УДК 517.956

Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ДАНИМИ НА ВСІЙ ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

In a domain which is a Cartesian product of a segment and a p-dimensional torus, we investigate a boundary-value problem for weakly nonlinear hyperbolic equations of high order. For almost all (with respect to the Lebesgue measure) parameters of the domain, we establish conditions for the existence of the unique solution of the problem.

В області, яка є декартовим добутком відрізка на p-вимірний тор, досліджено крайову задачу для слабконелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку. Для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів області встановлено умови існування єдиного розв'язку розглядуваної задачі.

1. Задачі з даними на всій границі області для гіперболічних та безтипних рівнянь, взагалі, є умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1–15] та бібліографію в [13]). В даній роботі, яка примикає до [16–20], уточнює результати робіт [11, 12] та розвиває їх на випадок слабконелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку, досліджено однозначну розв'язність задачі з умовами типу умов Діріхле за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами.

В області $D^p = \left\{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1}: 0\le t\le T,\ x\in\Omega^p\subset\mathbb{R}^p\right\}$ (Ω^p — p-вимірний тор) розглядається задача

$$L[u] \equiv \sum_{|s|^*=2n} A_s \frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = \Phi(t,x) + \varepsilon f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2l}u}{\partial t^{2l}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2l}u}{\partial t^{2l}}\right|_{t=T} = 0, \qquad l=0,1,\dots,n-1, \tag{2}$$

в якій $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $A_s\in\mathbb{R}$, $A_{(n,0,\dots,0)}\ne 0$, $|s|^* = 2s_0+s_1+\dots+s_p$, оператор L — строго гіперболічний за Петровським; функція $f(t,x,u)$ визначена і неперервна за змінною t та досить гладка по x, u в області $D_1 = \left\{(t,x,u): (t,x)\in D^p,\ u\in\overline{S}\left(u^0,r\right)\right\}$, де $\overline{S}\left(u^0,r\right) = \left\{u\in C^{2n}\left(D^p\right): \left\|u-u^0\right\|_{C^{2n}\left(D^p\right)}\le r\right\}$, $u^0\equiv u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (1), (2) при $\varepsilon=0$; $\Phi\in C^{(0,2p+2)}\left(D^p\right)$. Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\dots,x_p$ на функції $u(t,x)$, $\Phi(t,x)$, $f(t,x,u)$.

2. Розглянемо незбурену задачу (1), (2) (коли $\varepsilon=0$), яка вивчалася в [11, 12]. Нехай $\lambda_j\equiv\lambda_j(k)$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$ — додатні корені рівняння

$$\sum_{|s|^*=2n} A_s\left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1}\dots\left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p}\lambda^{2s_0} = 0, \qquad \|k\| = \sqrt{k_1^2+\dots+k_p^2}\,.$$

Якщо рівняння

$$\|k\|\lambda_j T - \pi l = 0, \qquad j=1,\dots,n,$$

не мають нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p, l$, то має місце єдиність розв'язку [11] незбуреної задачі (1), (2) в $C^{2n}\left(D^p\right)$; при цьому її розв'язок формально зображується формулою

$$u^0(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau\,\exp(ikx), \tag{3}$$

де $\Phi_k(t)$ — коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є по x функції $\Phi(t,x)$, а $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — функція Гріна, відповідно, задачі

$$\sum_{|s|^*=2n} A_s(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}u_k^{(2s_0)}(t) = \Phi_k(t), \quad 0^0\equiv 1,$$

$$l_j[u_k]\equiv u_k^{(2j)}(0) = 0, \quad l_{n+j}[u_k]\equiv u_k^{(2j)}(T) = 0, \quad j=0,1,\dots,n-1.$$

У квадраті $K_T=\left\{(t,\tau)\in\mathbb{R}^2 : 0\le t,\ \tau\le T\right\}$ (за винятком сторін $\tau=0$ і $\tau=T$) функції $G_k(t,\tau)$ визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) =$$

$$= \sum_{s,j,r=1}^{n}\frac{(-1)^s iS_{n-s}^{(j)}\left(\alpha\left(\gamma_j(t-T)\right)\alpha(\gamma_r\tau)+\alpha(\gamma_r(T-\tau))\alpha\left(\gamma_j t\right)\right)}{4\|k\|^{2n-1}\lambda_r^{-2s+3}\prod_{p=1,\,p\ne j}^{n}\left(\lambda_p^2-\lambda_j^2\right)\prod_{p=1,\,p\ne r}^{n}\left(\lambda_p^2-\lambda_r^2\right)\alpha\left(\gamma_j T\right)} +$$

$$+\ \frac{i\,\mathrm{sgn}(t-\tau)}{4\|k\|^{2n-1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha\left(\gamma_j(\tau-t)\right)}{\lambda_j\prod_{r=1,\,r\ne j}^{n}\left(\lambda_r^2-\lambda_j^2\right)}, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}, \tag{4}$$

$$G_{(0)}(t,\tau) = A\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^j\left(\tau^{2n-2j+1}+(T-\tau)^{2n-2j+1}\right)\Delta_{js}}{2(2n-2j+1)!\,t^{-s+1}} + \frac{|t-\tau|^{2n-1}}{2(2n-1)}, \tag{5}$$

