УДК 519.21

І. К. Мацак (Держ. ун-т технологій та дизайну, Київ),
А. М. Плічко (Пед. ун-т, Кіровоград)

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ІДЕАЛАХ ПОРЯДКОВО ОБМЕЖЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ БАНАХОВИХ ГРАТОК

For a sequence of independent random elements belonging to ideal of order bounded elements of the Banach lattice, we investigate asymptotic relative stability of extremes, the law of large numbers for p-th degrees, and the central limit theorem.

Для послідовності незалежних випадкових елементів із ідеалу порядково обмежених елементів банахової гратки досліджується асимптотична відносна стійкість екстремальних значень, закон великих чисел для p-х степенів та центральна гранична теорема.

Нехай E — банахова гратка з нормою $\|\cdot\|$ і модулем $|\cdot|$, X — випадковий елемент (в. е.) із значеннями в E. Для довільних елементів $x_1, \ldots, x_n \in E$ мають зміст вирази $\sup_{1 \le k \le n} x_k$ та $\left(\sum_1^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$ (див. [1]). Тому для послідовності (X_n) незалежних копій X природно ввести і дослідити величини

$$Z_n = \sup_{1 \le k \le n} X_k \quad \text{та} \quad Z_n^{(p)} = \left(\sum_1^n |X_k|^p\right)^{1/p}.$$

У сепарабельній банаховій гратці ці величини будуть борелівськими випадковими елементами [2].

У цій роботі наводяться умови, при яких виконуються наступні асимптотичні співвідношення: майже напевне (м. н.) при $n \to \infty$

$$\frac{Z_n}{b_n} \xrightarrow{\text{м. н.}} \mathfrak{S}X, \tag{1}$$

$$\frac{Z_n^{(p)}}{n^{1/p}} \xrightarrow{\text{м. н.}} \mathfrak{S}_p X, \tag{2}$$

де $\xrightarrow{\text{м. н.}}$ означає збіжність майже напевне в нормі простору E, $\mathfrak{S}X$, $\mathfrak{S}_p X$ — деякі ненульові елементи в E, а b_n — числова послідовність.

За аналогією до одновимірного випадку співвідношення (1) називатимемо відносною стійкістю м. н. послідовності Z_n, а (2) — законом великих чисел (ЗВЧ) для p-х степенів. Окрім співвідношень (1), (2) вивчаються умови виконання центральної граничної теореми (ЦГТ). А саме, при $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} G, \tag{3}$$

де через $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ позначаємо слабку збіжність розподілів в. е., G — гауссівський в. е. в E, $S_n = \sum_1^n X_k$.

Якщо задача узагальнення одновимірних результатів для схеми сум S_n на банахові простори в останні 25 років інтенсивно вивчалась [3, 4], то робіт, в яких би досліджувались умови виконання рівностей (1), (2) в нескінченновимірному випадку, нам відомо зовсім мало [2, 5, 6]. Асимптотична поведінка екстремальних значень та ЗВЧ для випадкових величин (в. в.) на дійсній прямій вивчені досить докладно (див. [7, 8] і наведену там бібліографію).

Надалі через E_+ позначатимемо множину додатних елементів банахової гратки E, а через $E_{(u)}$ — ідеал, породжений елементом $u \in E_+$, тобто $E_{(u)} = \{x \in E : \exists \lambda > 0, \ |x| \leq \lambda u\}$. Тоді

$$\|x\|_u = \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \lambda u\}$$

буде нормою в $E_{(u)}$.

Основна умова, при якій вивчатимуться співвідношення (1) – (3), така: $X \in E_{(u)}$ м. н. для деякого $u \in E_+$, або, що те ж саме, м. н.

$$\|x\|_u < \infty. \tag{4}$$

Наведемо ще деякі означення і позначення з теорії банахових граток. Підмножина A банахової гратки E називається порядково обмеженою, якщо існує таке $u > 0$, що $|x| \leq u$ для кожного $x \in A$.

Говорять, що банахова гратка E σ-повна, якщо для довільної порядково обмеженої послідовності (x_n), $x_n \in E$, існують точні верхня $\sup_{n \geq 1} x_n$ та нижня $\inf_{n \geq 1} x_n$ межі.

