УДК 517.9

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЕНИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

We obtain conditions for the existence of local differentiable solution of a system of nonlinear functional equations with nonlinear deviations of argument.

Одержано умови існування локального диференційовного розв'язку системи нелінійних функціональних рівнянь з нелінійними відхиленнями аргументу.

Нелинейные функциональные уравнения вида

$$x(t) = f(t, x(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x(t))), \ldots, x(\lambda_p t + \varphi_p(t, x(t)))), \qquad (1)$$

где λ_i, $i=\overline{1,p}$, — вещественные постоянные, $f(t, x_1, \ldots, x_p)$, $\varphi_i(t,x)$, $i=\overline{1,p}$, — вещественные функции вещественных переменных, были объектом исследования многих математиков [1–4]. При этом особенно активно исследовались вопросы существования и единственности локальных непрерывных, дифференцируемых и аналитических решений отдельных классов таких уравнений [5–12]. Основная цель настоящей работы — дальнейшее изучение вопросов существования и единственности локальных решений уравнения (1) и, в частности, установление новых достаточных условий существования и единственности локальных k раз $(k \geq 1)$ непрерывно дифференцируемых и аналитических решений этого уравнения.

1. Исследуем сначала вопрос о существовании непрерывных решений, удовлетворяющих условию Липшица. Для этого предположим выполненными следующие условия:

1) функции $f(t, x_1, \ldots, x_p)$, $\varphi_i(t,x)$, $i=\overline{1,p}$, являются непрерывными, соответственно, в областях $D: |t| \leq a$, $|x_i| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_{ji}| \leq b$, $i=\overline{1,p}$, $D_1: |t| \leq a$, $|x| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq b$ и $f(0,0,\ldots,0)=0$, $\varphi_i(0,0)=0$, $i=\overline{1,p}$;

2) функции $f(t, x_1, \ldots, x_p)$, $\varphi_i(t,x)$, $i=\overline{1,p}$, удовлетворяют условиям Липшица

$$|f(\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p) - f(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_p)| \leq L_0 |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + \sum_{i=1}^{n} L_i |\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i|,$$
$$|\varphi_i(\bar{t}, \bar{x}) - \varphi_i(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}})| \leq l_i' |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l_i'' |\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i|, \quad i=\overline{1,p}, \qquad (2)$$

где L_0, L_i, l_i', l_i'', $i=\overline{1,p}$, — некоторые положительные постоянные, $(\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$, $(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_p) \in D$, $(\bar{t}, \bar{x})$, $(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}) \in D_1$;

3) $0 < \lambda_i < 1$, $i=\overline{1,p}$, $\sum_{i=1}^{p} L_i \lambda_i < 1$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1–3. *Тогда при достаточно малых* l_i', l_i'', $i=\overline{1,p}$, *и* $|t| \leq a_*$ (a_* *— достаточно малая положительная постоянная,* $a_* < a$) *существует единственное непрерывное решение* $x(t)$ *системы уравнений* (1), *удовлетворяющее условию Липшица*

$$|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})| \leq M |\bar{t} - \bar{\bar{t}}|, \qquad (3)$$

где M *— некоторая положительная постоянная,* $|\bar{t}| \le a_*$, $|\bar{\bar{t}}| \le a_*$, *и такое, что* $x(0) = 0$.

Доказательство. Определим последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \dots$, с помощью соотношений

$$x_0(t) = 0,$$

$$x_m(t) = f(t, x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \dots$$
$$\dots, x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t)))), \qquad m = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

и докажем, что при $|t| \le a_*$ и всех $m \ge 1$ выполняются оценки

$$|x_m(\bar{t}) - x_m(\bar{\bar{t}})| \le M|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|, \qquad |\bar{t}| \le a_*, \quad |\bar{\bar{t}}| \le a_*, \tag{5}$$

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le M\theta^{m-1}|t|, \tag{6}$$

где M — некоторая положительная постоянная такая, что $L_0 < M$,

$$0 < \theta = \sum_{i=1}^{p} L_i(\lambda_i + l_i' + 2Ml_i'') < 1, \qquad \lambda_i + l_i' + Ml_i'' \le 1, \quad i = \overline{1, p},$$

$$L_0 M^{-1} + \sum_{i=1}^{p} L_i(\lambda_i + l_i' + Ml_i'') \le 1.$$

Принимая во внимание (4), индукцией по m нетрудно показать, что при всех $m \ge 0$ выполняется равенство $x_m(0) = 0$.

Оценка (5) выполняется, очевидно, при $m = 0, 1$, причем $M > L_0$. Пусть она доказана уже для некоторого $m \ge 1$. Тогда при достаточно малом a_* имеем $|x_m(t)| \le M|t| \le Ma_* \le b$ и в силу условий 2, 3 получаем

$$|\lambda_i t + \varphi_i(t, x_m(t))| \le \lambda_i|t| + |\varphi_i(t, x_m(t)) - \varphi_i(0, 0)| \le$$
$$\le \lambda_i|t| + l_i'|t| + l_i''|x_m(t)| \le (\lambda_i + l_i' + Ml_i'')|t| \le |t|, \qquad i = \overline{1, p}. \tag{7}$$

