УДК 517.925.3

М. О. Перестюк, О. С. Чернікова (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО СТІЙКІСТЬ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Sufficient conditions of stability, asymptotic stability, and instability of invariant sets of discontinuous dynamical systems are established.

Встановлюються достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості інваріантних множин розривних динамічних систем.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (розривну динамічну систему [1, 2]):

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \notin \Gamma,$$
$$\Delta x\big|_{x \in \Gamma} = Tx - x = I(x), \tag{1}$$

де $x \in \overline{D} \subset R^n$, D — обмежена область в R^n, $f(x) \in C\left[\overline{D}, R^n\right]$, $t \in [0, +\infty]$, $T: \Gamma \to Q$, T — однозначне неперервне відображення, Γ — поверхня без контакту для системи $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, $\Gamma \subset \overline{D}$ (можливо, $\Gamma = \partial D$), Q — замкнена підмножина $\overline{D}$.

Припустимо, що для системи (1) виконуються умови існування та єдиності розв'язків, і що кожний розв'язок визначено на інтервалі $[0, +\infty)$. Через $x(t, x_0)$ позначатимемо розв'язок системи (1), який при $t = 0$ проходить через точку x_0. Кожній точці x_0 поставимо у відповідність величину t^{x_0} — момент часу, в який рухома точка $x(t, x_0)$ потрапляє до множини Γ.

Якщо для деякого x_0^* при $t \ge 0$ $x\left(t, x_0^*\right) \notin \Gamma$, то $t^{x_0^*} = +\infty$. Якщо ж $t^{x_0} < < +\infty$, то рухома точка $x(t, x_0)$ в момент часу $t_1^{x_0} = t^{x_0}$ миттєво перекидається з множини Γ в точку $x_{(1)} \in Q$;

$$x_{(1)} = x\left(t_1^{x_0} + 0, x_0\right) = Tx\left(t_1^{x_0}, x_0\right) = x\left(t_1^{x_0}, x_0\right) + I\left(x\left(t_1^{x_0}, x_0\right)\right).$$

Для розв'язку $x(t, x_0)$ при $t_1^{x_0} < +\infty$ введемо до розгляду величину $t_2^{x_0} = t_1^{x_0} + t^{x_{(1)}}$ — момент часу другої зустрічі $x(t, x_0)$ з множиною Γ і відповідно точку

$$x_{(2)} \in Q: x_{(2)} = x\left(t_2^{x_0} + 0, x_0\right) = Tx\left(t_2^{x_0}, x_0\right) = x\left(t_2^{x_0}, x_0\right) + I\left(x\left(t_2^{x_0}, x_0\right)\right) \quad \text{і т. д.}$$

Серед множини всіх траєкторій системи (1) виділимо такі класи: 1) сукупність траєкторій, які не мають спільних точок з множиною Γ; 2) сукупність траєкторій, які мають не більше, ніж скінченну кількість спільних точок з множиною Γ; 3) сукупність траєкторій, які мають нескінченну (зліченну) кількість спільних точок з множиною Γ. Позначимо через D_1, D_2, D_3 відповідно множини тих точок x_0, для яких траєкторії належать першому, другому або третьому з перелічених класів.

Множину $M \subseteq \overline{D}$ назвемо інваріантною множиною системи (1) [3 – 5], якщо з того, що $x_0 \in M$ випливає, що $x(t, x_0)$ при $t \ge 0$.

Це означення інваріантної множини системи (1), яке за своєю формою збігається з означенням додатно інваріантної множини системи $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ [4, 5], відображає певну специфіку розривних динамічних систем.

Очевидно, якщо M — інваріантна множина системи (1) і $M \cap \Gamma \neq \varnothing$, то з того, що $x \in M \cap \Gamma$, випливає що $x + I(x) \in M$ (необхідна умова інваріантності множини, яка містить розривні траєкторії). Зокрема інваріантними множинами системи (1) є D_1, D_2, D_3 [5]. Як відомо (див. [4]), замикання інваріантної (напівінваріантної) множини системи $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ є інваріантною (напівінваріантною) множиною. Для розривних динамічних систем деякі достатні умови інваріантності замикання інваріантної множини встановлено в [5].