де $\gamma_j\equiv\gamma_j(k) = i\|k\|\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,n$, $\alpha(y) = \exp(-y)-\exp(y)$, $A = (2n-2)!\,T^{-n}\prod_{m=1}^{2n-1}m!$, $S_{n-s}^{(j)}$ — сума всіх можливих добутків елементів $\lambda_1^2,\dots,\lambda_{j-1}^2,\ \lambda_{j+1}^2,\dots,\lambda_n^2$, взятих у кількості $n-s$ в кожному добутку, $S_0^{(j)}\equiv 1$; Δ_{js} — алгебраїчне доповнення у визначнику $\det\left\|l_{j-1}\left[t^{s-1}\right]\right\|_{j,s=1}^{n}$ елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та s-го стовпця. На стороні $\tau=0$ ($\tau=T$) квадрата K_T функції $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, довизначимо за неперервністю справа (зліва).

Зауважимо, що всі сталі C_j, $j=1,\dots,8$, які фігурують нижче в оцінках, є додатними і не залежать від k.

На основі формул (4), (5) отримуємо такі оцінки:

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau\right| \le C_1\overline{\Phi}_k|k|^{-2n+1+q}\sum_{j=1}^{n}\left|1-\exp\left(2i\|k\|\lambda_j T\right)\right|^{-1},$$

$$k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}, \quad q=0,1,\dots,2n, \tag{6}$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^q}{dt^q}\int_0^T G_{(0)}(t,\tau)\Phi_{(0)}(\tau)\,d\tau\right| \le C_2\overline{\Phi}_{(0)}, \quad q=0,1,\dots,2n, \tag{7}$$

де $\overline{\Phi}_k = \max_{0\le t\le T}\left|\overline{\Phi}_k(t)\right|$, $k\in\mathbb{Z}^p$; при цьому використано нерівності

$$C_3\le\lambda_m\le C_4, \quad m=1,\dots,n; \qquad \left|\lambda_m^2-\lambda_r^2\right| \ge C_5, \quad n\ge m>r\ge 1,$$

які випливають із строгої гіперболічності оператора L та теореми Вейєрштрасса.

Збіжність ряду в (3) пов'язана, взагалі, з проблемою малих знаменників, бо вирази $\left|1-\exp\left(2i\|k\|\lambda_j T\right)\right|$, $j=1,\dots,n$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

Позначимо $\beta=\pi/T$.

Лема. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* β *нерівності*

$$\left|1-\exp\left(2i\|k\|\lambda_j T\right)\right| \geq C_6|k|^{-p-\delta}, \quad j=1,\dots,n,$$

де $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $0<\delta<1$, *виконуються для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$.

Доведення базується на лемі 2.4 з [13] (гл. 1) та оцінках

$$\left|1-\exp\left(2i\|k\|\lambda_j T\right)\right| \geq \frac{4T}{\pi}\|k\|\left|\lambda_j(k)-\frac{\pi}{T}\frac{m_j(k)}{\|k\|}\right|, \quad j=1,\dots,n,$$

де $m_j(k)$ — ціле число, яке справджує нерівність $\left|\lambda_j\|k\|T/\pi-m_j\right|\leq 1/2$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *при* $\varepsilon=0$ *і* $\Phi\in C^{(0,2p+2)}\left(D^p\right)$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел* β *існує єдиний розв'язок* $u^0\in C^{2n}\left(D^p\right)$ *незбуреної задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від* $\Phi(t,x)$. *Цей розв'язок зображується формулами* (3) – (5).

Доведення. За умов теореми справедливі оцінки

$$\overline{\Phi}_k \leq C_7\|\Phi\|_{C^{(0,2p+2)}(D^p)}|k|^{-2p-2}, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}. \tag{8}$$

На підставі формули (3) та леми, враховуючи нерівності (6) – (8), отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел β справджується оцінка

$$\|u^0\|_{C^{2n}(D^p)} \leq \sum_{|s|\leq 2n}\max_{D^p}\left|\frac{\partial^{|s|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau\exp(ikx)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{|s|\leq 2n}\sum_{k\geq 0}|k|^{|s|-s_0}\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau\right| \leq C_8 S\|\Phi\|_{C^{(0,2p+2)}(D^p)}, \tag{9}$$

де $S=\sum_{k>0}|k|^{-p-1+\delta}$. Теорему доведено.