Прикладами σ-повних банахових граток можуть бути банахові гратки, які є спряженими до інших банахових граток. Зокрема, рефлексивна банахова гратка буде σ-повною. σ-Повною граткою буде будь-який функціональний простір Кете (означення див. нижче). Гратка $C[0, 1]$ не σ-повна [1, с. 4].

Банахова гратка E називається σ-порядково неперервною, якщо для кожної спадної послідовності $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$

$$\inf_{n \geq 1} x_n = 0 \Rightarrow \|x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Важливим прикладом банахової гратки є функціональний простір Кете. Наведемо його означення. Нехай (T, Λ, μ) — повний σ-скінченний вимірний простір. Функціональним простором Кете E на T називається банахів простір (класів еквівалентності) локально інтегровних функцій на (T, Λ, μ), для якого виконуються наступні умови:

i) якщо $|x(t)| \leq |y(t)|$ майже скрізь, $x(t)$ вимірна і $y \in E$, то $x \in E$, причому $\|x\| \leq \|y\|$;

ii) для множини $A \in \Lambda$ з $\mu(A) < \infty$ характеристична функція $I(A) = \{I(t, A), t \in T\}$ належить E.

Прикладами функціональних просторів Кете можуть бути класичні простори $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, а також банахів простір з безумовним базисом (в еквівалентній нормі).

Надалі використовуватимемо наступне відоме твердження.

Твердження 1. *Кожна сепарабельна σ-повна банахова гратка буде σ-порядково неперервною* [1, с. 7] *і порядково ізометричною до деякого функціонального простору Кете* [1, с. 29].

Банахова гратка E називається q-вгнутою, $1 \leq q < \infty$, якщо існує така стала $D_{(q)} < \infty$, що для будь-якого скінченного набору елементів $(x_i)_1^n \subset E$ виконується нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq D_{(q)} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1/q} \right\|.$$

Вона задовольняє нижню q-оцінку, якщо існує така стала $C_{(q)} < \infty$, що для будь-якого скінченного набору попарно диз'юнктних елементів $(x_i)_1^n \subset E$ виконується нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{1/q} \le C_{(q)}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|.$$

q-Вгнута банахова гратка має нижню q-оцінку, отже, її норма q-порядково неперервна [1, с. 83]. Якщо, крім цього, міра μ сепарабельна, то q-вгнутий простір Кете E буде сепарабельним [9, с.93].

Говорять, що банахів простір E містить рівномірно l_∞^n, якщо існує така послідовність n-вимірних підпросторів $E_n \subset E$, що відстань Банаха–Мазура $d\left(E_n, l_\infty^n\right) \to 1$ при $n \to \infty$. Кожна банахова гратка, що не містить рівномірно l_∞^n, буде q-вгнутою при деякому $q < \infty$ [1, с. 85, 91].

1. Спочатку встановимо рівність (1) у гауссівському випадку для функціональних просторів Кете з σ-порядково неперервною нормою. Коли X — центрований (тобто $\mathrm{M}X = 0$) гауссівський в. е., то існують усі моменти його норми: $\mathrm{M}\|X\|^k < \infty$, $0 < k < \infty$ [3, с. 257, 258], і тому існуватиме середнє квадратичне відхилення в. е. X

$$\mathfrak{S}X = (\pi/2)^{1/2}\,\mathrm{M}|X|. \tag{5}$$

Оскільки для стандартної гауссівської числової в. в. γ маємо $\mathrm{M}\gamma = 0$, $\mathrm{M}\gamma^2 = 1$, $\mathrm{M}|\gamma| = (\pi/2)^{-1/2}$, то для простору Кете це означення збігається із звичайним $\mathfrak{S}X = \left\{\sigma(t) = \left(\mathrm{M}|X(t)|^2\right)^{1/2},\ t \in T\right\}$.

