УДК 519.21

Ю. В. Крвавич, Ю. С. Мішура (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ДРОБОВИХ ІНТЕГРАЛІВ, ЯДРА ЯКИХ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

We prove the stochastic Fubini theorem for Wiener integrals with respect to the fractal Brownian motion. By using this theorem, we obtain conditions of mean-square and pathwise differentiability of fractional integrals whose kernels contain the fractal Brownian motion.

Доведено стохастичну теорему Фубіні для вінерівських інтегралів відносно фрактального броунівського руху. За її допомогою одержано умови середньоквадратичної і потраєкторної диференційовності дробових інтегралів, ядра яких містять фрактальний броунівський рух.

1. Вступ. Необхідність диференціювати дробові стохастичні інтеграли, ядра яких містять фрактальний броунівський рух (ФБР) виникає при заміні міри і застосуванні теореми Гірсанова до процесів з „довгостроковою залежністю". Нехай, наприклад, на канонічному ймовірнісному просторі задано стохастичний „дифузійний" процес вигляду $x_t = \int_0^t I_1(s)ds + I_2(t)$, де $I_i(t) = \int_0^t \alpha_i(s)dB_s^H$ — вінерівський інтеграл відносно ФБР (відповідні позначення наведено в п. 2). Припустимо, що $\alpha_2(t) > 0$, і визначимо

$$c(t) = I_1(t)(\alpha_2(t))^{-1}. \tag{1}$$

Тоді, якщо існує похідна дробового інтеграла,

$$\beta(t) := \frac{d}{dt}\int_0^t u^{1/2-H}(t-u)^{1/2-H}c(u)\,du \tag{2}$$

і

$$K_c^t(s) := s^{1/2-H}\frac{d}{ds}\int_s^t v^{2H-1}(v-s)^{1/2-H}\beta(v)\,dv,$$

то, згідно з теоремою 1 в [1], процес $\left(\hat{B}_t^H\right) = B_t^H - \int_0^t c(s)\,ds$ буде процесом ФБР відносно нової міри $\hat{P}$ такої, що $\left(d\hat{P}/dP\right)_t = \exp\{M_t - 1/2\langle M\rangle_t\}$, де $M_t = \int_0^t K_c^t(s)\,dB_s^H$ — гауссівський мартингал, $\langle M\rangle_t = \int_0^t K_c^t(s)c(s)\,ds$. При цьому в роботі [1] неявно припускається, що похідна $\beta(t)$ існує для будь-якої неперервної функції $c(t)$. Це не так навіть для функцій, які належать до деякого гельдерового класу, про що свідчить приклад, наведений в лемі 1. З іншого боку, достатня умова диференційовності дробових інтегралів, тобто існування похідних Рімана–Ліувілля, міститься в [2, с. 43], і цією умовою є абсолютна неперервність $c(u)$, що надто звужує клас допустимих ядер для даного випадку (більш загальні умови на ядро $c(s)$ наведені в [2, с. 185] для того, щоб існувала похідна за Маршо від дробового інтеграла, але похідні Рімана–Ліувілля і Маршо не співпадають на функціях типу (1)).

В цій статті наведено досить загальні достатні умови на ядро $c(t)$ типу (1) для існування дробової похідної (2) і зображення дробового інтеграла, як інтеграла від своєї похідної. Як допоміжний результат одержано стохастичну теорему Фубіні для вінерівських інтегралів відносно ФБР. Досліджено властивості похідної $\beta(t)$, доведено її неперервність з імовірністю 1 на кожному відрізку, що не містить 0. Відзначимо, що індекс Хюрста фрактального процесу, що входить в ядро $c(t)$, в наведених теоремах не обов'язково збігається з показником H в інтегралі (2).

2. Означення ФБР та вінерівських інтегралів відносно ФБР. Розглянемо повний імовірнісний простір (Ω, F, P) з фільтрацією $(F_t, t \geq 0)$. Цю сукупність будемо позначати $\left(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Означення 1. *Фрактальним броунівським рухом з індексом Хюрста* $H \in$ $\in (1/2, 1)$ *називається випадковий процес* $\left(B_t^H, (F_t)_{t\geq 0}, P\right)$, *який характеризується наступними властивостями:*

1) B_t^H — *процес зі стаціонарними приростами;*

2) $B_0^H = 0$ *та* $EB_t^H = 0 \quad \forall t \geq 0$;

3) $E\left|B_t^H\right|^2 = t^{2H} \quad \forall t \geq 0$;

