — сжимающий. Пусть $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, — любые фиксированные функции и $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть теперь $\|u_1 - u_2\| = h$, $h > 0$. Будем исследовать поведение интегральных кривых уравнений (4) при $u = u_1$. Обозначим

$$\Phi_3 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| = \lambda h t \eta_3(t)\},$$

$$D_3 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| < \lambda h t \eta_3(t)\},$$

где λ — постоянная, определяемая следующим образом: $\lambda = 1$, если $\beta_0 = 0$, и $\lambda > (|a|\beta_0)^{-1}$, если $\beta_0 \neq 0$, а функция $\eta_3\colon (0,\tau) \to (0, +\infty)$ определена равенством

$$\eta_3(t) = \begin{cases} \beta^{1-r}(t), & \text{если} \quad \beta_0 = 0; \\ \beta(t), & \text{если} \quad \beta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Пусть функция $A_3\colon D_0 \to [0, +\infty)$ определена равенством

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 (t\eta_3(t))^{-2}$$

и $a_3\colon D_0 \to R$ — производная функции A_3 в силу уравнения (4) при $u = u_1$. Учитывая, что

$$\left| \sum_{\substack{i+j+k=1,\\ i+j\geq 3}}^{m} a_{ijk} t^i (u_1(t))^j (u_1'(t))^k - \sum_{\substack{i+j+k=1,\\ i+j\geq 3}}^{m} a_{ijk} t^i (u_2(t))^j (u_2'(t))^k \right| \leq Lt^3 h, \tag{5}$$

где L — некоторая положительная постоянная, не зависящая от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, нетрудно убедиться в том, что $a_2(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_3$. Поэтому для любой точки $P(t_0, x_0) \in \Phi_3$ интегральная кривая $J_p\colon (t, x(t))$ уравнения (4) при $u = u_1$, проходящая через точку P, при малых $|t - t_0|$ имеет свойство: $J_p \in D_3$ при $t > t_0$ и $J_p \overline{\in} \overline{D_3}$ при $t < t_0$. При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t) - c_0 t| + |x_2(t) - c_0 t| \leq 2Mt\eta_1(t) < \lambda h t \eta_3(t)$$

при $t \in (0, t(h)]$, если $t(h) \in (0, \rho)$ — достаточно мало. Следовательно, интегральная кривая $(t, x_1(t))$ уравнения (4) при $u = u_1$ лежит в D_3 при $t \in (0, t(h)]$. При возрастании t от $t = t(h)$ до $t = \rho$ указанная интегральная кривая не может пересечь Φ_3, и поэтому она лежит в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$. Следовательно,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \lambda h t \eta_3(t), \quad t \in (0, \rho]. \tag{6}$$

При $t \in (0, \rho]$ функции x_1, x_2 обращают в тождества уравнения (4) при $u = u_1$ и $u = u_2$ соответственно. Из этих тождеств, учитывая оценки (5), (6), получаем

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \leq \eta_4(t) h, \quad t \in (0, \rho], \tag{7}$$

где $\eta_4: (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — некоторая непрерывная функция, причем

$$\eta_4(t) = \begin{cases} O(\beta^{1-r}(t)), & t \to +0, \quad \beta_0 = 0; \\ O(\beta(t)), & t \to +0, \quad \beta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lim_{t \to +0} \eta_4(t) = 0$. Из (6), (7) следует, ввиду достаточной малости ρ, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le \frac{1}{2}h, \quad t \in (0, \rho].$$

Поскольку $x_i(0) = 0$, $x_i'(0) = c_0$, $i \in \{1, 2\}$, то

$$\max_{t \in [0, \rho]} (|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|) \le \frac{1}{2}h,$$

т. е.

$$\|x_1 - x_2\|_B \le \frac{1}{2}h,$$

или

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B \le \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_B.$$

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Поэтому доказано, что $T: U \to U$ — сжимающий оператор. На основании принципа Банаха сжатых отображений, оператор T имеет в U единственную неподвижную точку x_0:

$$Tx_0 = x_0.$$

Очевидно, $x_0: (0, \rho] \to R$ — искомое ρ-решение задачи (1), (2). Теорема доказана.

1. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
4. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1974. – 472 с.
5. *Блинов С. П.* Геометрический метод решения систем дифференциальных уравнений. – Минск, 1974. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2024-74 Деп.
6. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – **179**. – P. 317 – 326.
7. *Даутов М. А., Муратов Л. М.* Асимптотическое представление решений полиномиального дифференциального уравнения первого порядка // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 4. – С. 61 – 68.
8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
9. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 5. – С. 756 – 760.

Получено 16.06.99