Позначимо через $\rho(z, A)$ відстань між точкою $z \in \overline{D}$ і множиною $A \subseteq \overline{D}$. Замкнена інваріантна множина M системи (1) називається стійкою за Ляпуновим [3, 4], якщо для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що при $\rho(x_0, M) < \delta$ і $x_0 \in \overline{D}$ справджується нерівність $\rho(x(t, x_0), M) < \varepsilon$ для всіх $t \geq 0$.

Якщо M — стійка інваріантна множина і можна вказати таке $\delta_0 > 0$, що при $\rho(x_0, M) < \delta_0$ і $x_0 \in \overline{D}$ має місце граничне співвідношення $\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), M) = 0$, то M називається асимптотично стійкою за Ляпуновим множиною [3, 4].

Замкнена інваріантна множина M називається стійкою (асимптотично стійкою) відносно множини $B \subset \overline{D}$ [3, 4], якщо розв'язки, які починаються в B, задовольняють умови означення стійкості (асимптотичної стійкості) множини M.

Замкнена інваріантна множина M системи (1) називається нестійкою, якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного $\delta > 0$ можна вказати принаймні одну точку $x_0 \in U_\delta(M)$ таку, що для деякого $t^* > 0$ буде $\rho\left(x(t^*, x_0), M\right) \geq \varepsilon$ (через $U_\delta(M)$ позначено множину точок $x \in \overline{D}$, для яких $0 < \rho(x, M) < \delta$; далі буде використано також позначення $S_\delta(M) = U_\delta(M) \cup M$).

Нехай $V(x)$ — неперервно диференційовна в $\overline{D}$ функція, яка дорівнює нулю на множині $M_0 \subset \overline{D}$ і додатна поза множиною M_0, тобто

$$\begin{gathered} V(x) = 0, \quad x \in M_0, \quad M_0 \subset \overline{D}, \quad M_0 \neq \varnothing, \\ V(x) > 0, \quad x \in \overline{D} \setminus M_0. \end{gathered} \tag{2}$$

Позначимо через V_μ множину точок $x \in \overline{D}$ таких, що $V(x) \leq \mu$ (μ — достатньо мале додатне число). Неважко переконатися в тому, що V_μ — замкнена множина, яка містить M_0 [4]. У випадку, коли $M_0 \cap \partial D \neq \varnothing$, межа множини V_μ містить частину Λ_μ множини ∂D; Λ_μ стягується у множину $\Lambda_0 = M_0 \cap \partial D$, коли $\mu \to 0$.

Справедливе таке твердження.

Твердження 1. *Якщо для функції* $V(x)$, *яка задовольняє* (2), *виконуються умови*

$$\langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle \leq 0, \qquad x \notin \Gamma, \tag{3}$$

$$V(x + I(x)) \leq V(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{4}$$

то множини M_0 *і* V_μ *є інваріантними множинами системи* (1).

Доведення. Нехай $x_0 \in M_0$ (або $x_0 \in V_\mu$). Очевидно, внаслідок нерівностей (3), (4) та вказаних вище припущень відносно властивостей розв'язків системи (1) траєкторія руху $x(t, x_0)$ не може залишити множину M_0 (або V_μ) ні на ділянці своєї неперервності [4], ні в момент часу імпульсної дії.

Розглянемо питання про стійкість множини M_0.

Твердження 2. *Якщо виконуються умови* (3), (4), *то множина* M_0, *яка визначається згідно з* (2), *є стійкою інваріантною множиною системи* (1).

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ — достатньо мале число. Позначимо $l = \inf_{x \in \overline{D},\ \rho(x, M_0) \geq \varepsilon} V(x)$. Виберемо $\delta > 0$ таким чином, щоб справджувалась умова $\sup_{x \in \overline{D},\ \rho(x, M_0) \leq \delta} V(x) = m < l$. Покажемо, що з нерівності $\rho(x_0, M_0) < \delta$, $x_0 \in \overline{D}$, випливає нерівність $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$ при $t \geq 0$.