4) B_t^H — *гауссівський процес;*

5) *траєкторії випадкового процесу* B_t^H *є неперервними.*

Перш ніж досліджувати диференційовність дробового інтеграла, ядро якого визначається за допомогою ФБР, слід нагадати означення вінерівського інтеграла відносно ФБР [3]. Термін „вінерівський" означає інтеграл з невипадковою підінтегральною функцією. Для $H > 1/2$ визначимо інтегральний оператор Γ:

$$\Gamma f(t) := H(2H-1)\int_0^\infty f(s)|s-t|^{2H-2}ds,$$

а також визначимо скалярний добуток

$$\langle f, g\rangle_\Gamma := \langle f, \Gamma g\rangle = H(2H-1)\int_0^\infty\int_0^\infty f(s)g(t)|s-t|^{2H-2}dsdt,$$

де $\langle\circ\rangle$ — звичайний скалярний добуток в $L_2([0,\infty])$.

Позначимо через L_2^Γ простір еквівалентних класів вимірних функцій f таких, що $\langle f, f\rangle_\Gamma < \infty$. Тепер зрозуміло, що відображення $B_t^H \mapsto 1_{[0,t)}$ можна продовжити до ізометрії між гауссовим простором, породженим $\left(B_t^H, t\geq 0\right)$, як найменшим замкненим лінійним підпростором $L_2(\Omega, F, P)$, що містить $\left(B_t^H, t\geq 0\right)$, та простором L_2^Γ. Для $f \in L_2^\Gamma$ інтеграл $\int_0^\infty f(s)\,dB_s^H$ можна визначити як образ функції в цій ізометрії.

Зауважимо, що

$$\mathrm{E}\left|\int_0^\infty f(s)\,dB_s^H\right|^2 = H(2H-1)\int_0^\infty\int_0^\infty f(s)f(u)|u-s|^{2H-2}duds.$$

3. Основні результати. У даному пункті розглядається питання диференційовності дробового інтеграла $\Phi(t) = \int_0^t \phi(t,s)\,ds$, ядро якого визначається за допомогою ФБР, а саме:

$$\phi(t,s) = K_{H_0}(t,s)\int_0^s \alpha(u)\,dB_u^H, \quad H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad H_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{3}$$

де

$$K_{H_0}(t,s) := (t-s)^{1/2-H_0}\beta\left(\frac{s}{t}\right), \quad 0 < s < t.$$

При доведенні диференційовності дробового інтеграла з ядром (3) будемо використовувати стохастичну теорему Фубіні, а тому спочатку сформулюємо та доведемо її.

Теорема 1 (стохастична теорема Фубіні). *Нехай невипадкова, вимірна функція* $f = f(t, s): R_+^2 \to R$ *задовольняє наступні умови:*

$$\int_0^T\int_0^T\int_0^T |f(t,s)||f(t,u)||s-u|^{2H-2}\,ds\,du\,dt < +\infty,$$

$$\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |f(t_1,s)||f(t_2,u)||s-u|^{2H-2}\,ds\,du\,dt_1\,dt_2 < +\infty. \tag{4}$$

Тоді існують інтеграли

$$I_1 = \int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\,dt\right)dB_s^H, \qquad I_2 = \int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\,dB_s^H\right)dt$$

і виконується рівність $I_1 = I_2$ *з імовірністю* 1.

Доведення. 1. Спочатку покажемо, що твердження теореми справедливе для обмежених, вимірних f. Нехай $c := \sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)| < \infty$, тоді згідно з [4] існує послідовність простих функцій $\left\{P_n(t,s): (t,s)\in[0,T]^2,\ n\ge 1\right\}$ така, що $P_n \rightrightarrows f$, $n\to+\infty$ на $[0,T]^2$ і

$$P_n(t,s) := \sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\left(\chi_{A_{n+}^k}(t,s) - \chi_{A_{n-}^k}(t,s)\right) + n\left(\chi_{B_{n+}}(t,s) - \chi_{B_{n-}}(t,s)\right),$$

де

$$A_{n+}^k := \left\{(t,s)\in[0,T]^2: \frac{k}{2^n} \le f(t,s) < \frac{k+1}{2^n},\ k = \overline{0, n2^n-1}\right\},$$

$$A_{n-}^k := \left\{(t,s)\in[0,T]^2: -\frac{k+1}{2^n} < f(t,s) \le -\frac{k}{2^n},\ k = \overline{0, n2^n-1}\right\},$$

$$B_{n+} := \left\{(t,s)\in[0,T]^2: f(t,s) \ge n\right\},$$

$$B_{n-} := \left\{(t,s)\in[0,T]^2: f(t,s) \le -n\right\}.$$

Слід зауважити, що для простих функцій виконується стохастична теорема Фубіні.