Теорема 1. *Нехай E — сепарабельний простір Кете з σ-порядково неперервною нормою, X — центрований гауссівський в. е. в E і виконується умова* (4). *Тоді послідовність Z_n відносно стійка м. н., тобто виконується рівність* (1) *з*

$$b_n = \begin{cases}(2\ln(n))^{1/2}, & n \ge 3,\\ 1, & n < 3,\end{cases} \qquad \mathfrak{S}X \ \textit{задається рівністю (5).}$$

Доведення. Оскільки існує вимірний ізоморфізм з (T, Λ, μ) на деякий вимірний простір (S, Σ, ν) з $\nu(S) = 1$, який зберігає множини нульової міри, то можна вважати, що $\mu(T) = 1$. Покажемо, що

$$\mu\left\{t \in T\colon \lim_{n\to\infty}\frac{Z_n(t)}{b_n} = \sigma(t)\right\} = 1 \quad \text{м. н.} \tag{6}$$

і існує такий в. е. $Y \in E$, що для всіх $n \ge 1$

$$\left|\frac{Z_n(t)}{b_n}\right| \le Y(t) \quad \text{м. н.} \tag{7}$$

Оскільки в просторі Кете з σ-порядково неперервною нормою виконується абстрактний аналог теореми Лебега про мажоровну збіжність [10, с. 72], то з (6), (7) випливатиме (1).

Відносна стійкість м. н. для дійсних гауссівських в. в. відома [7, с. 203]. Таким чином, для кожного $t \in T$ м. н.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z_n(t)}{b_n} - \sigma(t)\right| = 0.$$

Звідси за теоремою Фубіні маємо: м. н.

$$\mu\left\{t \in T: \lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z_n(t)}{b_n} - \sigma(t)\right| = 0\right\} = 1,$$

отже, умову (6) виконано.

Оскільки $X \in E_{(u)}$, то м. н.

$$|X| \le \tau u, \quad \tau = \|X\|_u. \tag{8}$$

Розглядаючи гауссівський в. е. X в нормованому просторі $E_{(u)}$, отримуємо [4, с. 59; 11, с. 120]

$$\mathbb{P}(\tau > s) \le C_1 \exp\left(-C_2 s^2\right), \tag{9}$$

де C_1, C_2 — деякі константи, залежні лише від кореляційного оператора в. е. X. Покладемо

$$\tau_n = \|X_n\|_u, \quad n \ge 1, \quad \tau_\infty = \sup_{n\ge 1}\left(\frac{\tau_n}{b_n}\right).$$

Тоді, врахувавши (8), отримаємо: м. н.

$$\left|\frac{Z_n}{b_n}\right| \le \sup_{1\le i\le n}\left(\frac{\tau_i}{b_i}\right)u \le \tau_\infty u. \tag{10}$$

Неважко показати, що в. в. τ_∞ обмежена м. н. Справді, τ_n — незалежні копії τ, а з оцінки (9) випливає, що при $s > 1$

$$\mathbb{P}(\tau_\infty > s) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n > s b_n) \le C_3 s^2 \exp\left(-C_4 s^2\right)$$

(див. лему 2 з [2]). Звідси і з (10) випливає обмеженість послідовності (Z_n / b_n), тобто умова (7) також виконується.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $X = (\eta_n)$ — *гауссівський в. е. у просторі* $E = c_0$, $\mathbb{M}\eta_n = 0$, $\mathbb{M}\eta_n^2 = \sigma_n^2$, $\mathfrak{S}X = (\sigma_n) \in c_0$. *Тоді виконується рівність* (1) *з* b_n *із теореми* 1.

Доведення. Як відомо, для послідовності в. в. $\eta_n \to 0$ м. н. при $n \to \infty$ існує послідовність додатних чисел $u_n \to 0$ така, що $\eta_\infty = \sup_{n\ge 1}|\eta_n / u_n| < \infty$ м. н. (див. [12, с. 59]). Звідси видно, що для гауссівського в. е. X в c_0 існує додатний елемент $u = (u_n) \in c_0$ і обмежена в. в. η_∞ такі, що м. н. $|X| \le \eta_\infty u$, тобто $X \in c_{0(u)}$, що з урахуванням теореми 1 завершує доведення наслідку 1 (c_0 — простір Кете з σ-порядково неперервною нормою).