Припустимо протилежне, тобто припустимо, що для деякого $t^* > 0$ $\rho\left(x(t^* + 0, x_0), M_0\right) \geq \varepsilon$. У цьому випадку з врахуванням співвідношень (3), (4) одержимо суперечливі нерівності: $l \leq V\left(x(t^* + 0, x_0), M_0\right) \leq V(x_0) \leq m < l$, що й доводить справедливість твердження 2.

Твердження 3. *Нехай для системи* (1) *існує неперервно диференційовна функція* $V(x)$, *яка має властивості* (2), *задовольняє умову* (4) *і*

$$\langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle \leq -\varphi(V(x)), \quad x \notin \Gamma, \tag{5}$$

де $\varphi(s)$ — *неперервна функція,* $s \geq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(s) > 0$ *при* $s > 0$. *Тоді* M_0 — *асимптотично стійка інваріантна множина системи* (1).

Доведення. Оскільки виконуються припущення твердження 2, то M_0 — стійка інваріантна множина, і для довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при $\rho(x_0, M_0) < \delta$, $x_0 \in \overline{D}$, справджується нерівність $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$ для всіх $t \geq 0$.

Доведемо, що $\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), M_0) = 0$, $x_0 \in U_\delta(M_0)$. Очевидно, можна вважати, що $x(t, x_0) \notin M_0$ при $t \geq 0$. Розглянемо функцію $\nu(t) = V(x(t, x_0))$. Згідно з умовами (2), (4), (5) функція $\nu(t)$ є додатною і незростаючою. Нехай $\alpha = \lim_{t \to +\infty} \nu(t)$. Неважко переконатися в тому, що $\alpha = 0$. Дійсно, припустимо, що $\alpha > 0$. Тоді справджується нерівність: $\alpha \leq \nu(t) \leq l$. Позначимо $c = \min_{\alpha \leq s \leq l} \varphi(s)$, $c > 0$. З умов (4), (5) випливає нерівність $\nu(t) \leq V(x_0) - ct$, $t \geq 0$, яка при достатньо великих значеннях t суперечить додатності функції $\nu(t)$.

Таким чином, припущення про те, що $\alpha > 0$, є хибним, і $\lim_{t \to +\infty} \nu(t) = 0$. Звідси випливає, що $\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), M_0) = 0$. Отже, M_0 — асимптотично стійка інваріантна множина системи (1).

У попередніх твердженнях ніяких обмежень на розміщення інваріантної множини у множині $\overline{D}$ не накладалося (інваріантна множина могла належати, наприклад, множині D_1 або множині D_3). Припустимо тепер, що M_0 — інваріантна множина системи (1) така, що $M_0 \cap (\overline{D} \setminus D_1) \neq \varnothing$, $M_0 \cap (\overline{D} \setminus D_1) \subset \overline{D} \setminus D_1$. Встановимо достатню умову стійкості інваріантної множини.

Твердження 4. *Нехай для системи* (1) *із замкненою інваріантною множиною* M_0 *існує неперервно диференційовна функція* $V(x)$, *яка має властивості* (2) *і задовольняє умову* (3). *Якщо в деякому околі* $U_h(M_0)$ *множини* M_0 *для довільного розривного розв'язку* $x(t, x_0)$ *системи* (1) *послідовність* $\{V(x_{(n)})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *незростаюча, то множина* M_0 *стійка.*

