УДК 517.5

Б. Д. Котляр (Нац. гірнича академія України, Дніпропетровськ)

АСИМПТОТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПАКТІВ І КЛАСИ СТЕПАНЦЯ

We obtain estimates of the ε-entropy and ε-capacity of sets of periodic functions with a zero mean which possess a (ψ, β)-derivative belonging to the space $L^2(0, 2\pi)$.

Одержано оцінки ε-ентропії та ε-місткості множин періодичних функцій з нульовим середнім, що мають (ψ, β)-похідну, яка належить простору $L^2(0, 2\pi)$.

Спираючись на попередні вивчення множин у метричних просторах (Л. С. Понтрягін і Л. Г. Шнірельман), міри інформації (К. Шеннон), можливості суперпозиції функцій (тринадцята проблема Гільберта — А. Г. Вітушкін, А. М. Колмогоров) А. М. Колмогоров сформулював [1] загальну проблему дослідження ε-ентропії та ε-місткості компактів у функціональних просторах. Детальний виклад результатів, одержаних на першому етапі розвитку цієї тематики, міститься у класичній статті А. М. Колмогорова та В. М. Тихомирова [2]; зокрема, §6 цієї статті присвячено одержаним В. І. Арнольдом оцінкам ε-ентропії та ε-місткості компактів періодичних функцій, диференційовних за Вейлем, у метриці $L^2(0, 2\pi)$.

Далеким узагальненням класів функцій, що мають певну дробову похідну за Вейлем, є введені О. І. Степанцем [3 – 5] класи L^ψ_β функцій, що мають (ψ, β)-похідну; ці класи детально вивчаються у монографії [6], де наведено і історію питання.

Ця стаття присвячена вивченню асимптотичних характеристик компактів, а саме — їх ε-ентропії та ε-місткості, у класах Степанця; ці компакти складаються з періодичних на $(0, 2\pi)$ функцій, що мають належну просторові $L^2(0, 2\pi)$ (ψ, β)-похідну і нульове середнє за періодом. Нам здається, що саме ці класи утворюють природний об'єкт для вивчення згаданих асимптотичних характеристик методом Арнольда. Іншими важливими характеристиками такого типу, що детально вивчаються, є поперечники різних типів; відмітимо, проте, що задача про обчислення поперечників класів Степанця у $L^2(0, 2\pi)$ по суті розв'язана: як видно з наведених нижче доведень теорем 1 і 2, вона зводиться до підрахунку поперечників еліпсоїда у l^2, а ці величини добре відомі [7] (§4.4). Питанням обчислення асимптотичних характеристик у метричних просторах присвячено чимало робіт; зокрема, можна послатися на коментар [8], що містить розгорнуту історію питання і відповідну бібліографію.

Розглянемо клас L^ψ_β 2π-періодичних функцій з рядом Фур'є [6]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

таких, що для фіксованих функцій натурального аргументу ψ і числа $\beta \in \mathbb{R}$ функція

$$f^\psi_\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right) \tag{2}$$

належить простору $L^2(0, 2\pi)$; при цьому f^ψ_β є (ψ, β)-похідною функції f. Для зручності будемо вважати функцію ψ заданою на проміжку $[1, +\infty)$ і неперервно диференційовною; це дасть можливість подати остаточні результати у більш компактному вигляді. Крім того, вважатимемо, що функція ψ задовольняє на проміжку $[1, +\infty)$ такі умови:

$$\psi(t) > 0, \tag{3}$$

$$\psi'(t) < 0, \tag{4}$$

для кожної константи $C > 0$

$$\sup_t \frac{\ln \psi(t - C)}{\ln \psi(t)} < \infty. \tag{5}$$

Типовим прикладом такої функції є $\psi(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}$, $\lambda, \alpha > 0$.