Наведемо аналог теореми 1 для одного класу абстрактних банахових граток.

***Наслідок* 2.** *Нехай* E — *сепарабельна* σ-*повна банахова гратка,* X — *центрований гауссівський в. е. в* E *і виконується умова* (4). *Тоді послідовність* Z_n *відносно стійка м. н., тобто виконується рівність* (1) *з* b_n *із теореми* 1, *а* $\mathfrak{S}X$ *задається рівністю* (5).

Доведення. Справді, оскільки порядкова ізометрія зберігає порядок, точні верхню й нижню грані, а також неперервна, то наслідок 2 випливає з твердження 1 та теореми 1.

***Зауваження* 1.** З результатів роботи [2] та твердження 1 випливає, що в сепарабельній банаховій гратці, яка не містить рівномірно l_∞^n, рівність (1) справедлива для будь-якого центрованого гауссівського в. е.

Відзначимо без доведення ще один результат про відносну стійкість м. н. послідовності (Z_n).

Твердження 2. *Якщо E — банахів простір з безумовним базисом (e_n), $X = \sum_n \eta_n \sigma_n e_n$ — гауссівський в. е. у просторі E, $\mathbb{M}\eta_n = 0$, $\mathbb{M}\eta_n^2 = 1$, $\mathfrak{S}X = \sum_n \sigma_n e_n \in E$ і компоненти η_n незалежні, то виконується рівність* (1).

Відомі нам результати про відносну стійкість м. н. (1) дають можливість зробити наступне припущення.

Гіпотеза. *У сепарабельній банаховій гратці для кожного центрованого гауссівського в. е. X виконується рівність* (1).

2. Розглянемо ЗВЧ для p-х степенів (2). Далі X — довільний (не обов'язково гауссівський) в. е. у банаховій гратці E. Покладемо

$$\mathfrak{S}_p X = \left\{\sigma_p(t) = \left(\mathbb{M}|X(t)|^p\right)^{1/p},\ t \in T\right\}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай E — сепарабельний простір Кете з σ-порядково неперервною нормою, X — центрований в. е. в E, для якого виконується умова* (4) *і*

$$\mathbb{M}\|X\|_u^p < \infty. \tag{11}$$

Тоді для X має місце ЗВЧ для p-х степенів (2).

Доведення. Знову вважаємо $\mu(T) = 1$. Як і в теоремі 1, потрібно перевірити умови

$$\mu\left\{t \in T:\ \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n^{(p)}(t)}{n^{1/p}} = \sigma_p(t)\right\} = 1 \quad \text{м. н.}$$

та для всіх $n \ge 1$ м. н.

$$\left|\frac{Z_n^{(p)}(t)}{n^{1/p}}\right| \le Y(t), \quad t \in T. \tag{12}$$

Оскільки за умовами (4), (11)

$$|X(t)| \le \|X\|_u u \tag{13}$$

і існує $\sigma_p(t)$, то згідно з ЗВЧ Колмогорова [8, с. 337] для кожного $t \in T$ м. н.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z_n^{(p)}(t)}{n^{1/p}} - \sigma_p(t)\right| = 0.$$

Знову скориставшись теоремою Фубіні, отримуємо

$$\mu\left\{t \in T:\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z_n^{(p)}(t)}{n^{1/p}} - \sigma_p(t)\right| = 0\right\} = 1 \quad \text{м. н.}$$

Залишилось перевірити існування в. е. $Y \in E$, для якого виконується (12). Але з означення величини $Z_n^{(p)}(t)$ і (13) маємо

$$\frac{\left|Z_n^{(p)}(t)\right|}{n^{1/p}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i(t)\|_u^p\right)^{1/p} u(t) \le \eta^{1/p} u(t),$$

де

$$\eta = \sup_{n\ge 1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i(t)\|_u^p\right).$$

Із оцінки (11) та ЗВЧ Колмогорова випливає м. н.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i(t)\|_u^p = \mathbb{M}\|X(t)\|_u^p < \infty.$$

Звідси $\eta < \infty$ м. н. і, поклавши $Y(t) = \eta^{1/p} u(t)$, одержимо (12).