Доведення. Нехай $x(t, x_0)$ — розривний розв'язок системи (1). Якщо $t > t_1^{x_0}$, то внаслідок умов твердження справджується нерівність $V(x(t, x_0)) \leq V(x_{(1)})$. Нехай $\varepsilon > 0$ — достатньо мале число і $l = \inf_{x \in \overline{D},\ \rho(x, M_0) \geq \varepsilon} V(x)$. Виберемо $\delta_1 > 0$ таке, що $\sup_{x \in \overline{D},\ \rho(x, M_0) \leq \delta_1} V(x) = m < l$. Якщо $\rho(x_{(1)}, M_0) < \delta_1$, то $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$ при $t \geq t_1^{x_0} + 0$. Дійсно, припустимо, що в деякий момент часу t^*, $t^* > t_1^{x_0}$, буде $\rho\left(x(t^* + 0, x_0), M_0\right) \geq \varepsilon$. При такому припущенні прийдемо до нерівностей $l \leq V\left(x(t^* + 0, x_0)\right) \leq V(x_{(1)}) < m$, які суперечать вибору δ_1 та співвідношенню між числами m і l. Таким чином, якщо $\rho\left(x_{(1)}, M_0\right) < \delta_1$, то при $t > t_1^{x_0}$ повинна справджуватись нерівність $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$. Виконання ж нерівності $\rho\left(x_{(1)}, M_0\right) < \delta_1$ можна забезпечити вибором околу $U_\delta(M_0)$ початкових положень x_0, враховуючи умову (3), властивості функції $I(x)$ та інваріантність множини M_0. Будь-який розв'язок $x(t, x_0)$ (як розривний, так і неперервний), для якого $x_0 \in U_\delta(M_0)$, буде задовольняти нерівність $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$ при $t \geq 0$. Отже, множина M_0 є стійкою.

Припустимо, що $M_0 \cap D_3 \neq \varnothing$, $M_0 \cap D_3 \subset D_3$, і встановимо деякі достатні умови асимптотичної стійкості множини M_0 відносно множини D_3. Очевидна справедливість такого твердження.

Твердження 5. *Якщо, крім припущень твердження* 4, *виконується умова* $\lim_{n \to +\infty} V\left(x_{(n)}\right) = 0$ *для будь-якого розв'язку* $x(t, x_0)$, $x_0 \in D_3$, *то множина* M_0 *асимптотично стійка відносно* D_3. *Якщо також для* $V(x)$ *справджується* (5), *то* M_0 *— асимптотично стійка множина системи* (1).

Доведемо також наступне твердження.

Твердження 6. *Нехай для системи* (1) *існує неперервно диференційовна функція* $V(x)$, *яка має властивості* (2), *задовольняє умову* (3) *і*

$$V(x + I(x)) - V(x) \leq -\psi(V(x)), \quad x \in \Gamma, \tag{6}$$

де $\psi(s)$ *— неперервна функція,* $s \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$. *Тоді множина* M_0 *є асимптотично стійкою відносно множини* D_3.

Доведення. Оскільки виконуються всі припущення твердження 2, то M_0 — стійка інваріантна множина системи (1), і для довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\rho(x_0, M_0) < \delta$ справджується нерівність $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$ для всіх $t \geq 0$. Доведемо, що $\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), M_0) = 0$ для будь-якої точки $x_0 \in D_3$ такої, що $\rho(x_0, M_0) < \delta_0$, де $\delta_0 > 0$ — достатньо мале. Припустимо, що $x(t, x_0) \notin M_0$ ні при яких значеннях $t \geq 0$. Розглянемо функцію $\nu(t) = V(x(t, x_0))$, яка є незростаючою додатною функцією. Нехай $\alpha = \lim_{t \to +\infty} \nu(t)$. Покажемо, що $\alpha = 0$. Припустимо, що $\alpha > 0$. При такому припущенні, враховуючи стійкість множини M_0, маємо нерівність $\alpha \leq \nu(t) \leq l$. Позначимо $c = \min_{\alpha \leq s \leq l} \psi(s)$. На підставі співвідношень (3) і (6) легко одержати нерівності $\nu\left(t_k^{x_0} + 0\right) \leq V(x_0) - kc$, $k \geq 1$, праві частини яких від'ємні при достатньо великих значеннях k, що суперечить додатності функції $\nu(t)$. Отже, $\alpha = 0$, $\lim_{t \to +\infty} \nu(t) = 0$ і одночасно $\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), M_0) = 0$. Асимптотичну стійкість множини M_0 відносно множини D_3 доведено.

Встановимо деякі умови нестійкості множини $M_0 \subset \overline{D}$.