Далі будемо вважати фіксованими функцію ψ і число β. Розглянемо у просторі $L^2(0, 2\pi)$ компакт $K \equiv K(\psi, \beta)$, що складається з тих функцій L^{ψ}_{β}, які мають нульове середнє на періоді, тобто для яких $a_0 = 0$. Наша мета — дати ефективні оцінки ε-ентропії та ε-місткості цього компакта, що узагальнюють згадані результати В. І. Арнольда. Оцінки зверху і знизу ми сформулюємо відповідно у вигляді двох окремих теорем. Норма $\|\cdot\|$ означає норму у $L^2(0, 2\pi)$; ε-ентропія та ε-місткість компакта K позначаються відповідно через $\mathscr{H}_{\varepsilon}(K)$ та $\mathscr{C}_{\varepsilon}(K)$; $\log$ означає логарифм з основою 2; через ψ^* позначаємо функцію, обернену до ψ; усі інші позначення та термінологію див. у роботах [2, 6].

Теорема 1. *Нехай $L^{\psi}_{\beta}(C)$ — множина функцій з класу L^{ψ}_{β} таких, що*

$$\|f^{\psi}_{\beta}\| \le C, \quad C > 0, \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0. \tag{7}$$

Тоді існує така константа $A > 0$, що виконується нерівність

$$\mathscr{C}_{2\varepsilon}(L^{\psi}_{\beta}(C)) \ge 2 \log e \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \frac{t\,|\psi'(t)|}{\psi(t)}\, dt - A \log \frac{1}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Теорема 2. *В умовах теореми 1 існує така константа $B > 0$, що виконується нерівність*

$$\mathscr{H}_{\varepsilon}(L^{\psi}_{\beta}(C)) \le 2 \log e \int_1^{\psi^*(\varepsilon/\sqrt{2}C)} \frac{t\,|\psi'(t)|}{\psi(t)}\, dt \, +$$

$$+ \psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,C}\right) \log(4\sqrt{2}\,\pi e) - \frac{1}{2} \log \psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,C}\right) + B \log \frac{1}{\varepsilon}. \tag{9}$$

***Доведення теореми* 1.** Коефіцієнти Фур'є $a_k(f^{\psi}_{\beta})$ та $b_k(f^{\psi}_{\beta})$ функції f^{ψ}_{β} обчислюються за відомими [6] формулами (a_k та b_k — коефіцієнти з (1)):

$$a_k(f^{\psi}_{\beta}) = \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k \sin\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

$$b_k(f^{\psi}_{\beta}) = \frac{1}{\psi(k)}\left(-a_k \sin\frac{\beta\pi}{2} + b_k \cos\frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Звідси і з (6), (7) одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi^2(k)}(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(f_\beta^\psi) + b_k^2(f_\beta^\psi)) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_\beta^\psi(x))^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \|f_\beta^\psi\|^2 \le \frac{1}{\pi} C^2. \tag{10}$$

Розглянемо ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ у l^2 і встановимо ізометрію між просторами l^2 і $L^2(0, 2\pi)$ так, що $e_1 \leftrightarrow (2\pi)^{-1/2}$, $e_{2k} \leftrightarrow \pi^{-1/2} \sin kx$, $e_{2k+1} \leftrightarrow \pi^{-1/2} \cos kx$, $k \ge 1$. Множина $L_\beta^\psi(C)$ при цій ізометрії відображується у множину векторів $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$ таких, що

$$x_1 = 0, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k^2}{\psi^2([k/2])} \le C^2. \tag{11}$$

Справді, елемент x при згаданій ізометрії має координати

$$x_{2m} = \pi^{1/2} b_m, \qquad x_{2m+1} = \pi^{1/2} a_m,$$

тому

$$\frac{1}{\psi^2(m)}(a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi \psi^2(m)}(x_{2m}^2 + x_{2m+1}^2).$$

Тепер (11) випливає з цієї рівності і нерівності (10).