Нагадаємо, що в. е. X у банаховому просторі E називається передгауссівським, якщо існує гауссівський в. е. $G(X)$ в E такий, що X та $G(X)$ мають один кореляційний оператор. Для центрованого передгауссівського в. е. X означимо середнє квадратичне відхилення рівністю

$$\mathfrak{S}X = \mathfrak{S}_2 X = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \mathrm{M}|G(X)|. \tag{14}$$

Оскільки сепарабельна σ-повна банахова гратка порядково ізометрична до деякого простору Кете (твердження 1), а $S\mathfrak{S}X = \mathfrak{S}SX$ для лінійної ізометрії S, то маємо такі результати.

Наслідок 3. *Якщо X — передгауссівський центрований в. е. у сепарабельній σ-повній банаховій гратці, виконуються умови* (4) *і* (11) *при* $p = 2$, *то має місце ЗВЧ для квадратів* ($p = 2$) (2) *з* $\mathfrak{S}_2 X$, *визначеним рівністю* (14).

Наслідок 4. *Нехай X — передгауссівський центрований в. е. у сепарабельній σ-повній банаховій гратці E і існує $u \in E$ такий, що*

$$|X| \le u \quad \textit{м. н.} \tag{15}$$

Тоді має місце ЗВЧ для квадрата ($r = 2$) (2) $\mathfrak{S}_2 X$, *визначеним рівністю* (14).

У роботі [6] для q-вгнутих просторів Кете встановлено ЗВЧ для квадратів. Аналіз доведення цього результату показує, що він може бути узагальнений наступним чином.

Твердження 3. *Нехай E — сепарабельний q-вгнутий простір Кете,* $1 \le \le p \le q < \infty$ *і при деякому* $r > q$ $\sigma_r(t) \in E$. *Тоді виконується ЗВЧ для p-х степенів* (2).

3. Розглянемо ЦГТ (3). Почнемо з одного результату роботи [6], який будемо використовувати далі:

Для сепарабельного q-вгнутого ($q < \infty$) простору Кете E і центрованого в. е. X умова

$$\sigma_q(t) \in E \tag{16}$$

достатня для справедливості ЦГТ (3).

Теорема 3. *Нехай E — сепарабельний q-вгнутий* ($q < \infty$) *простір Кете і X — центрований в. е. у E, для якого виконуються умови* (4) *та* (11) *при* $p = = 2$. *Тоді справедлива* ЦГТ (3) *і при* $n \to \infty$

$$\mathrm{M}\left\|\frac{S_n}{n^{1/2}}\right\|^2 \to \mathrm{M}\|G\|^2. \tag{17}$$

Доведення. Спершу доведемо теорему при додатковій умові

$$|X| \le cu \quad \text{м. н.}, \tag{18}$$

де $c > 0$ — невипадкова константа. Із (18) маємо $\mathfrak{S}_q X \le cu$, але $u \in E$, тому й $\mathfrak{S}_q X \in E$.

Таким чином, виконується умова (16) і X задовольняє ЦГТ (3).

Для фіксованого $\lambda > 0$ покладемо

$$X^{(\lambda)} = \begin{cases} X & \text{при } \|X\|_u \le \lambda; \\ 0 & \text{при } \|X\|_u > \lambda, \end{cases}$$

$$X_i^{(\lambda)} = \begin{cases} X & \text{при } \|X_i\|_u \le \lambda; \\ 0 & \text{при } \|X_i\|_u > \lambda, \end{cases}$$

$$M^{(\lambda)} = \mathrm{M} X^{(\lambda)}, \qquad S_n^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^{(\lambda)} - M^{(\lambda)}\right).$$