Следовательно, $|x_m(\lambda_i t + \varphi_i(t, x_m(t))| \le b$ при $|t| \le a_*$ и согласно (4) находим

$$\left|x_{m+1}(\bar{t}) - x_{m+1}(\bar{\bar{t}})\right| =$$
$$= |f(\bar{t}, x_m(\lambda_1\bar{t} + \varphi_1(\bar{t}, x_m(\bar{t}))), \dots, x_m(\lambda_p\bar{t} + \varphi_p(\bar{t}, x_m(\bar{t})))) -$$
$$- f(\bar{\bar{t}}, x_m(\lambda_1\bar{\bar{t}} + \varphi_1(\bar{\bar{t}}, x_m(\bar{\bar{t}}))), \dots, x_m(\lambda_p\bar{\bar{t}} + \varphi_p(\bar{\bar{t}}, x_m(\bar{\bar{t}}))))| \le$$
$$\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + \sum_{i=1}^{p} L_i|x_m(\lambda_1\bar{t} + \varphi_i(\bar{t}, x_m(\bar{t}))) - x_m(\lambda_i\bar{\bar{t}} + \varphi_i(\bar{\bar{t}}, x_m(\bar{\bar{t}})))| \le$$
$$\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + M\sum_{i=1}^{p} L_i(\lambda_i|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + |\varphi_i(\bar{t}, x_m(\bar{t})) - \varphi_i(\bar{\bar{t}}, x_m(\bar{\bar{t}}))|) \le$$
$$\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + M\sum_{i=1}^{p} L_i(\lambda_i|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l_i'|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l_i''M|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|) =$$
$$= M\left(L_0 M^{-1} + \sum_{i=1}^{p} L_i(\lambda_i + l_i' + Ml_i'')\right)|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le M|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|,$$

т. е. оценка (5) сохраняется при переходе от m к $m+1$ и, таким образом, имеет место при всех $m \geq 0$ и $|\bar{t}| \leq a_*$, $|\bar{\bar{t}}| \leq a_*$.

Докажем справедливость оценки (6). Действительно, при $m=1$ имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)| = |f(t, 0, \dots, 0)| \leq L_0 |t|,$$

т. е. оценка (6) имеет место. Предположим ее справедливость для некоторого $m \geq 1$ и покажем, что она сохраняется при переходе от m к $m+1$. В самом деле, принимая во внимание (4), условия 1 – 3 и соотношения (5) – (7), получаем

$$\begin{gathered}
|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \\
\leq |f(t, x_m(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_m(t))), \dots, x_m(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_m(t)))) - \\
- f(t, x_m(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \dots, x_m(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t))))| + \\
+ |f(t, x_m(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \dots, x_m(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t)))) - \\
- f(t, x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \dots, x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t))))| \leq \\
\leq \sum_{i=1}^{p} L_i |x_m(\lambda_i t + \varphi_i(t, x_m(t))) - x_m(\lambda_i t + \varphi_i(t, x_{m-1}(t)))| + \\
+ \sum_{i=1}^{p} L_i |x_m(\lambda_i t + \varphi_i(t, x_{m-1}(t))) - x_{m-1}(\lambda_i t + \varphi_i(t, x_{m-1}(t)))| \leq \\
\leq M \sum_{i=1}^{p} L_i |\varphi_i(t, x_m(t)) - \varphi_i(t, x_{m-1}(t))| + \\
+ M\theta^{m-1} \sum_{i=1}^{p} L_i |\lambda_i t + \varphi_i(t, x_{m-1}(t))| \leq \\
\leq M \sum_{i=1}^{p} L_i l_i'' M \theta^{m-1} |t| + M\theta^{m-1} \sum_{i=1}^{p} L_i (\lambda_i + l_i' + M l_i'') |t| = \\
= M\theta^{m-1} \sum_{i=1}^{p} L_i (\lambda_i + l_i' + 2M l_i'') |t| = M\theta^m |t|.
\end{gathered}$$

Следовательно, оценка (6) выполняется при всех $m \geq 1$ и $|t| \leq a_*$.

Непосредственно из (6) вытекает, что последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \dots,$ определенных соотношениями (4), равномерно сходится при $|t| \leq a_*$ к некоторой непрерывной вектор-функции $x(t) = \lim\limits_{m \to \infty} x_m(t)$. Переходя в (4) и (5) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет системе уравнений (1) и условию Липшица (3). Поскольку $x_m(0) = 0$ при всех $m \geq 0$, то $x(0) = 0$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается показать, что решение $x(t) = \lim\limits_{m \to \infty} x_m(t)$ является единственным. Действительно, пусть существует еще одно непрерывное при $|t| \leq a_*$ решение $y(t)$ системы уравнений (1), удовлетворяющее условию (3), $y(0) = 0$ и $y(t) \neq x(t)$ при $0 < |t| \leq \leq a_*$. Тогда, принимая во внимание уравнение (1), условия 1, 2 и тождество

$$y(t) = f(t, y(\lambda_1 t + \varphi_1(t, y(t))), \dots, y(\lambda_p t + \varphi_p(t, y(t)))),$$

получаем

$$|x(t) - y(t)| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{p} L_i |x(\lambda_i t + \varphi_i(t, x(t))) - x(\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t)))| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} L_i |x(\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t))) - y(\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t)))| \le$$
$$\le M \sum_{i=1}^{p} L_i l_i'' |x(t) - y(t)| + \sum_{i=1}^{p} L_i |x(\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t))) - y(\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t)))|.$$

Полагая в последнем соотношении $x(t) - y(t) = t z(t)$ $\big($в силу (3) функция $z(t) = \big(x(t) - y(t)\big)/t$ является ограниченной при $0 < |t| \le a_*$ $\big(|z(t)| \le \le 2M\big)\big)$, находим

$$|t||z(t)| \le M \sum_{i=1}^{p} L_i l_i'' |t||z(t)| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} L_i |\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t))||z(\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t)))| \le$$
$$\le M \sum_{i=1}^{p} L_i l_i'' |t||z(t)| + \sum_{i=1}^{p} L_i (\lambda_i + l_i' + M l_i'') |t||z(\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t)))|.$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{p} L_i (\lambda_i + l_i' + 2M l_i'') = \theta < 1 \quad \text{и} \quad |\lambda_i t + \varphi_i(t, y(t))| \le |t| \le a_*, \quad i = \overline{1, p},$$

отсюда вытекает

$$|z(t)| \le \theta \|z(t)\|,$$

где $\|z(t)\| = \sup\limits_{0 < |t| \le a_*} |z(t)|$ и, следовательно,

$$\|z(t)\| \le \theta \|z(t)\|,$$

что возможно лишь в случае, когда $x(t) = y(t)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