Множина $E(\psi, C) \subset l^2$, що визначається нерівністю (11), — це еліпсоїд з півосями

$$d_k = C\psi\left(\left[\frac{k}{2}\right]\right), \qquad k = 2, 3, \ldots .$$

Цей еліпсоїд ізометричний множині $L_\beta^\psi(C) \subset L^2(0, 2\pi)$, тому ми далі вивчатимемо асимптотичні характеристики — ε-ентропію та ε-місткість — саме для $E(\psi, C)$. Враховуючи (4), маємо

$$C\psi\left(\frac{k}{2}\right) \le C\psi\left(\left[\frac{k}{2}\right]\right) \le C\psi\left(\frac{k-1}{2}\right). \tag{12}$$

Еліпсоїди з півосями, рівними $C\psi\left(\frac{k}{2}\right)$ та $C\psi\left(\frac{k-1}{2}\right)$, позначимо відповідно E_1 та E_2. Тоді з (12) маємо

$$E_1 \subset E(\psi, C) \subset E_2. \tag{13}$$

Розглянемо еліпсоїд

$$E_1^n = E_1 \cap D^n,$$

де D^n — n-вимірний евклідів простір, натягнутий на перші n осей еліпсоїда E_1. Нехай $M_{2\varepsilon}$ — максимальне число n-вимірних куль $U^n(x^k, \varepsilon)$, що не перетинаються, радіуса $\varepsilon > 0$, з центрами в точках $x^k \in E_1^n$, $k = 1, 2, \ldots, M_{2\varepsilon}$. Позначимо n-вимірний об'єм через $\upsilon^n(\cdot)$ і кулю $U^n(0, 1)$ — через U^n. Через максимальність числа $M_{2\varepsilon}$ кулі $U^n(x^k, 2\varepsilon)$ повинні покрити весь еліпсоїд E_1^n; тому (tK — образ множини $K \subset \mathbb{R}^n$ при гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом t)

$$M_{2\varepsilon} \nu^n(2\varepsilon U^n) \geq \nu^n(E_1^n),$$

тобто

$$M_{2\varepsilon} \geq \frac{\nu^n(E_1^n)}{(2\varepsilon)^n \nu^n(U^n)} = \frac{\nu^n(U^n) \prod_{k=2}^{n+1} C\psi\left(\frac{k}{2}\right)}{(2\varepsilon)^n \nu^n(U^n)} = \left(\frac{C}{2\varepsilon}\right)^n \prod_{k=2}^{n+1} \psi\left(\frac{k}{2}\right). \quad (14)$$

За даним $\varepsilon > 0$ знайдемо, користуючись (4), номер n такий, що

$$C\psi\left(\frac{n}{2}\right) < 2\varepsilon \leq C\psi\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Враховуючи, що функція ψ^* внаслідок (4) спадає, одержуємо нерівності

$$\frac{n}{2} > \psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right) \geq \frac{n-1}{2},$$

тобто

$$n = 2\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right) + O(1). \quad (15)$$

З (13) – (15) і означення ε-місткості послідовно маємо

$$\mathscr{E}_{2\varepsilon}(L^{\psi}_{\beta}(C)) = \mathscr{E}_{2\varepsilon}(E(\psi, C)) = \log M_{2\varepsilon} \geq n \log\frac{C}{2\varepsilon} + \sum_{k=2}^{n+1} \log\psi\left(\frac{k}{2}\right) =$$

$$= \left(2\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right) + O(1)\right)\log\frac{C}{2\varepsilon} + \sum_{k=2}^{n+1} \log\psi\left(\frac{k}{2}\right) =$$

$$= 2\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)\log\frac{C}{2\varepsilon} + \sum_{k=2}^{n+1} \log\psi\left(\frac{k}{2}\right) + O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (16)$$

Мета наступних викладок — показати, що перший доданок у правій частині (16) насправді компенсується відповідною складовою частиною другого доданка. Оцінимо згаданий другий доданок, що знаходиться у правій частині (16). Для цього доведемо, що

$$\sum_{k=2}^{n+1} \log\psi\left(\frac{k}{2}\right) =$$

$$= -2\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)\log\frac{2\varepsilon}{C} + 2\log e \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt + O\left(\log\frac{C}{2\varepsilon}\right), \quad (17)$$

де n задовольняє умову (15).