Твердження 7. *Нехай на множині* $S_h(M_0)$ *визначено неперервно диференційовну функцію* $V(x)$ *таку, що* $V(x) = 0$, $x \in M_0$, *і нехай область додатності* $\Pi = \left\{x \in \overline{D} : V(x) > 0\right\}$ *цієї функції така, що для довільного* δ, $0 < \delta < h$, $U_\delta(M_0) \cap \Pi \neq \varnothing$. *Тоді якщо в області* Π *справджуються нерівності*

$$\langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle \geq \varphi(V(x)), \quad x \notin \Gamma, \tag{7}$$

$$V(x + I(x)) \geq V(x), \quad x \in \Gamma, \tag{8}$$

де $\varphi(s)$ *— неперервна функція,* $s \geq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(s) > 0$ *при* $s > 0$, *то* M_0 *— нестійка множина системи* (1).

Доведення. Нехай $\delta > 0$ — довільно мале число; виберемо $x_0 \in U_\delta(M_0) \cap \Pi$, і нехай $V(x_0) = \alpha > 0$. Покажемо, що траєкторія $x(t, x_0)$ неодмінно залишає множину $S_h(M_0)$. Припустимо супротивне: при $t \geq 0$ $\rho(x(t, x_0), M_0) < h$. Згідно з умовами (7), (8) траєкторія $x(t, x_0)$ залишається в області Π. Очевидно, що при цьому функція $\nu(t) = V(x(t, x_0))$ обмежена: $0 < \alpha \leq \nu(t) \leq L$. Позначимо $c = \min_{\alpha \leq s \leq L} \varphi(s)$, $c > 0$. З умов (7), (8) випливає нерівність $\nu(t) \geq V(x_0) + ct$, яка суперечить обмеженості функції $\nu(t)$. Таким чином, припущення про те, що $\rho(x(t, x_0), M_0) < h$ при $t \geq 0$, є хибним і множина M_0 — нестійка.

Зауваження. Якщо множина Π містить інваріантну множину M_1 системи (1) таку, що для довільного δ, $0 < \delta < h$, $U_\delta(M_0) \cap M_1 \neq \varnothing$, і нерівності (7), (8) виконуються не у всій області Π, а лише на множині M_1, то твердження залишається справедливим.

Твердження 8. *Нехай на множині $S_h(M_0)$ визначено неперервно диференційовну функцію $V(x)$ таку, що $V(x) = 0$, $x \in M_0$, і нехай область додатності $\Pi = \{x \in \overline{D}: V(x) > 0\}$ цієї функції така, що для будь-якого δ, $0 < \delta < h$, $U_\delta(M_0) \cap \Pi \cap D_3 \neq \varnothing$.*

Тоді якщо в області Π виконуються нерівності

$$\langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle \geq 0, \quad x \notin \Gamma, \tag{9}$$

$$V(x + I(x)) - V(x) \geq \psi(V(x)), \quad x \in \Gamma, \tag{10}$$

де $\psi(s)$ — неперервна функція, $s \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, то множина M_0 для системи (1) нестійка.

Доведення. Нехай δ — довільно мале додатне число, $x_0 \in U_\delta(M_0) \cap \Pi \cap D_3$ і $V(x_0) = \alpha > 0$. Покажемо, що $x(t, x_0)$ залишає множину $S_h(M_0)$, припустивши супротивне. Неважко переконатися в тому, що $x(t, x_0)$ залишається в області Π, і функція $\nu(t) = V(x(t, x_0))$ є обмеженою: $0 < \alpha \leq \nu(t) \leq L$. Позначимо $c = \min_{\alpha \leq s \leq L} \psi(s)$, $c > 0$. При виконанні умов (9), (10) справджуються нерівності $\nu(t_k^{x_0}) \geq V(x_0) + ck$, $k \geq 1$, які при досить великих значеннях k суперечать обмеженості функції $\nu(t)$. Отже, припущення про те, що $\rho(x(t, x_0), M_0) < h$ при $t \geq 0$, є хибним, і траєкторія $x(t, x_0)$ залишає множину $S_h(M_0)$, тобто M_0 — нестійка множина.

