УДК 517.5

В. М. Дільний (Дрогобиц. пед. ун-т)

ПРО ПОВНОТУ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ У КУТОВІЙ ОБЛАСТІ

We show that the system $\left\{e^{-\lambda z}/(1+z)^2 : \lambda > 0\right\}$ is complete in a class of functions analytic in an angle.

Показано, що система $\left\{e^{-\lambda z}/(1+z)^2 : \lambda > 0\right\}$ є повною в одному класі функцій, аналітичних в куті.

Позначимо через $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < \infty$, простір функцій, аналітичних в куті $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$\|f\| := \sup_{\alpha<\theta<\beta}\left\{\int_0^\infty \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p dr\right\} < +\infty,$$

а через $E^\infty[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ — простір функцій, аналітичних і обмежених в $\mathbb{C}(\alpha,\beta)$. Простори $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ для $p=2$ вивчалися в роботах [1, 2], а для інших $p > 0$ — в [3–5]. В цих роботах, зокрема, показано, що функції з вказаних просторів при $1 \le p \le \infty$ мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення $F(z)$ і $F \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$. Крім цього, вказана вище норма еквівалентна такій:

$$\|f\|_* = \int_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)} |f(z)|^p |dz|.$$

В [6–8] встановлено аналог теореми Пелі – Вінера для вагових просторів Харді. У випадку $p = 1$ аналог був би доведеним, якби вдалося показати, що для кожної f з простору $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ і заданого $\sigma > 0$ можна підібрати скінченну лінійну комбінацію $\gamma(z)$ функцій системи

$$\left\{\frac{e^{-\lambda z}}{(1+z)^2} : \lambda > 0\right\} \tag{1}$$

так, що $(\gamma(z) - f(z))e^{2/\sigma z} \in L^1[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$. Результати про наближення з дотиком [9] дають підстави припустити існування такого наближення. Проте ми можемо довести лиш наступне твердження.

Теорема. *Система* (1) *є повною в* $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$.

Для доведення нам потрібно кілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Якщо* $\Phi \in L^2[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ *і*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{\Phi(t)}{t-z}dt, \tag{2}$$

то $\varphi \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$.

Лема 2. *Якщо* $\Phi \in L^2[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ *і*

$$\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{\Phi(t)}{t-z}dt = 0, \qquad z \in \mathbb{C}/\overline{\mathbb{C}}\left(-\frac{\pi}{2},0\right), \tag{3}$$

то Φ *є кутовою граничною функцією функції* $\varphi \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$, *визначеної рівністю* (2).

Лема 3. *Якщо* $\varphi \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ *і* Φ — *її кутова гранична функція, то справедлива рівність* (2) *при* $z \in \mathbb{C}(-\pi/2,0)$ *і* (3).

Лема 4. *Якщо* $\varphi \in E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$, *то*

$$\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \varphi(z)dz = 0.$$

Лема 1 міститься, наприклад, в [5], лема 2 випливає з властивостей інтеграла типу Коші (див. [10, с. 190]), лема 3 наведена в [1, с. 114], а лема 4 — в [6].

Доведення теореми. Припустимо, що система (1) не є повною. Тоді (див. [11, с. 175]) знайдеться лінійний неперервний на $E^p[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ функціонал $\psi \neq 0$, який перетворюється в нуль на кожній функції системи (1). Простір $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ є підпростором простору $L^1[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$. За теоремою Хана – Банаха знайдеться $h \in L^\infty[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ така, що

$$(\forall\lambda > 0): \int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(z)\frac{e^{-\lambda z}}{(1+z)^2}dz = 0.$$

Тому

$$(\forall w \in \mathbb{C}): \int_0^\infty e^{\lambda w}\left(\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(z)\frac{e^{-\lambda z}}{(1+z)^2}dz\right)d\lambda = 0. \tag{4}$$

Оскільки для $w \in \mathbb{C}(\pi/2, 3\pi/2)$ подвійний інтеграл в (4) збігається абсолютно, то, застосувавши теорему Фубіні, при $w \in \mathbb{C}(\pi/2, 3\pi/2)$ маємо $h_1(w) = 0$, де

$$h_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{h(z)}{(1+z)^2}\frac{1}{z-w}dz. \tag{5}$$

Враховуючи аналітичність h_1 при $w \in \mathbb{C}(0,\pi)$ і (4), отримуємо

$$h_1(w) = 0, \quad w \in \mathbb{C}\left(0, \frac{3\pi}{2}\right). \tag{6}$$

Тому за лемами 1 і 2 $h(w)/(1+w)^2 \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ і, отже, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо $h(w)/(1+\varepsilon w)^2 \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$. З леми 3, взявши фіксоване $w_0 \in \mathbb{C}(-\pi/2,0)$ отримуємо

$$\frac{h(w)}{(1+\varepsilon w)^2} - \frac{h(w_0)}{(1+\varepsilon w_0)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{h(z)}{(1+\varepsilon z)^2}\frac{w-w_0}{(z-w)(z-w_0)}dz.$$

Оскільки інтеграл збігається рівномірно по $\varepsilon \in (0,\infty)$, то, переходячи до границі при $\varepsilon \to 0+$, одержуємо

$$h(w) - h(w_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(z)\left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-w_0}\right)dz.$$

З (5) і (6) для $w \in \mathbb{C}(-\pi/2,0)$ знаходимо

$$h(w) - h(w_0) = (h(w) - h(w_0)) + (h(-w) - h(-w_0)) -$$

$$- (h(\overline{w}) - h(\overline{w}_0)) - (h(-\overline{w}) - h(-\overline{w}_0)) =$$

$$= -\frac{4}{\pi} \int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \left(\frac{uvzh(z)}{(z^2 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2} - \frac{u_0 v_0 z h(z)}{(z^2 - u_0^2 + v_0^2)^2 + 4u_0^2 v_0^2} \right) dz.$$

Оскільки

$$\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \left| \frac{uvz}{(z^2 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2} \right| |dz| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad w = u + iv \in \mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

то

$$|h(w)| \leq 4 \|h(w)\|_{L^\infty[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]}, \qquad w \in \mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Отже, $h \in E^\infty[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$. З леми 4 маємо

$$\left(\forall f \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right]\right): \int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(w) f(w)\, dw = 0,$$

а це означає, що функціонал ψ перетворюється в нуль на всіх елементах простору $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$, тобто $\psi \equiv 0$, що суперечить припущенню.

Автор вдячний Б. В. Винницькому за постійну увагу до роботи.

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
2. *Джрбашян М. М., Мартиросян В. М.* Теоремы типа Винера – Пели и Мюнца – Саса // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **41**, № 4. – С. 868–894.
3. *Григорян Ш. А.* О базисности неполных систем рациональных функций в углоеой области // Изв. АН Арм ССР. Математика. – 1978. – **12**, № 5–6. – С. 460–487.
4. *Левин Б.Я., Любарский Ю.И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 3. – С. 657–702.
5. *Мартиросян В. М.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях // Изв. АН Арм ССР. Математика. – 1978. – **12**, № 5–6. – С. 490–531.
6. *Винницький Б.В.* Про узагальнення теореми Пелі – Вінера // Мат. студії. – 1995. – Вип. 4. – С. 37–44.
7. *Винницький Б.В.* Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій // Допов. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 10. – С. 13–17.
8. *Винницький Б.В.* Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі // Мат. студії. – 1997. – **7**, № 1. – С. 41–52.
9. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
10. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.;Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 336 с.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

Одержано 20.09.99