УДК 517.53

Ф. Г. Абдуллаев (Мерсин. ун-т, Турция)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО ПЛОЩАДИ ПОЛИНОМОВ В ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. II

We investigate polynomials, which are orthonormal with weight with respect to area of a domain with quasiconformal boundary. We obtain new exact estimates of the rate of growth of these polynomials.

Досліджуються поліноми, ортонормальні з вагою по площі області із квазіконформною межею. Отримано нові точні оцінки швидкості зростання цих поліномів.

1. Определения и обозначения. Постановка задачи. Пусть G — конечная односвязная область, σ — двумерная мера Лебега, h — весовая функция из $L^1(G, d\sigma)$ и для всех $z \in G$ $h(z) > 0$. Если $p \geq 1$ и $f \in L^p(G, h\,d\sigma)$, то

$$\|f\|_{p,h} = \|f\|_p := \left(\iint\limits_G |f(z)|^p h(z)\, d\sigma(z) \right)^p.$$

π_n — линейное пространство полиномов степени не выше n, $\pi^p_{n,h,G} = \pi^p_{n,h} = \pi^p_n$ — пространство π_n с нормой из $L^p(G, h\,d\sigma)$. Аналогично для $S \subseteq C$ и функции f, заданной на S,

$$\|f\|_{\infty,S} = \|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| : z \in S\}.$$

Наделяя этой нормой π_n, получаем нормированное пространство $\pi^\infty_{n,S} = \pi^\infty_n$.

В настоящей работе исследуется скорость роста ортонормированных полиномов K_n

$$\deg K_n = n, \qquad \iint K_i(z)\overline{K_j(z)}\, h(z)\, d\sigma(z) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Далее будем считать, что $L = \partial G$ — квазиконформная кривая, а весовая функция имеет вид

$$h(z) = h_0(z) \prod_{i=1}^m |z - z_i|^{\gamma_i}, \tag{1}$$

где $\{z_i\}_{i=1}^m$ — фиксированный набор точек на L, $\gamma_j > -2$ при $i = 1, \ldots, m$, причем $h_0(z)$ — равномерно отграничена от нуля в G

$$\exists\, c_1 > 0 \qquad \forall z \in G: \;\; h_0(z) \geq c_1. \tag{2}$$

Будем использовать следующие обозначения: пусть $\delta > 0$ и $z \in C$, тогда

$$D(z,\delta) := \{\xi : |\xi - z| < \delta\}, \qquad D := D(0,1),$$
$$\Delta(z,\delta) := \operatorname{ext} D(z,\delta) = \{\xi : |\xi - z| > \delta\}, \qquad \Delta := \operatorname{ext} D,$$
$$\Omega := \operatorname{ext} G, \qquad \Omega(z,\delta) := \Omega \bigcap D(z,\delta);$$

Φ — конформное и однолистное отображение Ω на Δ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$.

Определение 1. *Область G принадлежит классу $Q_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m}$, где $0 < \beta_i \leq \alpha \leq 1$ при $i = 1, \ldots, m$, если:*

i) для любой последовательности попарно не пересекающихся кругов $\{D(z_i, \delta_i)\}_{i=1}^m$ *ограничение функции* Φ *на* $\Omega(z_i, \delta_i)$ *принадлежит* $\operatorname{Lip}\beta_i$, *а ограничение*

$$\left(\Phi \,\middle|\, \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \Omega(z_i, \delta_i)\right) \in \operatorname{Lip}\alpha\,;$$

ii) существует конечная последовательность попарно не пересекающихся кругов $\{D(z_i, \delta_i^*)\}_{i=1}^m$ *такая, что* $\forall\, i = 1, \ldots, m$, $\forall\, \xi, z \in \Omega(z_i, \delta_i^*)$ *при* $z \neq z_i \neq \xi$ *выполняется неравенство*

$$|\Phi(z) - \Phi(\xi)| \leq k_i(\xi, z)\,|\xi - z|^{\alpha}, \tag{3}$$

где

$$k_i(\xi, z) = k \max\left(|\xi - z|^{\beta_i - \alpha}, |z - z_i|^{\beta_i - \alpha}\right), \tag{4}$$

а k *— положительная постоянная, не зависящая от* i, ξ *и* z.