У встановлених вище умовах стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості інваріантних множин не накладалося обмежень на послідовності $\{t_k^{x_0}\}$, $k = 1, 2, \ldots$ (вважалось лише, що $t_{k+1}^{x_0} > t_k^{x_0}$ і $t_k^{x_0} \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $x_0 \in D_3$). Припустимо тепер, що для будь-якої послідовності $\{t_k^{x_0}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, справджуються нерівності

$$t_{k+1}^{x_0} - t_k^{x_0} \geq \theta, \quad k \geq 1. \tag{11}$$

При такій умові можна встановити більш цікаві, на наш погляд, умови стійкості інваріантних множин. Справедливі такі твердження.

Твердження 9. *Нехай для системи (1) існує неперервно диференційовна функція $V(x)$, яка задовольняє умови (2), (5) і умову*

$$V(x + I(x)) \leq \psi(V(x)), \quad x \in \Gamma, \tag{12}$$

де $\psi(s)$ — неперервна функція, визначена при $s \geq 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, $\psi(0) = 0$.

Якщо при деякому a_0 для всіх $a \in (0, a_0]$ справджується нерівність

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta, \tag{13}$$

то множина M_0 — стійка інваріантна множина системи (1).

Доведення. З умов (2), (5), (12) випливає, що M_0 — інваріантна множина. Доведемо її стійкість. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне достатньо мале число і нехай $\inf_{x \in \overline{D},\ \rho(x, M_0) \geq \varepsilon} V(x) = l \leq a_0$. Виберемо $\delta > 0$ таким чином, щоб при $\rho(x, M_0) < \delta$ для кожного розривного розв'язку $x(t, x_0)$ виконувалась нерівність $\nu\big(x\big(t_1^{x_0} + 0, x_0\big)\big) = V(x_{(1)}) < l$ (такий вибір δ можливий внаслідок умов (2), (5), (12)). Достатньо припустити, що $x(t, x_0) \notin M_0$ при $t \geq 0$. При такому припущенні з нерівностей (5), (11) – (13) легко одержати співвідношення

$$\int\limits_{V(x_{(n+1)})}^{V(x_{(n)})} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq 0, \quad n \geq 1,$$

які справджуються при умові, що $0 < V(x_{(n)}) \leq a_0$. Враховуючи ці нерівності і вибір δ, приходимо до висновку, що послідовність $\{V(x_{(n)})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, незростаюча. Міркуючи далі так, як при доведенні твердження 4, одержуємо, що при $\rho(x_0, M_0) < \delta$ справджується нерівність $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$, $t \geq 0$. Отже, M_0 — стійка інваріантна множина системи (1).

Твердження 10. *Нехай для системи* (1) *існує неперервно диференційовна функція* $V(x)$, *яка задовольняє умови* (2), (5), (12), *і при деяких* $\gamma > 0$ *і* $a_0 > 0$ *для всіх* $a \in (0, a_0]$ *справджується нерівність*

$$\int\limits_{a}^{\psi(s)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta - \gamma. \tag{14}$$

Тоді M_0 *— асимптотично стійка інваріантна множина системи* (1).

Доведення. З твердження 9 випливає, що M_0 — стійка інваріантна множина системи (1), і для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку $x(t, x_0)$ з нерівності $\rho(x_0, M_0) < \delta$ випливає нерівність $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$ і, крім цього, $\nu(t) = V(x(t, x_0)) < l \leq a_0$, $t \geq 0$. З врахуванням цих нерівностей та нерівності (11) на підставі (14) можна одержати співвідношення

$$\int\limits_{V(x_{(n+1)})}^{V(x_{(n)})} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \gamma, \quad n \geq 1, \tag{15}$$

з яких випливає, що $\{V(x_{(n)})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — спадна збіжна послідовність, і $V(x_{(n)}) \to 0$ при $n \to +\infty$. Дійсно, припустимо, що $\lim_{n \to +\infty} V(x_{(n)}) = \alpha > 0$. Нехай $c = \min_{\alpha \leq s \leq l} \varphi(s)$. З (15) одержуємо

$$\gamma \leq \int\limits_{V(x_{(n+1)})}^{V(x_{(n)})} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{1}{c}\Big(V\big(x_{(n)}\big) - V\big(x_{(n+1)}\big)\Big),$$

тобто $V(x_{(n)}) - V(x_{(n+1)}) \geq \gamma c$, що суперечить збіжності послідовності $\{V(x_{(n)})\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким чином, $\lim_{n \to +\infty} V\big(x_{(n)}\big) = 0$ і виконуються умови твердження 5. Отже, M_0 — асимптотично стійка інваріантна множина системи (1).