Зауважимо, що умови, які накладаються на функції $\Phi(t,x)$ в теоремі 1, слабші, ніж в теоремах існування робіт [11, 12].

3. Розглянемо задачу (1), (2), коли $\varepsilon\neq 0$. В цьому випадку задача (1), (2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon\int_{D^p}K(t,x,\tau,\xi)\,f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi \tag{10}$$

за умови, що ряд

$$(2\pi)^{-p}\sum_{k\geq 0}G_k(t,\tau)\exp(ik(x-\xi)) \tag{11}$$

рівномірно збігається в області $D^p\times D^p$ до функції $K(t,x,\tau,\xi)$. Із оцінок (6), (7) та леми випливає, що при $n\geq p+1$ ряд (11) рівномірно збігається в області $D^p\times D^p$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел β. Запишемо рівняння (10) у вигляді

$$u(t,x) = A_{u_0}[u(t,x)],$$

де A_ν — нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\overline{S}(u^0, r)$ формулою

$$A_\nu[u(t,x)] \equiv \nu(t,x) + \varepsilon \int\limits_{D^p} K(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\tau\, d\xi. \tag{12}$$

Позначимо через V сукупність функцій $\nu \in C^{2n}(D^p)$, для яких

$$\| \nu - u^0 \|_{C^{2n}(D^p)} \le \chi = r - |\varepsilon| \psi,$$

де

$$\psi = \bar{f} n(2n+1) C_1 C_6 C_7 \left(1 + r + C_8 S \|\Phi\|_{C^{(0,2p+2)}(D^p)}\right)^{2p+2} S,$$

$$\bar{f} = \| f(t,x,u) \|_{C^{(0,2p+3)}(D_1)}.$$

Покажемо, що для довільної функції $\nu(t,x)$ із V оператор A_ν переводить кулю $\overline{S}(u^0, r)$ в себе, якщо $|\varepsilon| < r/\psi$.

На підставі формули

$$f_k(t,\{u_m(t)\}) = (2\pi)^{-p} \int\limits_{\Omega^p} f\left(t, x, \sum_{m \in \mathbb{Z}^p} u_m(t) \exp(imx)\right) \exp(-ikx)\, dx,$$

враховуючи, що $u \in \overline{S}(u^0, r)$, одержуємо

$$\max_{0 \le t \le T} | f_k(t,\{u_m(t)\}) | \le C_7 B_\alpha |k|^{-\alpha}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \tag{13}$$

де

$$B_\alpha = \max_{D^p} \max_{1 \le r \le p} \left| \frac{\partial^\alpha f(t,x,u(t,x))}{\partial x_r^\alpha} \right|, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, 2p+2.$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції, знаходимо

$$B_\alpha \le \bar{f}\left(1 + \|u\|_{C^{2n}(D^p)}\right)^\alpha \le \bar{f}\left(1 + \| u - u^0 \|_{C^{2n}(D^p)} + \| u^0 \|_{C^{2n}(D^p)}\right)^\alpha \le$$

$$\le \bar{f}\left(1 + r + C_8 S \|\Phi\|_{C^{(0,2p+2)}(D^p)}\right)^\alpha, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, 2p+2. \tag{14}$$

Із формули (12), враховуючи оцінки (6), (7), (9), (13), (14) та лему, отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел β справедлива оцінка

$$\| A_\nu[u(t,x)] - u^0(t,x) \|_{C^{2n}(D^p)} \le \| \nu - u^0 \|_{C^{2n}(D^p)} + |\varepsilon| (2\pi)^{-p} \times$$

$$\times \left\| \int\limits_{D^p} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} G_k(t,\tau) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) \exp(ik(x-\xi))\, d\tau d\xi \right\|_{C^{2n}(D^p)} \le$$

$$\leq \chi + |\varepsilon| \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{|s| \leq 2n} |k|^{|s|-s_0} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau, \{u_m(\tau)\}) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \chi + |\varepsilon| \bar{f} n(2n+1) C_1 C_6 C_7 \left(1 + r + C_8 S \|\Phi\|_{C^{(0,2p+2)}}\right)^{2p+2} S = \chi + |\varepsilon| \psi = r.$$

Покажемо тепер, що для довільної функції $v \in V$ оператор A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon| < 1/\psi$. Нехай $u_1, u_2 \in \overline{S}(u^0, r)$.