Далі для обмеженої функції f і будь-якого $n \ge 1$

$$|I_1 - I_2| = \left|\int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))\,dt\right)dB_s^H - \int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))\,dB_s^H\right)dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))\,dt\right)dB_s^H\right| + \left|\int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))\,dB_s^H\right)dt\right| := L_{1n} + L_{2n}. \tag{5}$$

Тепер

$$E|L_{1n}|^2 = H(2H-1)\ \times$$

$$\times \int_0^T\int_0^T\left(\int_0^T (f(t_1,s)-P_n(t_1,s))\,dt_1\right)\left(\int_0^T (f(t_2,u)-P_n(t_2,u))\,dt_2\right)|s-u|^{2H-2}\,ds\,du \le$$

$$\leq H(2H-1)\left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^2\int_0^T\int_0^T|s-u|^{2H-2}ds\,du =$$

$$= \left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^{2H+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0; \tag{6}$$

$$\mathrm{E}|L_{2n}|^2 \leq T\int_0^T E\left|\int_0^T(f(t,s)-P_n(t,s))\,dB_s^H\right|^2 dt =$$

$$= TH(2H-1)\int_0^T\left(\int_0^T\int_0^T(f(t,s)-P_n(t,s))(f(t,u)-P_n(t,u))|s-u|^{2H-2}ds\,du\right)dt \leq$$

$$\leq \left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^{2H+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \tag{7}$$

З оцінок (5) – (7) отримуємо твердження теореми для обмежених функцій f.

2. Нехай функція f задовольняє умови (4). Зауважимо, що для послідовності функцій $f_n(t,s) = f(t,s)\chi_{\{|f(t,s)|\leq n\}}(t,s),\ n\geq 1,$ виконується твердження стохастичної теореми Фубіні.

Далі позначимо

$$A_n := \left\{(t_1,s)\in[0,T]^2 : |f(t_1,s)|\geq n\right\};$$

$$B_n := \left\{(t,s,u)\in[0,T]^3 : |f(t,s)|\geq n, |f(t,u)|\geq n\right\}.$$

Тоді для будь-якого $n\geq 1$

$$\left|\int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\,dt\right)dB_s^H - \int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\,dB_s^H\right)dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\chi_{\{|f(t,s)|\geq n\}}(t,s)\,dt\right)dB_s^H\right| + \left|\int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\chi_{\{|f(t,s)|\geq n\}}(t,s)\,dB_s^H\right)dt\right| =$$

$$= I_{1n} + I_{2n};$$

$$\mathrm{E}|I_{1n}|^2 = H(2H-1)\times$$

$$\times\int_0^T\int_0^T\left(\int_0^T f(t_1,s)\chi_{A_n}(t_1,s)\,dt_1\right)\left(\int_0^T f(t_2,u)\chi_{A_n}(t_2,u)\,dt_2\right)|s-u|^{2H-2}ds\,du \leq$$

$$\leq H(2H-1)\iint_{A_n}\iint_{A_n}|f(t_1,s)||f(t_2,u)||s-u|^{2H-2}dt_2\,du\,dt_1\,ds \to 0, \quad n\to+\infty;$$

$$\mathrm{E}|I_{2n}|^2 \leq TH(2H-1)\int_0^T\int_0^T\int_0^T f(t,s)\chi_{A_n}(t,s)f(t,u)\chi_{A_n}(t,u)|s-u|^{2H-2}ds\,du\,dt \leq$$

$$\leq TH(2H-1)\iiint_{B_n}|f(t,s)||f(t,u)||s-u|^{2H-2}ds\,du\,dt \to 0, \quad n\to+\infty.$$

Звідси отримуємо твердження теореми для функцій f.

Перш ніж перейти до розгляду питання про диференційовність дробового інтеграла Φ, слід зауважити, що навіть у випадку, коли функція $c(s)$ є дійсною та гельдеровою, похідна функції $I(t) := \int_0^t (t-s)^{1/2-H} s^{1/2-H} c(s)\,ds$ може не бути скрізь визначеною на $[0, \infty)$, про що свідчить наступний результат.

Лема 1. *Нехай*

$$c(s) = \begin{cases} s + (t_0 - t_1)^{1-r} - t_1, & s \in [0, t_1), \\ (t_0 - s)^{1-r}, & s \in [t_1, t_0], \\ -(s - t_0)^{1-r}, & s > t_0, \end{cases}$$

де $t_0 > t_1 > 0$, $r \in (3/2 - H, 1)$, $H \in (1/2, 1)$.