Запись $G \in \mathcal{Q}_\alpha$ означает, что $\Phi \in \operatorname{Lip}\alpha$. Если $\beta_i = \alpha$ при $i = 1, \ldots, m$, то $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m} = \mathcal{Q}_\alpha$. Отметим, что в определении 1 и в формуле (1) фигурирует одна и та же последовательность особых точек $\{z_i\}_{i=1}^m$.

Для удобства приведем, в несколько иной формулировке, необходимый результат из [1].

Рассмотрим последовательность линейных операторов

$$I_{n,h}\colon \pi_{n,h}^2 \to \pi_{n,L}^{\infty}, \qquad \forall\, p \in \pi_n\colon\ I_{n,h}(p) = p$$

с нормами

$$\|I_{n,h}\| := \sup\{\|p\|_{\infty,L}\colon\ p \in \pi_n,\ \|p\|_{2,h} \leq 1\}.$$

Теорема. *Пусть* $G \in \mathcal{Q}_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m}$, *где* $\frac{1}{2} \leq \beta_i \leq \alpha \leq 1$ *и при всех* $i = 1, \ldots, m$

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\beta_i}{\alpha}. \tag{5}$$

Тогда

$$\exists\, c_2 > 0 \qquad \forall\, n \in N\colon\ \|I_{n,h}\| \leq c_2 n^{1/\alpha}. \tag{6}$$

Следствие 1. *Если выполняются условия теоремы, то*

$$\exists\, c_3 > 0 \qquad \forall\, n \in N\colon\ \|K_n\|_{\infty,L} \leq c_3 n^{1/\alpha}, \tag{7}$$

в частности, при $\alpha = 1$ *из* (6) *и* (7) *следует, что*

$$\exists\, c_4 > 0 \qquad \forall\, n \in N\colon\ \|I_{n,h}\| \leq c_4 n, \tag{8}$$

$$\exists\, c_5 > 0 \qquad \forall\, n \in N\colon\ \|K_n\|_{\infty,L} \leq c_5 n. \tag{9}$$

Замечание 1. Выражения типа (6) – (9) будем записывать, используя знак порядкового неравенства $(a_n \preccurlyeq b_n) \Leftrightarrow (\exists\, c \quad \forall\, n \in N\colon\ a_n \leq c\, b_n)$; кроме того, $a_n \asymp b_n$ означает, что $a_n \preccurlyeq b_n$ и $b_n \preccurlyeq a_n$. В дальнейшем условие (5) будем называть условием *интерференции особенностей* веса и контура.

Настоящую работу можно рассматривать как попытку дать ответ на следующие вопросы.

В какой мере точны неравенства (6) – (9)? Если они не точны, то как их можно уточнить? Что изменится при нарушении условия интерференции особенностей?

2. Основные результаты. Начнем со следующего простого модельного случая.

Утверждение 1. *Пусть* $G = D$, $h(z) \equiv 1$. *Тогда*

$$\| I_{n,h} \| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(n+1)(n+2)}. \tag{10}$$

Таким образом, $\| I_{n,h} \| \asymp n$, а значит, (6) и (8) в общем случае неулучшаемы. Однако при $G = D$ и $h(z) \equiv 1$

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \quad \text{и} \quad \| K_n \|_\infty = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \asymp n^{1/2},$$

т. е. в модельном случае показатель степени на $\frac{1}{2}$ меньше, чем в (9):

$$\| K_n \|_\infty \asymp n^{-1/2} \| I_n \|. \tag{11}$$

Следовательно, в некоторых случаях неравенства (7) и (9) можно заменить соответственно на

$$\| K_n \|_\infty \preccurlyeq n^{1/\alpha - 1/2}, \quad \| K_n \|_\infty \preccurlyeq n^{1/2}. \tag{12}$$

Обсудим возможность такой замены в общей ситуации.

Пусть μ — положительная борелевская мера с компактным носителем S, содержащим бесконечное число точек. Как и выше, определяем последовательность полиномов $K_{n,\mu}$ и операторов $I_{n,\mu}$. При этих общих условиях справедливо следующее.