2. Предположим теперь, что функции $f(t, x_1, \dots, x_p)$ и $\varphi_i(t, x)$, $i = \overline{1, p}$, являются k раз непрерывно дифференцируемыми по всем переменным в областях D, D_1. Рассмотрим вопрос о существовании решений уравнения (1) (случай $n = 1$ рассматривается исключительно с целью упрощения дальнейших выкладок), принадлежащих классу C^k, $k \ge 1$. Поскольку в общем случае ответ отрицателен, то основной нашей целью является отыскание дополнительных условий, гарантирующих существование таких решений.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции* $f(t, x_1, \dots, x_p)$ *и* $\varphi_i(t, x)$, $i = \overline{1, p}$, *принадлежат классу* C^k, $k \ge 1$, *по всем переменным в областях* D, D_1 *и* $f(0, 0, \dots, 0) = 0$;

2) *функции* $\varphi_i(t, x)$, $i = \overline{1, p}$, *и все их частные производные первого порядка по* t, x *обращаются в нуль при* $t = 0$, $x = 0$;

3) $0 < \lambda_i < 1$, $i = \overline{1, p}$,

$$f_{010\ldots0}\lambda_1^j + \ldots + f_{000\ldots01}\lambda_p^j \neq 1, \quad j = 1, \ldots, k,$$

где

$$f_{010\ldots00} = \left.\frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_p)}{\partial x_1}\right|_{t=0,\ x_l=0}, \ \ldots, \ f_{000\ldots01} = \left.\frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_p)}{\partial x_p}\right|_{t=0,\ x_l=0};$$

4) $\theta = |f_{010\ldots00}|\lambda_1^k + \ldots + |f_{000\ldots01}|\lambda_p^k < 1$.

Тогда в некоторой области $D_*: |t| \le a_* < a$ *существует по крайней мере одно решение уравнения* (1), *принадлежащее классу* C^k.

Доказательство. В силу условий 1, 2 в некоторых областях $\bar{D} \subseteq D$, $\bar{D}_1 \subseteq \subseteq D_1$ (далее будем считать $\bar{D} = D$, $\bar{D}_1 = D_1$) функции $f(t, x_1, \ldots, x_p)$ и $\varphi_i(t, x)$, $i = \overline{1, p}$, можно представить в виде

$$f(t, x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_0 + i_1 + \ldots + i_p = 1}^{k} f_{i_0 i_1 \ldots i_p} t^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} + \bar{f}(t, x_1, \ldots, x_p),$$
$$\varphi_i(t, x) = \sum_{j_1 + j_2 = 2}^{k} \varphi_{j_1 j_2}^{i} t^{j_1} x^{j_2} + \bar{\varphi}_i(t, x), \quad i = \overline{1, p}, \tag{8}$$

где $f_{i_0 i_1 \ldots i_p}$, $\varphi^i_{j_1 j_2}$, $i = \overline{1, p}$, — некоторые постоянные, функции $\bar{f}(t, x_1, \ldots, x_p)$, $\bar{\varphi}_i(t, x)$, $i = \overline{1, p}$, принадлежат классу C^k по всем переменным и обращаются в нуль при $t = 0$, $x_l = 0$, $l = \overline{1, p}$, $x = 0$ вместе со всеми своими частными производными порядка $\le k$.

Покажем, что при выполнении условий 1–4 существует такая функция

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i t^i, \tag{9}$$

где C_i — некоторые пока не определенные постоянные, что

$$\gamma(t) - f(t, \gamma(\lambda_1 t + \varphi_1(t, \gamma(t))), \ldots, \gamma(\lambda_p t + \varphi_p(t, \gamma(t)))) = F(t), \tag{10}$$

где функция $F(t)$ принадлежит классу C^k и обращается в нуль при $t = 0$ вместе со всеми своими производными порядка $\le k$. Действительно, принимая во внимание (8), (9), получаем

$$\sum_{i=1}^{k} C_i t^i - \sum_{i_0 + i_1 + \ldots + i_p = 1}^{k} f_{i_0 i_1 \ldots i_p} t^{i_0} \times$$
$$\times \left(\sum_{i=1}^{k} C_i \left(\lambda_1 t + \sum_{j_1 + j_2 = 2}^{k} \varphi^1_{j_1 j_2} t^{j_1} \left(\sum_{i=1}^{k} C_i t^i \right)^{j_2} + \bar{\varphi}_1(t, \gamma(t)) \right)^i \right)^{i_1} \times \ldots$$
$$\ldots \times \left(\sum_{i=1}^{k} C_i \left(\lambda_p t + \sum_{j_1 + j_2 = 2}^{k} \varphi^p_{j_1 j_2} t^{j_1} \left(\sum_{i=1}^{k} C_i t^i \right)^{j_2} + \bar{\varphi}_p(t, \gamma(t)) \right)^i \right)^{i_p}$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} C_i t^i - \sum_{i=1}^{k} (f_{010\ldots00}\lambda_1^i + \ldots + f_{000\ldots01}\lambda_p^i) C_i t^i - \sum_{i=1}^{k} P_i t^i = F(t),$$

где P_i — некоторые многочлены относительно C_j, $j < i$, причем $P_1 = f_{10\ldots 0}$, и $F(t)$ — некоторая функция класса C^k, обращающаяся в нуль при $t = 0$ вместе со всеми своими производными порядка $\leq k$. Следовательно, если в последнем соотношении положить

$$C_i = [1 - (f_{010\ldots 00}\lambda_1^i + \ldots + f_{000\ldots 01}\lambda_p^i)]^{-1} P_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{11}$$

то получим (10).

С помощью соотношений

$$x_0(t) = \gamma(t),$$
$$x_m(t) = f(t, x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \ldots$$
$$\ldots, x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t)))), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

определим последовательность функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, и докажем, что в некоторой области $D_*: |t| \leq a_* < a$ она равномерно сходится к k раз непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению (1). Для простоты рассмотрим случай $k = 1$ (в общем случае доказательство этого утверждения проводится аналогично, а возникающие при этом трудности носят чисто технический характер).