Позначимо

$$F(t,x) \equiv f(t,x,u_1(t,x)) - f(t,x,u_2(t,x)). \tag{15}$$

Із формули (12), враховуючи (6), (7), (13) – (15), формулу Лагранжа про скінченні прирости та лему, одержуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел β справджується оцінка

$$\| A_v[u_1(t,x)] - A_v[u_2(t,x)] \|_{C^{2n}(D^p)} \leq$$

$$\leq \frac{|\varepsilon|}{(2\pi)^p} \left\| \int_{D^p} K(t,x,\tau,\xi) F(t,x)\, d\tau d\xi \right\|_{C^{2n}(D^p)} \leq |\varepsilon| \psi \| u_2 - u_1 \|_{C^{2n}(D^p)}.$$

Якщо $|\varepsilon| \psi \leq 1$, то A_v є оператором стиску. Крім того, оператор A_v неперервний по v; тому, згідно з теоремами 1 і 3 із [21] (розд. 16), рівняння (10) (а разом з ним і задача (1), (2)) має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від $u^0(t,x)$. Із наведених вище міркувань випливає наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $n \geq p+1$, виконуються умови теореми 1 і в області D_1 функція $f(t,x,u)$ неперервна по t та має обмежені похідні за змінними x, u до порядку $2p+3$ включно. Якщо $|\varepsilon| < \min(r/\psi, 1/\psi)$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить кулі $\overline{S} \subset C^{2n}(D^p)$ і неперервно залежить від функції $\Phi(t,x)$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел β і довільних фіксованих коефіцієнтів A_s (при яких оператор L є строго гіперболічним).*

Зауваження 1. Якщо $p = 1$, то корені λ_j, $j = 1, \ldots, n$, не залежать від k. У цьому випадку справедливе наступне твердження: якщо $\lambda_j T/\pi$, $j = 1, \ldots, n$, — ірраціональні числа, які розвиваються в ланцюгові дроби з обмеженими елементами, $\Phi \in C^{(0,3)}(D^1)$, а функція $f(t,x,u)$ в області D_1 неперервна по t і має обмежені похідні по x, u до 4-го порядку включно, то для досить малих $|\varepsilon|$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить кулі $\overline{S}$ і неперервно залежить від $\Phi(t,x)$.

Зауваження 2. Результати роботи поширено також на деякі випадки, коли в рівнянні (1) оператор L є нестрого гіперболічним або містить молодші члени, зокрема, коли

$$L \equiv \prod_{j=1}^{r} \left(\Delta - \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^{n_j}, \quad a_j > 0, \quad j = 1, \ldots, r, \quad n_1 + \ldots + n_r = n,$$

або

$$L \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + b_j^2\right), \quad a_j > 0, \quad b_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. *Бурский В.П.* Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. –1988. – **24**, № 6. – С. 1038–1039.
4. *Вайнерман Л. И., Горбачук М. Л.* О граничных задачах для дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1975. – **221**, № 4. – С. 763–766.
5. *Вахания Н. Н.* Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны // Там же. – 1957. – **116**, № 6. – С. 906–909.
6. *Вахания Н. Н.* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны // Сообщ. АН ГССР. – 1958. – **21**, № 2. – С. 131–138.
7. *Горбачук В. И.* О разрешимости задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в различных пространствах // Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов. – Киев, 1985. – С. 8–22.
8. *Денчев Р.* О задаче Дирихле для волнового уравнения // Докл. АН. СССР. – 1959. – **127**, № 3. – С. 501–504.
9. *Князюк Л. В.* Задача Дирихле для дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 2. – С. 256–260.
10. *Мосолов П. П.* О задаче Дирихле для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 3. – С. 213–218.
11. *Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, № 6. – С. 829–836.
12. *Пташник Б. Й.* Про одну крайову задачу для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 6. – С. 522–526.
13. *Пташник Б. Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
14. *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4. – С. 669–678.
15. *Шабозов М. Ш.* О восстановлении решения краевой задачи Дирихле для бинарного уравнения // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1147–1151.
16. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15–50.
17. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **47**, № 2. – С. 186–195.
18. *Митропольський Ю. А., Урманчева Л. Б.* О двухточечной задаче для системы гиперболических уравнений // Там же. – 1990. – **42**, №2. – С. 1657–1663.
19. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.
20. *Павленко В. Н.* О существовании полуправильного решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа // Там же. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1659–1664.
21. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М: Наука, 1977. – 742 с.

Одержано 09.08.99