Позначивши через $I(A)$ характеристичну функцію множини A, з означення маємо

$$\left|X_i^{(\lambda)}\right| \le \lambda u, \qquad \left|X^{(\lambda)}\right| \le \lambda u,$$

$$\left|M^{(\lambda)}\right| = \left|\mathrm{M} X^{(\lambda)} - \mathrm{M} X\right| = \left|\mathrm{M} I\left(\|X\|_u > \lambda\right) X\right| \le$$

$$\le |u| \mathrm{M} I\left(\|X\|_u > \lambda\right) \|X\|_u. \tag{19}$$

При умові (11) і $p = 2$ $X^{(\lambda)} - M^{(\lambda)}$ задовольняє оцінку (18) і для нього виконується ЦГТ (3). За відомим результатом Піз'є [4, с. 278] для в. е. X виконуватиметься ЦГТ (3), якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \lambda > 0$ таке, що

$$\sup_{n \ge 1} \frac{\mathrm{M}\left\|S_n - S_n^{(\lambda)}\right\|}{n^{1/2}} < \varepsilon. \tag{20}$$

Для перевірки (20) скористаємось відомою оцінкою [13]

$$C^{-1} \mathrm{M} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(|Y_i|^2\right)^{1/2} \right\| \le \mathrm{M} \left\| \sum_{i=1}^{n} Y_i \right\| \le C \mathrm{M} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(|Y_i|^2\right)^{1/2} \right\|,$$

яка справедлива для q-вгнутої банахової гратки, $q < \infty$, і незалежних в. е. Y_i, $\mathrm{M} Y_i = 0$. З останньої нерівності та (19) маємо

$$\frac{\mathrm{M}\left\|S_n - S_n^{(\lambda)}\right\|}{n^{1/2}} \le C \mathrm{M} \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left|X_i - X_i^{(\lambda)} + M^{(\lambda)}\right|^2 \right)^{1/2} \right\| \le$$

$$\le C_1 \mathrm{M} \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I\left(\|X_i\|_u > \lambda\right) \left|X_i^{(\lambda)}\right|^2 + \left|M^{(\lambda)}\right|^2 \right)^{1/2} \right\| \le$$

$$\le C_1 \mathrm{M} \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I\left(\|X_i\|_u > \lambda\right) \|X_i\|_u^2 |u|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\mathrm{M} I\left(\|X\|_u > \lambda\right) \|X\|_u\right)^2 |u|^2 \right)^{1/2} \right\| \le$$

$$\le C_1 \|u\| \left(\mathrm{M} I\left(\|X\|_u > \lambda\right) \|X\|_u^2 + \left(\mathrm{M} I\left(\|X\|_u > \lambda\right) \|X\|_u\right)^2 \right)^{1/2}.$$

При $p = 2$ оцінка (11) дає

$$\mathrm{M} I\left(\|X\|_u > \lambda\right) \|X\|_u^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,$$

звідки випливає нерівність (20).

Збіжність моментів (17) випливає з відомих загальних результатів.

Наслідок 5. *Нехай E — сепарабельна банахова гратка, яка не містить рівномірно l_∞^n, X — центрований в. е. в E, для якого виконуються умови* (4) *і* (11) *при* $p = 2$. *Тоді справедлива ЦГТ* (3) *і виконується* (17).

Доведення. Згідно з твердженням 1 гратка E буде ізометричною до деякого сепарабельного простору Кете, що не містить рівномірно l_∞^n. Оскільки банахова гратка, що не містить рівномірно l_∞^n, буде q-вгнутою при деякому $q < \infty$, то можна застосувати теорему 3.

У роботі [14] для кожного банахового простору, який містить рівномірно l_∞^n, побудовано приклад обмеженого за нормою передгауссівського в. е., для якого не виконується ЦГТ.

Виявляється, що навіть у деяких банахових просторах, які мають одночасно тип $2-\delta$ і котип $2+\delta$, $\delta > 0$, існують обмежені передгауссівські в. е., для яких не виконується ЦГТ [15]. Нагадаємо, що банахів простір B має тип p для деякого $1 \le p \le 2$, відповідно котип q для деякого $q > 2$, якщо існує така стала $C < \infty$, що для будь-якого скінченного набору елементів (x_i) з B

$$\mathrm{M}\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \le C\left(\sum_1^n \|x_i\|^p \right)^{1/p},$$

відповідно

$$\mathrm{M}\left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\| \ge C\left(\sum_1^n \|x_i\|^q \right)^{1/q},$$

де (ε_i) — послідовність незалежних симетричних в. в. Бернуллі.