Утверждение 2. *Если при некотором* $\beta \geq 0$ *имеет место порядковое неравенство* $\| K_{n,\mu} \|_{\infty, S} \preccurlyeq n^\beta$, *то* $\| I_{n,\mu} \| \preccurlyeq n^{\beta + 1/2}$.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$\exists\, \xi \in S: \quad \| K_{n,\mu} \|_{\infty, S} \asymp | K_{n,\mu}(\xi) |, \tag{13}$$

и для некоторого $\beta \geq 0$

$$\| K_{n,\mu} \|_{\infty, S} \asymp n^\beta. \tag{14}$$

Тогда

$$\| I_{n,\mu} \|_{\infty, S} \asymp n^{\beta + 1/2}. \tag{15}$$

Следствие 2. Если выполнены условия (13), (14) *и для некоторого* α *выполняется неравенство* $\| I_{n,\mu} \| \preccurlyeq n^\alpha$, *то* $\alpha \geq \beta + 1/2$.

Таким образом, если (13), (14) выполнено, то (7) и (9) действительно можно заменить на (12). К сожалению, неизвестно, имеет ли место (13), (14) для областей достаточно общего вида, например произвольных квазикругов и весовых функций вида (1), однако это действительно так в простых случаях. Предположим, что $\mu = \sigma$ в области G, ограниченной кривой $L \in C(1, \alpha)$, $\alpha > 1 \cdot 2$. В силу известной асимптотической формулы [2, с. 23] при всех $z \in L$

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, \Phi'(z)\, \Phi^n(z) [1 + O(n^{1-2\alpha})].$$

Условия (13), (14), очевидно, выполняются, причем в (13) в качестве точки ξ можно принять любую, в которой достигается $\max_{z \in L} |\Phi'(z)|$.

Имеются основания предполагать, что (13) будет выполняться, если у весовой функции h одна из особых точек z_i будет нулем достаточно высокого порядка. Обратимся к модельному примеру.

Утверждение 3. *Пусть* $G = D$, $h(z) = |z-1|^2$. *Тогда*

$$K_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi(n+1)(n+2)(n+3)}} \sum_{j=0}^{n} (j+1) z^j (1 + z + \ldots + z^{n-j}), \tag{16}$$

$$\| K_n \|_\infty = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}, \tag{17}$$

$$\| I_n \| = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}. \tag{18}$$

Таким образом, и в этом случае справедливо (11). Сформулируем соответствующий результат в квазикруге.

Теорема 2. *Пусть* $G \in Q_\alpha$, $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$, *и каждая из особых точек* z_i, $1 \le i \le m$, *является нулем весовой функции* $h(z)$ (*т. е. все* $\gamma_i > 0$). *Тогда найдется постоянная* $c_6 > 0$ *такая, что для любой последовательности многочленов* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *таких, что* $p_n \in \pi_n$, $\|p_n\|_{2,h} \le 1$, *выполняется неравенство*

$$\max_{z \in \overline{G}} \left(|p_n(z)| \prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{\gamma_i/2} \right) \le c_6 n^{1/\alpha}, \tag{19}$$

а в каждой точке z_i, $1 \le i \le m$,

$$|p_n(z_i)| \le c_6 n^{S_i}, \tag{20}$$

где

$$S_i = \frac{2+\gamma_i}{2\alpha}. \tag{21}$$

***Следствие* 3.** *Предположим, что* (13), (14) *выполняются, если в качестве* ξ *рассмотреть одну из особых точек* z_{i_0}. *Тогда*

$$\| K_n \|_{\infty, L} \preccurlyeq n^{S_{i_0} - 1/2}, \tag{22}$$

$$\max_{z \in \overline{G}} \left(|K_n(z)| \prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{\gamma_i/2} \right) \preccurlyeq n^{\delta}, \tag{23}$$

где

$$\delta = \min\left(\frac{1}{\alpha}; S_{i_0} - \frac{1}{2} \right). \tag{24}$$

Как показывает утверждение 3, в неравенствах (20) и (22) показатели степени S_{i_0} и $S_{i_0} - \frac{1}{2}$, вообще говоря , нельзя заменить меньшим числом.