Твердження 11. *Нехай на множині* $S_h(M_0)$ *визначено неперервно диференційовну функцію* $V(x)$ *таку, що* $V(x) = 0$, $x \in M_0$. *Нехай область додатності* $\Pi = \{x \in \overline{D} : V(x) > 0\}$ *цієї функції така, що для довільного* δ, $0 < \delta < h$, $U_\delta(M_0) \cap \Pi \neq \varnothing$.

Припустимо, що в області Π *виконуються умови* (7) *і*

$$V(x+I(x)) \geq \psi(V(x)), \quad x \in \Gamma, \tag{16}$$

де $\psi(s)$ — *неперервна функція, визначена при* $s \geq 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, $\psi(0) = 0$.

Тоді якщо для деякого $\gamma > 0$ *для всіх* $a \in (0, a_0]$, *де* $a_0 = \sup_{x \in \Pi} V(x)$, *справджується нерівність*

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta - \gamma, \tag{17}$$

то множина M_0 *для системи* (1) — *нестійка.*

Доведення. Нехай $\delta > 0$ — довільно мале число; виберемо $x_0 \in U_\delta(M_0) \cap \cap \Pi$. Покажемо, що $x(t, x_0)$ при зростанні t вийде за межі $S_h(M_0)$. Припустимо супротивне, тобто що $\rho(x(t, x_0), M_0) < h$, $t \geq 0$. З нерівностей (7), (16) випливає, що $x(t, x_0)$ залишається в області Π. Функція $\nu(t) = V(x(t, x_0))$ внаслідок умов твердження є обмеженою: $0 < \alpha \leq \nu(t) \leq a_0$. На підставі умов (7), (11), (16), (17) можна одержати нерівність

$$\int_{V(t_n^{x_0})}^{V(t_{n+1}^{x_0})} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \gamma, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

звідки випливає, що обмежена послідовність $\{\nu(t_n^{x_0})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\nu(t_n^{x_0})$, є зростаючою. Нехай $c = \min_{\alpha \leq s \leq a_0} \varphi(s)$. З (18) для будь-якого натурального k можна знайти нерівність $\nu\left(t_{k+1}^{x_0}\right) \geq V(x_0) + k\gamma c$. Остання нерівність суперечить обмеженості послідовності $\{\nu(t_n^{x_0})\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Джерелом суперечності є припущення про те, що $\rho(x(t, x_0), M_0) < \varepsilon$ при $t \geq 0$. Отже, $x(t, x_0)$ залишає множину $S_h(M_0)$, і M_0 — нестійка множина системи (1).

Якщо припустити, що послідовність $\{t_k^{x_0}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, задовольняє умову $t_{k+1}^{x_0} - t_k^{x_0} \leq \theta_1$, то можна встановити достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості інваріантних множин є аналогічні за змістом та методами доведення твердженням 9 – 11.

Якщо інваріантною множиною M_0 системи (1) є точка $x = 0$, то наведені вище твердження дають достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості тривіального розв'язку розглядуваної системи. Питання стійкості тривіального розв'язку різних класів імпульсних систем диференціальних рівнянь розглянуто в [1, 2, 5 – 8].

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 282 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore etc.: World Sci., 1995. – 462 p.
3. *Самойленко А. М* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Самойленко А. М.* Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 374 – 384.
5. *Рожко В. Ф.* К теории разрывных динамических систем. I. Инвариантные и динамически предельные множества. Устойчивость по Пуассону // Мат. исслед. – 1969. – **4**, вып. 3. – С. 63 – 73.
6. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* О втором методе Ляпунова в системах с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 10. – С. 11 – 14.
7. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений импульсных систем // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1981. – Вып. 23. – С. 33 – 40.
8. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Устойчивость решений импульсных систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 98 – 111.

Одержано 21.04.99