Почнемо з рівності, що випливає з (4):

$$\sum_{k=2}^{n+1} \log\psi\left(\frac{k}{2}\right) = 2\int_1^{(n+1)/2} \log\psi(t)\,dt + O\left(\log\psi\left(\frac{n+1}{2}\right)\right). \quad (18)$$

З урахуванням (5) та (15) маємо

$$\log\psi\left(\frac{n+1}{2}\right) = O\left(\log\psi\left(\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)\right)\right) = O\left(\log\frac{2\varepsilon}{C}\right), \quad (19)$$

$$\int_1^{(n+1)/2} \log\psi(t)\,dt = \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \log\psi(t)\,dt + O\left(\log\psi\left(\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)\right)\right) =$$

$$= \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \log\psi(t)\,dt + O\left(\log\frac{\varepsilon}{2C}\right). \tag{20}$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює (якщо вважати, що $\psi(0) = 1$)

$$\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)\log\psi\left(\psi^*\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)\right) + \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \frac{t\,|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt =$$

$$= -\psi\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)\log\frac{C}{2\varepsilon} + \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \frac{t\,|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt,$$

підстановка (19), (20) у (18) доводить (17). З рівності (17) та нерівності (16) випливає

$$\mathscr{E}_{2\varepsilon}(L_\beta^\psi(C)) \ge 2\log e \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \frac{t\,|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt + O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{21}$$

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Будемо оцінювати зверху ε-ентропію еліпсоїда E_2 (див. (13)). Знайдемо число $m \in \mathbb{N}$ таке, щоб виконувались нерівності

$$C\psi\left(\frac{m+2}{2}\right) \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \le C\psi\left(\frac{m+1}{2}\right). \tag{22}$$

Звідси, аналогічно (15), маємо

$$m = 2\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,C}\right) + O(1). \tag{23}$$

Розглянемо еліпсоїд

$$E_2^m = E_2 \cap D^m,$$

де D^m — m-вимірний евклідів простір, натягнутий на перші m осей еліпсоїда E_2. Розглядаючи ортогональну проекцію E_2 на E_2^m, бачимо, що відстань від будь-якої точки E_2 до E_2^m менша, ніж $\varepsilon/\sqrt{2}$; справді, ця відстань менша за довжину найбільшої півосі E^2, що не ввійшла у E_2^m, а ця піввісь має номер $m+2$. Тепер наведене твердження випливає з лівої нерівності (22). Внаслідок цього і евклідовості простору будь-яка $(\varepsilon/\sqrt{2})$-мережа еліпсоїда E_2^m є ε-мережею еліпсоїда E_2. Розглянемо у просторі D^m кубічну гратку з довжиною ребра куба, що дорівнює $\varepsilon/\sqrt{2m}$, причому ребра кубів паралельні координатним осям; евклідів діаметр кожного з кубів гратки дорівнює $\varepsilon/\sqrt{2}$. Нехай N — число кубів гратки, що мають непорожній перетин з еліпсоїдом E_2^m. Ці куби лежать в $(\varepsilon/\sqrt{2})$-околі W еліпсоїда E_2^m. Розглянемо еліпсоїд E^m з найменшою піввіссю, рівною $C\psi((m+1)/2) + \varepsilon/\sqrt{2}$, гомотетичний еліпсоїду E_2^m з центром гомотетії, що збігається з центром цього еліпсоїда. Тоді коефіцієнт гомотетії (згідно з правою нерівністю (22))

$$k = \frac{C\psi((m+1)/2) + \varepsilon/\sqrt{2}}{C\psi((m+1)/2)} \leq 2.$$

Таким чином,

$$W \subset E^m \equiv kE_2^m \subset 2E_2^m.$$

Тому сумарний об'єм усіх кубів гратки, що мають непорожній перетин з E_2^m, не більший за об'єм еліпсоїда E^m, тобто

$$N\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2m}}\right)^m \leq v^m(2E_2^m).$$