Сначала покажем, что при $|t| \leq a_*$ (a_* — достаточно малая положительная постоянная) и всех $m \geq 0$ выполняются неравенства

$$|x_m(t)| \leq M|t| \leq b, \tag{13}$$
$$|x'_m(t)| \leq M, \tag{14}$$

где $M = \text{const} > 0$.

Действительно, поскольку

$$x'_0(t) = \gamma'(t),$$
$$x'_m(t) = f'_t(t, x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t)))) +$$
$$+ f'_{x_1}(t, x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t)))) \times$$
$$\times x'_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t)))(\lambda_1 + \varphi'_{1t}(t, x_{m-1}(t)) + \varphi'_{1x}(t, x_{m-1}(t))\, x'_{m-1}(t)) + \ldots$$
$$\ldots + f'_{x_p}(t, x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t)))) \times$$
$$\times x'_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t))) \times$$
$$\times (\lambda_p + \varphi'_{pt}(t, x_{m-1}(t)) + \varphi'_{px}(t, x_{m-1}(t)))\, x'_{m-1}(t)), \tag{15}$$

то в силу (9), (11) при $m = 0$ получаем

$$x_0(t) = [1 - (f_{010\ldots 00}\lambda_1 + \ldots + f_{000\ldots 01}\lambda_p)]^{-1} f_{100\ldots 00}\, t,$$
$$x'_0(t) = [1 - (f_{010\ldots 00}\lambda_1 + \ldots + f_{000\ldots 01}\lambda_p)]^{-1} f_{100\ldots 00},$$

т. е. неравенства (13), (14) выполняются при $m = 0$ $\left(M \geq \left|1 - (|f_{010\ldots 0}|\lambda_1 + \ldots \right.\right.$ $\left.\left.\ldots + |f_{00\ldots 01}|\lambda_p)\right|^{-1} |f_{10\ldots 0}|\right)$. Предположим, что (13), (14) справедливы в случае, когда m заменено на $m - 1$. Поскольку $0 < \lambda_i < 1$, $i = \overline{1, p}$, и согласно (8) имеем

$$|f(t, x_1, \ldots, x_p)| \leq |f_{10\ldots 0}||t| + |f_{01\ldots 0}||x_1| + \ldots$$
$$\ldots + |f_{00\ldots 1}||x_p| + l(|t| + |x_1| + \ldots + |x_p|),$$

$$|\varphi_i(t,x)| \le l(|t|+|x|), \quad i=\overline{1,p}, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_i(t,x)}{\partial t^{i_0}\partial x^{i_1}}\right| \le l,$$

$$\left|\frac{\partial f(t,x_1,\ldots,x_p)}{\partial t^{i_0}\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_p^{i_p}}\right| \le |f_{i_0 i_1\ldots i_p}|+l, \quad i_0+i_1+\ldots+i_p=1,$$

где $l=l(a,b)\to 0$ при $a\to 0$, $b\to 0$, то при достаточно малом a_* получаем

$$|\lambda_i t+\varphi_i(t,x_{m-1}(t))| \le \lambda_i|t|+l(|t|+|x_{m-1}(t)|) \le$$
$$\le \lambda_i|t|+l(|t|+M|t|) = (\lambda_i+l(1+M))|t| \le |t|,$$
$$|x_{m-1}(\lambda_i t+\varphi_i(t,x_{m-1}(t)))| \le M|\lambda_i t+\varphi_i(t,x_{m-1}(t))| \le M|t|, \quad i=\overline{1,p}. \tag{17}$$

Тогда в силу (12)–(17) находим

$$|x_m(t)| \le |f_{10\ldots0}||t|+|f_{01\ldots0}|M(\lambda_1+l(1+M))|t|+\ldots$$
$$\ldots+|f_{00\ldots1}|M(\lambda_p+l(1+M))|t|+$$
$$+l(|t|+M(\lambda_1+l(1+M))|t|+\ldots+M(\lambda_p+l(1+M))|t|) \le$$
$$\le [|f_{10\ldots0}|+l+\theta M+(|f_{010\ldots0}|+\ldots+|f_{0\ldots01}|)lM(1+M))+$$
$$+lpM(1+l(1+M))]|t|,$$
$$|x_m'(t)| \le (|f_{10\ldots0}|+l)+(|f_{01\ldots0}|+l)M(\lambda_1+l+lM)+\ldots$$
$$\ldots+(|f_{0\ldots01}|+l)M(\lambda_p+l+lM) \le$$
$$\le |f_{10\ldots0}|+l+[(|f_{010\ldots0}|+l)\lambda_1+\ldots$$
$$\ldots+(|f_{0\ldots01}|+l)\lambda_p]M+lM(1+M)[(|f_{010\ldots0}|+l)+\ldots$$
$$\ldots+(|f_{0\ldots01}|)+l)] \le$$
$$\le |f_{10\ldots0}|+l+\theta M+lpM+(|f_{010\ldots0}|+\ldots$$
$$\ldots+|f_{0\ldots01}|)lM(1+M))+l^2pM(1+M).$$

Если теперь M — некоторая положительная постоянная, удовлетворяющая условию

$$|f_{10\ldots0}|+l+\theta M+(|f_{010\ldots0}|+\ldots$$
$$\ldots+|f_{0\ldots01}|)lM(1+M))+lpM(1+l(1+M)) \le M$$

(поскольку $0<\theta<1$, то при достаточно малом l такая постоянная всегда существует), то из последних соотношений следует

$$|x_m(t)| \le M|t|, \quad |x_m'(t)| \le M.$$

Теперь докажем, что последовательность функций $x_m(t)$, $m=0,1,\ldots$, определенных соотношениями (12), равномерно сходится при $|t|\le a_*$. Для этого достаточно, очевидно, показать, что при $|t|\le a_*$ и всех $m\ge 1$ справедливы неравенства

$$|x_m(t)-x_{m-1}(t)|) \le l\Delta^{m-1}|t|, \tag{18}$$

где $l = l(a_*) \to 0$ при $a_* \to 0$ и $\Delta = (|f_{010\ldots0}| + l)(\lambda_1 + l(1+M)) + \ldots$ $\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)(\lambda_p + l(1+M)) + M(|f_{010\ldots0}| + l)l + \ldots + M(|f_{0\ldots01}| +$ $+ l)l$ (согласно условию 4 теоремы при достаточно малом l имеем $0 < \Delta < 1$).