3. Доказательства и леммы. ***Доказательство утверждения* 1.** Пусть $p_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ — произвольный полином степени n. Простые вычисления показывают, что

$$\| p_n \|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i^2| \frac{\pi}{i+1} \right)^{1/2}. \tag{25}$$

Очевидно

$$\|p_n\|_\infty \le \sum_{i=0}^{n} |a_i|. \tag{26}$$

Используя неравенство Коши и (25), видим, что

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=0}^{n} (\sqrt{i+1})^2 \right)^{1/2} \sqrt{\pi} \left(\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{|a_i|}{\sqrt{i+1}} \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(n+1)(n+2)}\, \|p_n\|_2. \tag{27}$$

Таким образом,

$$\|I_n\| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(n+1)(n+2)}.$$

Однако если $p_n(z) = \sum_{i=0}^{n} (i+1) z^i$, то в (26), (27) неравенства переходят в равенства. Утверждение 1 доказано.

Пусть μ — положительная борелевская мера, а $S := \operatorname{supp} \mu$ — компактное множество, содержащее бесконечное число точек. Положим

$$Q_{n,\mu}(\xi, z) := \sum_{i=0}^{n} \overline{K_{i,\mu}(\xi)}\, K_{i,\mu}(z).$$

В пространстве $\pi_{n,\mu}^2$ ядро $Q_{n,\mu}$ играет роль керн-функции Бергмана [3, с. 44]. В частности, $Q_{n,\mu}$ имеет свойство восстановления

$$\forall p \in \pi_n, \quad \forall \xi \in C: \quad p(\xi) = \int_S p(z) \overline{Q_{n,\mu}(\xi, z)}\, d\mu(z). \tag{28}$$

В самом деле, раскладывая p в ряд Фурье по системе $\{K_{i,\mu}\}_{i=0}^{n}$

$$p(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i K_{i,\mu}(\xi), \tag{29}$$

видим, что

$$a_i = \int_S p(z) \overline{K_{i,\mu}(z)}\, d\mu(z). \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), получаем (28).

Пусть $B_{n,\mu} = \{p \in \pi_{n,\mu}^2 : \|p\|_{2,\mu} = 1\}$.

Лемма 1. *Для любой точки* $\xi \in C$ *экстремальная задача*

$$|p(\xi)| \to \max, \quad p \in B_{n,\mu},$$

имеет с точностью до фазовых множителей $e^{i\alpha}$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$, *единственное решение*

$$p_0(z) := \frac{Q_{n,\mu}(\xi, z)}{(Q_{n,\mu}(\xi, \xi))^{1/2}}. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\max\{\,|p(\xi)| : p \in B_{n,\mu}\} = p_0(\xi) = (Q_{n,\mu}(\xi, \xi))^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^{n} |K_{i,\mu}(\xi)|^2 \right)^{1/2}. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $p \in B_{n,\mu}$ и ξ — фиксированная точка $\boldsymbol{C}$. Применим неравенство Коши – Буняковского к скалярному произведению в правой части (28)

$$|p(\xi)| \leq \|p\|_{2,\mu}\|Q_{n,\mu}(\xi,\cdot)\|_{2,\mu} = \|Q_{n,\mu}(\xi,\cdot)\|_{2,\mu}. \tag{33}$$

Согласно равенству Парсеваля и (31) имеем

$$\|Q_{n,\mu}(\xi,\cdot)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{i=0}^{n}|K_{i,\mu}(\xi)|^2\right)^{1/2} = |p_0(\xi)|. \tag{34}$$

Следовательно,

$$\forall p \in B_{n,\mu}, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{C}: \quad |p(\xi)| \leq |p_0(\xi)|.$$

Осталось заметить, что $p_0 \in B_{n,\mu}$. В самом деле, в силу (31) и (34)

$$|p_0|_{2,\mu} = \frac{1}{(Q_{n,\mu}(\xi,\xi))^{1/2}}\|Q_{m,\mu}(\xi,\cdot)\|_{2,\mu} = 1.$$

Равенство (32) доказано. Утверждение о единственности решения экстремальной задачи легко получить, анализируя возможность равенства в (33) [4, с. 168].