Звідси одержуємо

$$N \leq 2^m v^m(E_2^m)\left(\frac{\sqrt{2m}}{\varepsilon}\right)^m = \left(\frac{2\sqrt{2m}}{\varepsilon}\right)^m v^m(U^m)\prod_{k=2}^{m+1} C\psi\left(\frac{k}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2C\sqrt{2m}}{\varepsilon}\right)^m \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}\prod_{k=2}^{m+1}\psi\left(\frac{k}{2}\right). \tag{24}$$

Позначимо кількість елементів мінімальної ε-мережі компакта K через $N_\varepsilon(K)$. За означенням ε-ентропії, використовуючи (24) і формулу Стірлінга, а також враховуючи, що N вершин гратки утворюють одну з $(\varepsilon/\sqrt{2})$-мереж еліпсоїда E_2^m, маємо

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L_\beta^\psi(C)) = \mathcal{H}_\varepsilon(E(\psi, C)) = \log N_\varepsilon(E(\psi, C)) \leq$$

$$\leq \log N_\varepsilon(E_2) \leq \log N_{\varepsilon/\sqrt{2}}(E_2^m) \leq \log N \leq$$

$$\leq m\log\frac{2C\sqrt{2}}{\varepsilon} + \frac{m}{2}\log m + \frac{m}{2}\log\pi -$$

$$-\left(\frac{m+1}{2}\log\left(\frac{m}{2}+1\right) - \left(\frac{m}{2}+1\right)\log e + O(1)\right) + \sum_{k=2}^{m+1}\log\psi\left(\frac{k}{2}\right). \tag{25}$$

Покажемо, що доданки порядків $m\log\frac{1}{\varepsilon}$ та $m\log m$ насправді зникають. Використовуючи рівність (17), у якій замість n покладаємо значення m згідно з (23), маємо

$$\sum_{k=2}^{m+1}\log\psi\left(\frac{k}{2}\right) =$$

$$= -2\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{C\sqrt{2}}\right)\log\left(\frac{C\sqrt{2}}{\varepsilon}\right) + 2\log e\int_1^{\psi^*(\varepsilon/\sqrt{2}C)}\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}dt + O\left(\log\frac{C\sqrt{2}}{\varepsilon}\right).$$

Використовуючи останню рівність і (23), з (25) одержуємо

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L_\beta^\psi(C)) \leq$$

$$\leq 2\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right)\log\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon} + 2\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right)\log 2 + O\left(\log\frac{2C\sqrt{2}}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ \left(\frac{m}{2}\log m - \frac{m+1}{2}\log\left(\frac{m}{2}+1\right)\right) + \psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right)\log\pi + \psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right)\log e -$$
$$- 2\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right)\log\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon} + O\left(\log\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon}\right) +$$
$$+ 2\log e \int_1^{\psi^*(\varepsilon/\sqrt{2}C)} \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt + O(1). \tag{26}$$

Враховуючи рівність

$$\frac{m}{2}\log m - \frac{m+1}{2}\log\left(\frac{m}{2}+1\right) = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\log m + O(1) =$$
$$= \frac{1}{2}\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right) - \frac{1}{2}\log\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right) + O(1),$$

з (26) одержуємо

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L^\psi_\beta(C)) \le 2\log e \int_1^{\psi^*(\varepsilon/\sqrt{2}C)} \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt +$$
$$+ \psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right)\log(4\sqrt{2}\pi e) - \frac{1}{2}\log\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right) + O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Теорему 2 доведено.