В силу (10), (12) при $m = 1$ имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)|) =$$

$$= |f(t, \gamma(\lambda_1 t + \varphi_1(t, \gamma(t))), \ldots, \gamma(\lambda_p t + \varphi_p(t, \gamma(t)))) - \gamma(t)| = |F(t)| \leq l|t|,$$

т. е. (18) выполняется. Предположим, что (18) имеет место в случае, когда m заменено на $m-1$. Тогда

$$|x_{m-1}(t)| \leq |\gamma(t)| + \frac{l}{1-\Delta}|t| \leq \left(M + \frac{l}{1-\Delta}\right)|t| \leq b$$

при достаточно малых $|t| \leq a_*$ и согласно (12)–(16) находим

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq$$
$$\leq (|f_{010\ldots0}| + l)|x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t)) -$$
$$- x_{m-2}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-2}(t)))| + \ldots$$
$$\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)|x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t))) -$$
$$- x_{m-2}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-2}(t)))| \leq$$
$$\leq (|f_{010\ldots0}| + l)|x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-1}(t)) -$$
$$- x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-2}(t)))| +$$
$$+ (|f_{010\ldots0}| + l)|x_{m-1}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-2}(t)) -$$
$$- x_{m-2}(\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-2}(t)))| + \ldots$$
$$\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)|x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-1}(t))) -$$
$$- x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-2}(t)))| +$$
$$+ (|f_{0\ldots01}| + l)|x_{m-1}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-2}(t))) -$$
$$- x_{m-2}(\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-2}(t)))| \leq$$
$$\leq (|f_{010\ldots0}| + l)M|\varphi_1(t, x_{m-1}(t)) - \varphi_1(t, x_{m-2}(t))| +$$
$$+ (|f_{010\ldots0}| + l)l\Delta^{m-2}|\lambda_1 t + \varphi_1(t, x_{m-2}(t))| + \ldots$$
$$\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)|M|\varphi_p(t, x_{m-1}(t)) - \varphi_p(t, x_{m-2}(t))| +$$
$$+ (|f_{0\ldots01}| + l)l\Delta^{m-2}|\lambda_p t + \varphi_p(t, x_{m-2}(t))| \leq$$
$$\leq (|f_{010\ldots0}| + l)Ml \cdot l\Delta^{m-2}|t| +$$
$$+ (|f_{010\ldots0}| + l)\, l\Delta^{m-2}(\lambda_1|t| + l(|t| + M|t|)) + \ldots$$
$$\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)Ml \cdot l\Delta^{m-2}|t| +$$
$$+ (|f_{0\ldots01}| + l)\, l\Delta^{m-2}(\lambda_p|t| + l(|t| + M|t|)) \leq$$
$$\leq l\Delta^{m-2}[(|f_{010\ldots0}| + l)(\lambda_1 + l(1+M)) + \ldots$$

$$\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)(\lambda_p + l(1+M)) +$$

$$+ M(|f_{010\ldots0}| + l)l + \ldots + M(|f_{0\ldots01}| + l)l]|t| \le l\Delta^{m-1}|t|.$$

Таким образом, последовательность функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится при достаточно малых $|t| \le a_*$ к $x(t)$. Тогда, переходя в (12) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что предельная функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1), и для завершения доказательства теоремы 2 достаточно проверить, что функции $x'_m(t)$, $m = 0, 1,$ являются равностепенно непрерывными.

Пусть ε — произвольное положительное число. Покажем по индукции, что существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|x'_m(\bar{t}) - x'_m(\bar{\bar{t}})| \le \varepsilon \tag{19}$$

при $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \delta$, $m \ge 0$.

В самом деле, так как

$$x'_0(t) = \gamma'(t) = [1 - (f_{010\ldots0}\lambda_1 + \ldots + f_{0\ldots01}\lambda_p)]^{-1} f_{10\ldots0},$$

то (19) выполняется при $m = 0$. Предположим, что (19) доказано для $m-1$. Обозначим

$$\varepsilon' = \varepsilon\big[1 - \theta[(|f_{010\ldots0}| + \ldots + |f_{0\ldots01}| + pl)M +$$

$$+ (|f_{010\ldots0}| + \ldots + |f_{0\ldots01}|)(1+M) +$$

$$+ \lambda_1 + \ldots + \lambda_p + l(1+M)p]l\big]\big/\big[1 + (|f_{010\ldots0}| + \ldots + |f_{0\ldots01}| + pl)M(1+M) +$$

$$+ M(\lambda_1 + \ldots + \lambda_p + pl(1+M))\big]$$

(так как $0 < \theta < 1$, то при достаточно малом l имеем $\varepsilon' < \varepsilon$).

Поскольку функции

$$\frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^{i_0}\,\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_p^{i_p}}, \quad i_0 + i_1 + \ldots + i_p = 1,$$

$$\frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial t^{i_0}\,\partial x^{i_1}}, \quad i_0 + i_1 = 1, \quad i = \overline{1, p},$$

являются равномерно непрерывными в областях D, D_1, то можно указать положительные постоянные $\delta' = \delta'(\varepsilon)$, $\delta'' = \delta''(\varepsilon)$ такие, что

$$\left|\frac{\partial f(\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)}{\partial t^{i_0}\,\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_p^{i_p}} - \frac{\partial f(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_p)}{\partial t^{i_0}\,\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_p^{i_p}}\right| \le \varepsilon', \quad i_0 + i_1 + \ldots + i_p = 1, \tag{20}$$

при $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \delta'$, $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \le \delta''$, $i = \overline{1, p}$,

$$\left|\frac{\partial \varphi_i(\bar{t}, \bar{x})}{\partial t^{i_0}\,\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \varphi_i(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}})}{\partial t^{i_0}\,\partial x^{i_1}}\right| \le \varepsilon', \quad i_0 + i_1 = 1, \quad i = \overline{1, p}, \tag{21}$$

при $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \delta'$, $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \le \delta''$.