Замечание 2. Двойственную экстремальную задачу для керн-функции Бергмана можно найти в [3, с. 41].

Используя лемму 1, легко установить утверждение 2.

Доказательство утверждения 2. Пусть, как и выше, $S = \operatorname{supp}\mu$. По предположению существует $c_7 > 0$ для всех целых неотрицательных n такое, что

$$\max\{\,|K_{n,\mu}(z)|: \ z \in S\} \leq c_7(n+1)^{\beta}.$$

В силу (32)

$$\|I_{n,\mu}\| = \max_{z\in S}\left(\sum_{i=0}^{n}|K_{i,\mu}(z)|^2\right)^{1/2} \leq c_7\left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{2\beta}\right)^{1/2}. \tag{35}$$

Оценив сумму в правой части

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{2\beta} \leq \int_{1}^{n+1}(x+1)^{2\beta}\,dx \leq \frac{(n+2)^{2\beta+1}}{2\beta+1} \preccurlyeq n^{2\beta+1}$$

и подставив оценку в (35), получим

$$\|I_{n,\mu}\| \preccurlyeq n^{\beta+1/2}.$$

Доказательство теоремы 1. Учитывая утверждение 2, достаточно проверить, что из (13), (14) и неравенства $\|K_{n,\mu}\|_{\infty,S} \succcurlyeq n^{\beta}$ следует

$$\|I_{n,\mu}\| \succcurlyeq n^{\beta+1/2}. \tag{36}$$

В силу леммы 1

$$\forall \xi \in \boldsymbol{S}: \quad \|I_{n,\mu}\| \geq \left(\sum_{i=0}^{n}|K_{i,\mu}(\xi)|^2\right)^{1/2}.$$

Выбирая ξ в соответствии с (13) и используя (14), получаем (36) в виде

$$\|I_{n,\mu}\| \succcurlyeq \left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{2\beta}\right)^{1/2} \geq \left(\int_{0}^{n}(x+1)^{2\beta}\,dx\right)^{1/2} \succcurlyeq n^{\beta+1/2}.$$

Простым следствием леммы 1 является и утверждение 3.

***Доказательство утверждения* 3.** Формула (16), которая дает явный вид многочленов, ортонормированных в круге с весом $h(z) = |1-z|^2$, доказана в работе П. К. Суетина [3, с. 76]. Из (16) непосредственно видим, что

$$\|K_n\|_\infty = K_n(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi(n+1)(n+2)(n+3)}}\sum_{i=0}^{n}(i+1)(n-i+1),$$

откуда после простых преобразований получаем (17). Использовав лемму 1 и (17), получим

$$\|I_n\| = \left(\sum_{i=0}^{n}|K_i(1)|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)(i+2)(i+3)\right)^{1/2},$$

откуда с учетом формулы

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

(см., например, [5, с. 592]) следует (18).

Так же, как в [1], продолжим Φ до квазиконформного гомеоморфизма C на C. Тогда $\Phi(G) = D$ и для $0 < u < 1$ можно рассматривать линии уровня:

$$\begin{aligned} L_u^* &:= \{z:\ |\Phi(z)| = 1-u\}, \\ L_u &:= \{z:\ |\Phi(z)| = 1+u\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Пусть $\{z_i\}_{i=1}^m$ — особые точки весовой функции $h(z)$, $\{\nu_i\}_{i=1}^m$ — набор фиксированных неотрицательных действительных чисел. Положим

$$\chi(z) := \prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\nu_i}, \qquad G_u := \operatorname{int} L_u,$$

где $0 < u < 1$.

Лемма 2. *Существует постоянная* $c_8 > 0$ *такая, что при* $n \geq 2$ *для любого множества* $M \subseteq \overline{G}_{1/n}$ *и любого* $p \in \pi_n$

$$\sup_{z\in M}|\chi(z)\,p(z)| \leq c_8 \max_{z\in L_{1/n}^*}|\chi(z)\,p(z)|. \tag{38}$$

***Замечание* 3.** Постоянная c_8 не зависит от n, M и p; $G_{1/n}$ — конечная область с границей $L_{1/n}$.

Перед тем, как доказать лемму 2, установим аналог леммы Бернштейна – Уолша [6, с. 77] для субгармонических функций вида

$$p(z) = b\prod_{i=1}^{k}|z-b_i|^{\theta_i}, \tag{39}$$

где k — натуральное число, θ_i, b_i — неотрицательные действительные числа, а $b_i \in C$. Положим $\theta_p := \sum_{i=1}^{k}\theta_i$.