Наступний результат показує, що в банаховій гратці при заміні обмеженості за нормою на порядкову обмеженість умови виконання ЦГТ можна значно послабити.

Твердження 4. *Нехай E — сепарабельна банахова гратка, а X — центрований в. е. в E. Тоді:*

i) *якщо E не містить рівномірно l_∞^n і існує $u \in E_+$ такий, що виконана умова* (15), *то X задовольняє ЦГТ* (3) *і для кожного $1 \le p < \infty$ при $n \to \infty$*

$$\mathrm{M}\left\| \frac{S_n}{n^{1/2}} \right\|^p \to \mathrm{M}\|G\|^p;$$

ii) *якщо E містить рівномірно l_∞^n, то існує передгауссівський центрований в. е. X із значеннями в E і невипадковий елемент $u \in E_+$ такі, що виконана умова* (15), *але X не задовольняє ЦГТ* (3).

Доведення. Твердження i) міститься в наслідку 5.

Доведемо твердження ii). Якщо E містить рівномірно l_∞^n, то очевидно він не має жодного скінченного котипу. Тому він не задовольняє жодну нижню q-оцінку [1, с. 88]. Отже, для будь-яких ε і n існує набір $(x_i)_1^n$ попарно диз'юнктних елементів з E такий, що

$$\max_{1 \le i \le n} |a_i| \le \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \le (1+\varepsilon) \max_{1 \le i \le n} |a_i|$$

для будь-якого набору чисел $(a_i)_1^n$ [1, с. 91]. Оскільки для будь-якого диз'юнктного набору

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n a_i |x_i| \right|,$$

то всі x_i можна вважати невід'ємними.

Точно такими ж міркуваннями, як і в [16], звідси виводиться існування для будь-якої збіжної до нуля послідовності додатних чисел α_k такої послідовності додатних елементів $x_k \in E$, що $\|x_k\| = \alpha_k$ і ряд $\sum x_k$ безумовно збігається.

Нехай $\alpha_k = 1/\ln\ln\ln(k+15)$ — послідовність незалежних в. в. (ξ_k) таких, що $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = \mathbb{P}(\xi_k = -1) = 1/\ln(k+7)$ і $\mathbb{P}(\xi_k = 0) = 1 - 2/\ln(k+7)$. Покладемо

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i.$$

В [14] показано, що в. е. X — передгауссівський і не задовольняє ЦГТ. Покладемо

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Очевидно,

$$|X| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = u,$$

тобто умова (15) виконується.

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. – Berlin: Springer, 1979. – Vol. 2. – 243 p.
2. *Мацак І. К., Плічко А. М.* Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1999. – Вип. 61. – С. 108–119.
3. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
4. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. – Berlin: Springer, 1991. – 480 p.
5. *Мацак І. К.* Гранична теорема для максимуму гауссівських випадкових величин у просторі *C* // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №7. – С. 1006–1008.
6. *Matsak I. K., Plichko A. M.* Bochner mean square deviation and law of large numbers for squares of random elements (to appear).
7. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 414 с.
9. *Функциональный* анализ. СНБ (Под ред. С. Г. Крейна). – М.: Наука, 1972. – 544 с.
10. *Бухвалов А. В. и др.* Векторные решетки и интегральные операторы. – Новосибирск: Наука, 1992. – 214 с.
11. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. – Киев: ТВіМС, 1995. – 246 с.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
13. *Мацак И. К., Пличко А. Н.* Неравенство Хинчина и асимптотическое поведение сумм $\sum \varepsilon_n x_n$ в банаховых решетках // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №5. – С. 639–644.
14. *Chobanyan S. A., Tarieladze V. I.* A counterexample concerning the CLT in Banach spaces // Lect. Notes Math. – 1978. – **656**. – P. 25–30.
15. *Ledoux M.* A remark on the central limit theorem in Banach spaces // Ibid. – 1984. – **1080**. – P.144–151.
16. *Раков С. А.* О банаховых пространствах, для которых теорема Орлича не верна // Мат. заметки. – 1973. – **14**. – С. 101–106.

Одержано 14.01.99