Зрозуміло, що з теорем 1 і 2, внаслідок співвідношення між ε-ентропією та ε-місткістю, випливає подвійна нерівність

$$2\log e \int_1^{\psi^*(2\varepsilon/C)} \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt - A\log\frac{1}{\varepsilon} \le \mathcal{E}_{2\varepsilon}(L^\psi_\beta(C)) \le \mathcal{H}_\varepsilon(L^\psi_\beta(C)) \le$$
$$\le 2\log e \int_1^{\psi^*(\varepsilon/\sqrt{2}C)} \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\,dt +$$
$$+ \psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right)\log(4\sqrt{2}\pi e) - \frac{1}{2}\log\psi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}C}\right) + B\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{27}$$

З (27) випливає багато результатів, як відомих, так і раніше невідомих. Так, для одержання згаданого результату В. І. Арнольда [2] (теорема XVI) досить покласти $\psi(t) \equiv t^{-\alpha}$.

Розглянемо клас функцій, періодичних з періодом 2π і нульовим середнім на періоді, аналітичних у смузі шириною h, тобто для таких z, що $|\operatorname{Im} z| \le h$, обмежених у цій смузі константою $A > 0$; для коефіцієнтів Фур'є таких функцій виконується нерівність $|c_k| \le A e^{-|k|h}$; нехай, крім того, виконується включення

$$\{c_k e^{|k|h}\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l^2. \tag{28}$$

Покладаючи $\psi(t) \equiv e^{-th}$, звідки $\psi^*(t) \equiv \dfrac{1}{h}\ln\dfrac{A}{t}$, з (27) одержуємо оцінку

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L^\psi_\beta(C)) = \frac{\log^2(1/\varepsilon)}{h\log e} + O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Порівнюючи цей результат з відомими оцінками ε-ентропії класів аналітичних функцій, які належать В. Д. Єрохіну, А. Г. Вітушкіну, К. І. Бабенку, В. М. Тихомирову [2], бачимо, що оцінка другого доданка дещо краща, ніж у згаданих авторів; насправді це пов'язано з тим, що додаткова умова (28) визначає дещо вужчий клас функцій, а саме, клас Харді.

Наведемо ще один приклад. Розглянемо клас M періодичних з періодом 2π і нульовим середнім на періоді функцій таких, що послідовність коефіцієнтів Фур'є $\{c_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ кожної з них задовольняє умову

$$\{c_k e^{hk^2}\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l^2.$$

Тоді існують такі константи $C_1, C_2 > 0$, що

$$C_1\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/2} \le \mathcal{H}_\varepsilon(M) \le C_2\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/2}.$$

Для доведення останнього співвідношення досить покласти $\psi(t) = e^{-ht^2}$ $\Bigg($тоді маємо $\psi^*(t) \equiv \left(\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{1}{t}\right)^{1/2}\Bigg)$ і застосувати нерівності (27).

Відмітимо, що наведені результати тісно пов'язані з метрикою L^2. У інших метриках, зокрема у C і L^p, слід користуватися іншими методами (див., наприклад, статті [9–12], а також монографії [13, 7] і пізніший коментар [8]).

1. *Колмогоров А. Н.* О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. – 1956. – **108**, № 3. – С. 385–389.
2. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, вып. 2. – С. 3–86.
3. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 10).
4. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР. – 1984. – **227**, № 5. – С. 1074–1077.
5. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 2. – С. 101–136.
6. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
8. *Тихомиров В. М.* ε-Энтропия и ε-емкость // А. Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. – М.: Наука, 1987. – С. 262–269.
9. *Брудный Ю. А., Тиман А. Ф.* Конструктивные характеристики компактных множеств в пространствах Банаха и ε-энтропия // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 5. – С. 927–930.
10. *Котляр Б. Д.* О порядке роста ε-энтропии на классе квазигладких функций // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 2. – С. 135–138.
11. *Брудный Ю. А., Котляр Б. Д.* О порядке роста ε-энтропии на некоторых компактных классах функций // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 5. – С. 1001–1004.
12. *Брудный Ю. А.* Об одной аппроксимативной лемме и ее применениях // Теория функций, функцион. анализ и их применения. – 1972. – Вып. 16. – С. 180–189.
13. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Одержано 15.12.98,
після доопрацювання — 17.05.99