Пусть O — регулярная (для задачи Дирихле) область, $\infty \in O$, $E := C \setminus O$ — компакт, дополняющий O до C, $G(z)$ — функция Грина области O с полюсом в бесконечности.

Лемма 3. *Для любой субгармонической функции* $p(z)$ *вида* (39) *и всех* $z \in O \setminus \{\infty\}$ *при любом* $d \geq \theta_p$ *выполняется неравенство*

$$p(z) \leq \left(\max_{\xi \in E} p(\xi) \right) \exp(dG(z)). \tag{40}$$

Доказательство. Очевидно достаточно доказать (40) при $d = \theta_p$. Функция

$$f(z) := \ln p(z) - \ln\left(\max_{\xi \in E} p(\xi) \right) - \theta_p G(z)$$

субгармонична в $O \setminus \{\infty\}$ и гармонична в $O \cap \Delta(0, R)$ при $R > \max\limits_{1 \leq i \leq k} |b_i|$. Поскольку функция $(G(z) - \ln|z|)$ ограничена при $z \to \infty$ [7, с. 267], то $f(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки. Из теоремы об устранимых особенностях гармонических функций [8, с. 54] следует, что $f(z)$ продолжается до субгармонической в O. В силу регулярности O на ∂O имеет место равенство $G(z) \equiv 0$ и, следовательно, $f(z) \leq 0$. По принципу максимума тогда и всюду в O $f(z) \leq 0$, что эквивалентно (40).

Вернемся к формулам (37). При $u \in (0, 1/2]$ обозначим через Φ_u конформное и однолистное отображение $\operatorname{ext} L_u^*$ на Δ, нормированное условиями $\Phi_u(\infty) = \infty$, $\Phi_u'(\infty) > 0$.

Лемма 4. *Существует постоянная* $c_9 > 0$ *такая, что*

$$\forall\, u \in \left(0; \frac{1}{2}\right], \quad \forall\, z \in L_u: \ |\Phi_u(z)| \leq 1 + c_9 u. \tag{41}$$

Доказательство см. в [9, с. 21].

***Замечание* 4.** Постоянная c_9 не зависит от $u \in (0; 1/2]$.

Теперь легко установить справедливость леммы 2.

***Доказательство леммы* 2.** В силу принципа максимума для субгармонических функций (38) достаточно установить при $M = L_{1/n} = \partial G_{1/n}$.

Пусть $p_n \in \pi_n$, $n \geq 2$, и

$$p(z) := \chi(z)\,|p_n(z)|.$$

Тогда $p(z)$ — функция вида (39) и

$$\theta_p = \deg p_n + \sum_{i=1}^{m} \nu_i.$$

Будем считать, что $\deg p_n = n$. В этом случае

$$\theta_p = n\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \nu_i\right) \leq c_{10} n, \tag{42}$$

где $c_{10} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \nu_i$. Положим в лемме 3 $O = \operatorname{ext} L_{1/n}^*$, $d = \theta_p$. Для области O функция Грина с полюсом ∞ имеет вид

$$G(z) = \ln|\Phi_{1/n}(z)|.$$

В силу (41), (42) при всех $z \in L_{1/n}$

$$\exp(dG(z)) = \exp(\theta_p \ln|\Phi_{1/n}(z)|) \le \left(1 + c_9 \frac{1}{n}\right)^{\theta_p} \le \left(1 + c_9 \frac{1}{n}\right)^{c_{10} n}.$$

Последняя величина равномерно ограничена некоторой постоянной, которую можно принять за c_8. Следовательно, при наших предположениях из (40) следует (38).

Замечание 5. Поскольку множество $\{p_n \in \pi_n \colon \deg p_n = n\}$ всюду плотно при любом выборе нормы в π_n, то (38) достаточно проверить при $\deg \pi_n = n$, что оправдывает принятые при доказательстве допущения.