Положим $\delta = \min\left\{\delta', \dfrac{\delta''}{M}\right\}$. Тогда в силу (14), (16), (17) при $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \delta$ имеем

$$
\begin{gathered}
|x_{m-1}(\bar t) - x_{m-1}(\bar{\bar t})| \le M\,|\bar t - \bar{\bar t}| \le \delta'', \\
|x_{m-1}(\lambda_i \bar t + \varphi_i(\bar t, x_{m-1}(\bar t)) - x_{m-1}(\lambda_i \bar{\bar t} + \varphi_i(\bar t, x_{m-1}(\bar{\bar t})))| \le \\
\le M(\lambda_i |\bar t - \bar{\bar t}| + l(|\bar t - \bar{\bar t}| + M|\bar t - \bar{\bar t}|)) \le M\,|\bar t - \bar{\bar t}| \le \delta'', \quad i = \overline{1, p}.
\end{gathered} \tag{22}
$$

Далее, используя соотношения (20)–(22), (14)–(16), при $|\bar t - \bar{\bar t}| \le \delta$ получаем

$$
\begin{gathered}
|x'_m(\bar t) - x'_m(\bar{\bar t})| \le \\
\le |f'_t(\bar t, x_{m-1}(\lambda_1 \bar t + \varphi_1(\bar t, x_{m-1}(\bar t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar t + \varphi_p(\bar t, x_{m-1}(\bar t)))) - \\
- f'_t(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\lambda_1 \bar{\bar t} + \varphi_1(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar{\bar t} + \varphi_p(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))))| + \\
+ |f'_{x_1}(\bar t, x_{m-1}(\lambda_1 \bar t + \varphi_1(\bar t, x_{m-1}(\bar t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar t + \varphi_p(\bar t, x_{m-1}(\bar t))))| \times \\
\times |x'_{m-1}(\lambda_1 \bar t + \varphi_1(\bar t, x_{m-1}(\bar t)))| (|\varphi'_{1t}(\bar t, x_{m-1}(\bar t)) - \varphi'_{1t}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar t))| + \\
+ |\varphi'_{1x}(\bar t, x_{m-1}(\bar t))\, x'_{m-1}(\bar t) - \varphi'_{1x}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))\, x'_{m-1}(\bar{\bar t})|) + \\
+ |f'_{x_1}(\bar t, x_{m-1}(\lambda_1 \bar t + \varphi_1(\bar t, x_{m-1}(\bar t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar t + \varphi_p(\bar t, x_{m-1}(\bar t)))) \times \\
\times x'_{m-1}(\lambda_1 \bar t + \varphi_1(\bar t, x_{m-1}(\bar t))) - \\
- f'_{x_1}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\lambda_1 \bar{\bar t} + \varphi_1(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar{\bar t} + \varphi_p(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t})))) \times \\
\times x'_{m-1}(\lambda_1 \bar{\bar t} + \varphi_1(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t})))| \times \\
\times |\lambda_1 + \varphi'_{1t}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t})) + \varphi'_{1x}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))\, x'_{m-1}(\bar{\bar t})| + \ldots \\
\ldots + |f'_{x_p}(\bar t, x_{m-1}(\lambda_1 \bar t + \varphi_1(\bar t, x_{m-1}(\bar t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar t + \varphi_p(\bar t, x_{m-1}(\bar t)))) \times \\
\times x'_{m-1}(\lambda_p \bar t + \varphi_p(\bar t, x_{m-1}(\bar t)))| (|\varphi'_{pt}(\bar t, x_{m-1}(\bar t)) - \varphi'_{pt}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))| + \\
+ |\varphi'_{px}(\bar t, x_{m-1}(\bar t))\, x'_{m-1}(\bar t) - \varphi'_{px}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))\, x'_{m-1}(\bar{\bar t})|) + \\
+ |f'_{x_p}(\bar t, x_{m-1}(\lambda_1 \bar t + \varphi_1(\bar t, x_{m-1}(\bar t))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar t + \varphi_p(\bar t, x_{m-1}(\bar t)))) \times \\
\times x'_{m-1}(\lambda_p \bar t + \varphi_p(\bar t, x_{m-1}(\bar t))) - \\
- |f'_{x_p}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\lambda_1 \bar{\bar t} + \varphi_1(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))), \ldots, x_{m-1}(\lambda_p \bar{\bar t} + \varphi_p(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t})))) \times \\
\times x'_{m-1}(\lambda_p \bar{\bar t} + \varphi_p(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t})))| \times \\
\times |\lambda_p + \varphi'_{pt}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t})) + \varphi'_{px}(\bar{\bar t}, x_{m-1}(\bar{\bar t}))\, x'_{m-1}(\bar{\bar t})| \le \\
\le \varepsilon' + (|f_{010\ldots0}| + l) M(\varepsilon' + l\varepsilon + M\varepsilon') + \\
+ (M\varepsilon' + (|f_{010\ldots0}| + l)\varepsilon)(\lambda_1 + l + lM) + \ldots \\
\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)|M(\varepsilon' + l\varepsilon + M\varepsilon') + \\
+ (M\varepsilon' + (|f_{0\ldots01}| + l)\varepsilon)(\lambda_p + l + lM) = \\
= [1 + (|f_{010\ldots0}| + l) M(1 + M) + M(\lambda_1 + l(1 + M)) + \ldots \\
\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l) M(1 + M)) + M(\lambda_p + l(1 + M))]\,\varepsilon' +
\end{gathered}
$$

$$+ [(|f_{010\ldots0}| + l)Ml + (|f_{010\ldots0}| + l)(\lambda_1 + l(1+M)) + \ldots$$
$$\ldots + (|f_{0\ldots01}| + l)Ml + (|f_{0\ldots01}| + l)(\lambda_p + l(1+M))]\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Следовательно, неравенство (19) имеет место при $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \delta$ и всех $m \ge 0$. Из (14) и (19) непосредственно вытекает, что существует подпоследовательность последовательности $x'_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходящаяся при $|t| \le a_*$. Отсюда следует, что функция $x(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t)$ принадлежит классу C^1 при $|t| \le a_*$. Теорема 2 доказана.