Лемма 2 и оценки, полученные в [1], позволяют установить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $p > 1$, $G \in Q_{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m}$; $\frac{1}{2} \le \beta_i \le \alpha \le 1$ *при* $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$, $h(z)$ *удовлетворяет условиям* (1), (2), *а в каждой особой точке* $z_i \in L$

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} > \frac{\beta_i}{\alpha}. \tag{43}$$

Тогда существует $c_{11} > 0$ *такая, что для любой последовательности многочленов* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяющих условиям* $p_n \in \pi_n$ *и* $\|p_n\|_{p,h,G} \le 1$, *имеет место неравенство*

$$\max_{z \in \overline{G}} \left(|p_n(z)| \prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{\mu_i} \right) \le c_{11} n^{2/(\alpha p)}, \tag{44}$$

где

$$\mu_i = \frac{2 + \gamma_i}{p} - \frac{2}{p} \frac{\beta_i}{\alpha}; \tag{45}$$

а в точках z_i, $i = 1, \ldots, m$,

$$|p_n(z_i)| \le c_{11} n^{S_i}, \tag{46}$$

где

$$S_i = \frac{2 + \gamma_i}{p \beta_i}. \tag{47}$$

Следствие 4. *Если* $p = 2$, $G \in Q_\alpha$ *и* $\gamma_i > 0$ *для* $i = 1, \ldots, m$, *то выполняются неравенства* (19), (20).

Замечание 6. Из условия $\frac{1}{2} \le \beta_i \le \alpha \le 1$ следует, что (43) всегда выполняется при $\gamma_i > 0$, может выполняться при подходящих α и β_i, если $0 \ge$ $\ge \gamma_i > -1$ и не выполняться при $\gamma_i \le -1$. Неравенство (43) можно называть условием „алгебраического нуля".

Доказательство теоремы 3. В силу (43) и (45) все $\mu_i > 0$ при $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$. Следовательно, согласно теореме о монодромии [10, с. 498] существует ограниченная в $\overline{G}$ голоморфная в G функция $g(z)$, для которой

$$|g(z)| = \prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{\mu_i}.$$

Пусть $p_n \in \pi_n$ и $\|p_n\|_{p,h,G} \le 1$. Положим $f_n(z) = p_n(z) g(z)$. Тогда при всех $z \in G$

$$f_n(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f(z)\,Y_{\bar{\xi}}}{(Y(\xi)-z)^2}\,d\sigma(\xi), \tag{48}$$

где Y — квазиконформное отражение относительно кривой L, $\xi = \eta + i\zeta$,

$$Y_{\bar{\xi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + i\frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right)$$

(подробности см. в [11, с. 107]).

Пусть

$$h^*(z) = h_0(z)\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\gamma_i^*},$$

где $h_0(z)$ — функция из (1), а

$$\gamma_i^* = \frac{2\beta_i}{\alpha} - 2. \tag{49}$$

Из (48) и неравенства Гельдера следует, что при всех $z \in G$

$$|f_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{|f(z)|(h^*(\xi))^{1/p}|Y_{\bar{\xi}}|}{(h^*(\xi))^{1/p}|Y(\xi)-z|^2}\,d\sigma(z) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\iint\limits_G |p_n(\xi)|^p\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{p\mu_i}\,h^*(\xi)\,d\sigma(\xi)\right)^{1/p}\left(\iint\limits_G \frac{|Y_{\bar{\xi}}|^q(h^*(\xi))^{1-q}}{|Y(\xi)-z|^{2q}}\,d\sigma(\xi)\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. С учетом (49) и (45) находим

$$h(z) = h^*(\xi)\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{p\mu_i}.$$

Как видим, первый интеграл в правой части последнего неравенства есть $\|p_n\|_{p,h,G} \le 1$. Для h^* выполняются „условия интерференции особенностей" (5), и, следовательно, (см. [1], формула (3.3)), при $z \in L^*_{1/n}$ второй интеграл оценивается по порядку величиной $n^{2/(\alpha p)}$. Таким образом, существует $c_{12} > 0$ такая, что

$$\max_{z\in L^*_{1/n}}\left(p_n(z)\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right) \le c_{12}\,n^{2/(\alpha p)}. \tag{50}$$

Положив в лемме 2 $M = L$ и воспользовавшись (50), получим (44).