3. Изучению вопросов существования и единственности аналитических решений уравнений вида (1) посвящены многочисленные исследования [2, 8, 11, 12]. Тем не менее, в настоящее время говорить о создании теории аналитических решений таких уравнений не приходится. Объясняется это прежде всего тем, что между отдельными классами уравнений вида (1) существуют принципиальные отличия, требующие разработки специфических методов доказательства соответствующих теорем существования. В силу этого особое значение приобретает разработка методов, пригодных для доказательства теорем существования и единственности аналитических решений широких классов уравнений вида (1). Один из таких методов разработан в настоящей работе при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции* $f(t, x_1, \ldots, x_p)$, $\varphi_i(t, x)$, $i = \overline{1, p}$, *разлагаются в ряды*

$$f(t, x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_p=1}^{\infty} f_{i_0 i_1 \ldots i_p} t^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p},$$
$$\varphi_i(t, x) = \sum_{i_0+i_1=2}^{\infty} \varphi^i_{i_0 i_1} t^{i_0} x^{i_1}, \quad i = \overline{1, p}, \tag{23}$$

сходящиеся в некоторых областях $D: |t| < a$, $|x_i| < b$, $i = \overline{1, p}$, *и* $D_1: |t| < a$, $|x| < b$ *соответственно*;

2) $0 < \lambda_i < 1$, $i = \overline{1, p}$,

$$f_{010\ldots0}\lambda_1^j + \ldots + f_{0\ldots01}\lambda_p^j \ne 1, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Тогда существует единственное решение $x(t)$ *уравнения* (1) *в виде ряда*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i t^i, \tag{24}$$

сходящегося при $|t| \le a_*$, *где* a_* *— достаточно малая положительная постоянная* $(a_* < a)$.

Доказательство. Покажем сначала, что уравнение (1) имеет формальное решение в виде ряда (24). Действительно, подставляя (23), (24) в (1), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i t^i = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_p=1}^{\infty} f_{i_0 i_1 \ldots i_p} t^{i_0} \times$$
$$\times \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i \left(\lambda_1 t + \sum_{j_0+j_1=2}^{\infty} \varphi^1_{j_0 j_1} t^{j_0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i t^i \right)^{j_1} \right)^i \right)^{i_1} \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i \left(\lambda_p t + \sum_{j_0+j_1=2}^{\infty} \varphi^p_{j_0 j_1} t^{j_0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i t^i \right)^{j_1} \right)^i \right)^{i_p}.$$

Если теперь выполнить в правой части известные формальные преобразования (умножения и сложения рядов) и приравнять коэффициенты при t^i, $i = 1, 2, \ldots$, то получим рекуррентную последовательность уравнений для C_i, $i = 1, 2, \ldots$:

$$C_1 = (f_{010\ldots0}\lambda_1 + \ldots + f_{0\ldots01}\lambda_p)C_1 + f_{10\ldots0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_i = (f_{010\ldots0}\lambda_1^i + \ldots + f_{0\ldots01}\lambda_p^i)C_i + P_i(C_1, \ldots, C_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots,$$

где $P_i(C_1, \ldots, C_{i-1})$, $i \geq 2$, — некоторые многочлены относительно всех своих аргументов с коэффициентами, выражающимися через $f_{i_0 i_1 \ldots i_p}$, $i_0 + i_1 + \ldots + i_p \leq i$, λ_j, $\varphi^j_{j_0 j_1}$, $j_0 + j_1 \leq i$, $j = \overline{1, p}$, с помощью одних лишь операций сложения и умножения. Отсюда (согласно условию 2) непосредственно следует

$$C_1 = [1 - (f_{010\ldots0}\lambda_1 + \ldots + f_{0\ldots01}\lambda_p)]^{-1} f_{10\ldots0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (25)$$

$$C_i = [1 - (f_{010\ldots0}\lambda_1^i + \ldots + f_{0\ldots01}\lambda_p^i)]^{-1} P_i(C_1, \ldots, C_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots.$$

Таким образом, ряд (24), коэффициенты C_i, $i = 1, 2, \ldots$, которого определяются соотношениями (25), является формальным решением уравнения (1). Поскольку коэффициенты ряда (24) однозначно определяются соотношениями (25) и, следовательно, решений вида (24) может существовать не более одного, то для завершения доказательства теоремы достаточно доказать сходимость ряда (24) с коэффициентами (25).

В силу условия 2 существует такое целое положительное число r, что выполняется неравенство

$$(|f_{010\ldots0}| + \ldots + |f_{0\ldots01}|)\lambda^r < 1, \qquad (26)$$

где $\lambda = \max\{\lambda_i, \ i = \overline{1, p}\}$. Это неравенство заведомо выполняется (при любом $r \geq 0$) в случае $|f_{010\ldots0}| + \ldots + |f_{0\ldots01}| < 1$, который, для простоты, рассмотрим далее.