Осталось доказать неравенство (46). Сделаем это, например, при $i = 1$. Пусть $d_{n,1} := \min\{|z_1 - z| : z \in L_{1/n}\}$. Тогда $d_{n,1} > 0$ и круг $D(z_i, d_{n,1}) \subseteq \subseteq \overline{G_{1/n}}$.

Положим в неравенстве (38) $M = T_{n,1} := \{z : |z - z_1| = d_{n,1}\}$. Тогда в силу (50) при $n \ge n_0$, где n_0 — фиксированное натуральное число,

$$\max_{z\in T_{n,1}}\left(p_n(z)\prod_{i=1}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right) = d_{n,1}^{\mu_1}\max_{z\in T_{n,1}}\left(p_n(z)\prod_{i=2}^{m}|z-z_i|^{\mu_i}\right) \asymp$$

$$\asymp d_{n,1}^{\mu_1}\max_{z\in T_{n,1}}|p_n(z)| \preccurlyeq n^{2/(\alpha p)}. \tag{51}$$

По принципу максимума модуля $\max\limits_{z\in T_{n,1}} |p_n(z)| \geq |p_n(z_1)|$, и в силу (51)

$$d_{n,1}^{\mu_1} |p_n(z_1)| \preccurlyeq n^{2/(\alpha p)}. \tag{52}$$

Оценим $d_{n,1}$. Выберем $\xi \in L_{1/n}$ так, что $d_{n,1} = |\xi - z_1|$, тогда в силу пункта ii) определения 1

$$\frac{1}{n} = |\Phi(\xi)| - |\Phi(z_1)| \leq |\Phi(\xi) - \Phi(z_1)| \preccurlyeq |\xi - z|^{\beta_1} = (d_{n,1})^{\beta_1}.$$

Следовательно, $d_{n,1}^{-\mu_1} \preccurlyeq n^{\mu_1/\beta_1}$. Умножив это неравенство на (52), получим

$$|p_n(z_1)| \preccurlyeq n^{2/(\alpha p)+\mu_1/\beta_1}.$$

Из (45) и (47) следует, что

$$\frac{2}{\alpha p} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = \frac{2+\gamma_1}{p\beta_1}.$$

Неравенство (46) доказано.

Остановимся еще на доказательстве неравенств (22), (23).

Неравенство (22) непосредственно вытекает из (20), предположения о том, что в качестве „общей точки максимума" можно взять z_{i_0}, и из следствия 2. В силу (22) и того, что все $\gamma_i > 0$ при $i = 1, \ldots, m$,

$$\max_{z\in\overline{G}} \left(|K_n(z)| \prod_{i=1}^{m} |z - z_i|^{\gamma_i/2} \right) \preccurlyeq \max_{z\in\overline{G}} |K_n(z)| \preccurlyeq n^{S_{i_0}-1/2},$$

а из этого и неравенства (19), остающегося истинным после замены p_n на K_n, получаем (23).

1. *Абдуллаев Ф. Г.* О некоторых свойствах ортогональных по площади полиномов в областях комплексной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1587–1595.
2. *Суетин П. К.* Многочлены, ортогональные по площади, и многочлены Бабербаха // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **100**. – 92 с.
3. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
4. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
6. *Walsh J. L.* Interpolation and approximation by rational functions in the complex plane. – 5-th edition Providence: Amer. Math. Soc., 1969.
7. *Хейман У. К., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
8. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 2. – 416 с.
9. *Andrievskii V. V., Blatt H. P.* Zeros of polynomials in the complex plane. – Katholische Universitat Eichstatt, 1997.
10. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Дальнейшее построение теории. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
11. *Andrievskii V. V., Belyi V. I., Dzjadyk V. K.* Conformal invariants in constructive theory of functions of complex variables. – Atlanta, Georgia: World Federation Publ., 1995.

Получено [illegible] .06.99