Согласно условию 1 существует положительная постоянная M такая, что при $|t| \leq a_1 < a$, $|x_i| \leq b_1 < b$, $i = \overline{1, p}$, имеем

$$|f(t, x_1, \ldots, x_p)| \leq M,$$

$$|f_{i_0 i_1 \ldots i_p}| \leq \frac{M}{a_1^{i_1} b_1^{i_1 + \ldots + i_p}}, \quad i_0 + i_1 + \ldots + i_p \geq 1,$$

$$|\varphi_i(t, x)| \leq M, \quad |\varphi^i_{i_0 i_1}| \leq \frac{M}{a_1^{i_0} b_1^{i_1}}, \quad i_0 + i_1 = 2, \quad i = \overline{1, p}.$$

Тогда функции

$$\bar{f}(t, x_1, \ldots, x_p) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{t}{a_1}\right)\left(1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_p}{b_1}\right)} - M =$$

$$= \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_p=1}^{\infty} \bar{f}_{i_0 i_1 \ldots i_p} t^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p},$$

$$\bar{\varphi}(t,x) = \frac{M}{\left(1-\frac{t}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{b_1}\right)} - M - \frac{M}{a_1}t - \frac{M}{b_1}x = \sum_{i_0+i_1=2}^{\infty} \bar{\varphi}_{i_0 i_1} t^{i_0} x^{i_1}, \tag{27}$$

являются мажорантами для функций $f(t, x_1, \ldots, x_p)$ и $\varphi_i(t,x)$, $i=\overline{1,p}$, при $|t| < a_1$, $|x_1 + \ldots + x_p| < b_1$ и при $|t| < a_1$, $|x| < b_1$ соответственно.

Рассмотрим теперь „мажорантное" уравнение

$$\bar{x}(t) = q\bar{x}(\lambda t + \bar{\varphi}(t,\bar{x})) + \frac{M}{\left(1-\frac{t}{a_1}\right)\left(1-\frac{p\bar{x}(\lambda t + \bar{\varphi}(t,\bar{x}))}{b_1}\right)} -$$

$$- M - \frac{M}{a_1} p\bar{x}(\lambda t + \bar{\varphi}(t,\bar{x})), \tag{28}$$

где $q = |f_{010\ldots0}| + \ldots + |f_{0\ldots01}|$.

Поскольку $1 - q\lambda^i > 0$, $i = 0, 1, \ldots$, то, принимая во внимание (27), можно аналогично (24) показать, что уравнение (28) имеет формальное решение в виде ряда

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_i t^i, \tag{29}$$

причем коэффициенты $\bar{C}_i > 0$ и определяются единственным образом с помощью формул

$$\bar{C}_1 = (1-q\lambda)^{-1}\frac{M}{a_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{30}$$
$$\bar{C}_i = (1-q\lambda^i)^{-1}\bar{P}_i(\bar{C}_1,\ldots,\bar{C}_{i-1}), \quad i=2,3,\ldots,$$

где $\bar{P}_i(\bar{C}_1,\ldots,\bar{C}_{i-1})$ — полиномы $P_i(C_1,\ldots,C_{i-1})$ из (25), в которых вместо C_j стоит $\bar{C}_j$, а вместо $f_{i_0 i_1 \ldots i_p}$, $\varphi^i_{i_0 i_1}$, λ_i, $i=\overline{1,p}$, — $\bar{f}_{i_0 i_1 \ldots i_p}$, $\bar{\varphi}_{i_0 i_1}$, λ. Поскольку $|1 - (f_{010\ldots0}\lambda_1^i + \ldots + f_{0\ldots01}\lambda_p^i)| \geq 1 - q\lambda^i$, $i = 1, 2, \ldots$, то из (25), (30) непосредственно вытекает

$$|C_i| \leq \bar{C}_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Согласно [12, с. 238–239], ряд (29) с коэффициентами (30) сходится при $|t| \leq \rho$ (ρ — некоторая положительная постоянная, $\rho < a$). Следовательно, ряд (24) с коэффициентами (25) также сходится при $|t| \leq \rho$. Теорема 3 доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 3 в общем случае (выполняется условие (26)) следует сначала выполнить замену переменных

$$x(t) = y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} C_i t^i,$$

где C_i, $i = 1, \ldots, r-1$, определяются формулами (25). Получаемое в результате уравнение

$$y(t) = f\left(t, y\left(\lambda_1 t + \varphi_1\left(t, y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} C_i t^i\right)\right) +\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{r-1} C_i \left(\lambda_1 t + \varphi_1\left(t, y(t) + \sum_{j=1}^{r-1} C_j t^j\right)\right)^i, \ldots$$

$$\ldots, y\left(\lambda_p t + \varphi_p\left(t, y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} C_i t^i\right)\right) +$$

$$\left.+ \sum_{i=1}^{r-1} C_i \left(\lambda_p t + \varphi_p\left(t, y(t) + \sum_{j=1}^{r-1} C_j t^j\right)\right)^i\right) - \sum_{i=1}^{r-1} C_i t^i$$

имеет формальное решение в виде ряда

$$y(t) = \sum_{i=r}^{\infty} C_i t^i,$$

причем коэффициенты C_i, $i = r, r+1, \ldots$, определяются формулами (25) и доказательство его сходимости проводится аналогично тому, как была доказана теорема в случае $q < 1$.

1. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1974. – 119 с.
2. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. – Warszawa: PWN, 1968. – 384 p.
3. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative functional equations, Encyclopedia of Mathematics and its applications 32. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – 362 p.
4. *Baron K., Jarczyk W.* Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems. – Silesian Univ. Press, 1999. – 39 p.
5. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 174 с.
6. *Кучко Л. П.* Локальная разрешимость функциональных уравнений и существование инвариантных многообразий // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 2. – С. 327–339.
7. *Hartman P.* On local homeomorphism of Euclidean spaces // Bol. Soc. mat. mexic. – 1960. – **5**. – P. 220–241.
8. *Moser J.* The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point // Communs Pure and Appl. Math. – 1956. – **9**. – P. 673–692.
9. *Sternberg S.* On the behavior of invariant curves near a hyperbolic point of a surface transformation // Amer. J. Math. – 1955. – **77**. – P. 526–534.
10. *Urabe M.* Invariant varieties for finite transformation // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. – 1952. – **16**. – P. 47–55.
11. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 2. – С. 304–312.
12. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. – 392 с.

Получено 28.05.99,
после доработки — 10.02.2000