Тоді в точці $t = t_0$ *похідна функції* $I(t)$ *не існує.*

Доведення. Зауважимо, що

$$\exists A > 0 \colon \forall s_1, s_2 \geq 0 \quad |c(s_1) - c(s_2)| \leq A \max\left\{ |s_1 - s_2|^{1-r}, |s_1 - s_2| \right\}$$

і

$$\forall t > 0 \colon I(t) = \int_0^t (t-s)^{1/2-H} s^{1/2-H} c(s)\,ds =$$

$$= t^{2-2H} \int_0^1 (1-u)^{1/2-H} u^{1/2-H} c(tu)\,du =: t^{2-2H} I_1(t).$$

Дослідимо тепер похідну $I_1(t)$ в точці $t = t_0$:

$$\frac{I_1(t_0 + h) - I_1(t_0)}{h} = \int_0^1 (1-u)^{1/2-H} u^{1/2-H} u \frac{c(t_0 u + hu) - c(t_0 u)}{hu}\,du.$$

При $h \to 0$ для $\theta := t_1 / t_0 \in (0, 1)$ маємо

$$\lim_{h \to 0} \frac{I_1(t_0 + h) - I_1(t_0)}{h} =$$

$$= \int_0^\theta (1-u)^{1/2-H} u^{3/2-H}\,du - (1-r) t_0^{-r} \int_\theta^1 (1-u)^{1/2-H-r} u^{3/2-H}\,du,$$

де перший доданок дорінює $B_\theta(5/2 - H, 3/2 - H)$, а другий — нескінченний, оскільки

$$\left| \int_\theta^1 (1-u)^{1/2-H-r} u^{3/2-H}\,du \right| \geq \theta^{3/2-H} \left| \left(-\frac{(1-u)^{3/2-H-r}}{1/2 - H - r} \right) \Bigg|_\theta^1 \right| = \infty.$$

Отже, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{I_1(t_0 + h) - I_1(t_0)}{h} = -\infty$.

Теорема 2. *Нехай функція* $\alpha \colon R_+ \to R$ *обмежена та вимірна, функція* $\beta \colon (0, 1] \to R$ *задовольняє наступні умови:*

1) $m := \sup\limits_{u \in (0,1]} |u \beta(u)| < +\infty$;

2) $\int_0^1 |\beta(u)|^2\,du < +\infty$.

Тоді функція $\delta_t = \int_0^t \alpha(u) \left(u / t^2 \right) K_{H_0}(1, u/t)\,dB_u^H$ *визначена для кожного* $t > 0$, $\mathrm{E} \int_0^t |\delta_t|^2\,dt < +\infty$ *і виконується співвідношення* $\int_0^t \delta_s\,ds = t^{H_0 - 3/2} \Phi(t)$, $t > 0$.

Доведення. Нехай $c := \sup_{u \in R_+} |\alpha(u)| < +\infty$. Покажемо, що для кожного $t > 0$ функція δ_t визначена. Дійсно,

$$\forall t > 0:\ \mathrm{E}|\delta_t|^2 =$$

$$= H(2H-1)\int_0^t\int_0^t \alpha(u)\frac{u}{t^2}\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \le$$

$$\le c^2H(2H-1)\int_0^t\int_0^t \frac{u}{t^2}\frac{v}{t^2}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{1/2-H_0}\left|\beta\left(\frac{u}{t}\right)\right|\left(1-\frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0}\left|\beta\left(\frac{v}{t}\right)\right||u-v|^{2H-2}\,du\,dv =$$

$$= c^2t^{2H-2}m^2H(2H-1)\int_0^1\int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0}(1-v)^{1/2-H_0}|u-v|^{2H-2}\,du\,dv =$$

$$= c^2m^2t^{2H-2}HL_0 < +\infty,$$

де

$$L_0 = B(2H, 2-2H) + \frac{2H - H_0 + 1/2}{2^{2H-H_0-1/2}(3/2 - H_0)(1+2H-2H_0)} > 0.$$

Наступна оцінка забезпечує скінченність інтеграла $\int_0^t |\delta_s|^2 ds$:

$$\forall t > 0:\ \int_0^t \mathrm{E}|\delta_s|^2 ds \le c^2m^2t^{2H-1}HL_0 < +\infty.$$

З умов теореми випливає і скінченність наступних інтегралів:

$$\int_0^t\int_0^s \alpha(u)K_{H_0}(t,s)\,dB_u^H\,ds, \qquad \int_0^t\int_u^t \alpha(u)K_{H_0}(t,s)\,ds\,dB_u^H \quad t > 0. \tag{8}$$

Дійсно, для першого інтеграла маємо

$$\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_0^s \alpha(u)K_{H_0}(t,s)\,dB_u^H\,ds\right|^2 \le t\int_0^t \left|K_{H_0}(t,s)\right|^2 \mathrm{E}\left|\int_0^s \alpha(u)\,dB_u^H\right|^2 ds =$$

$$= t\int_0^t \left|K_{H_0}(t,s)\right|^2 H(2H-1)\int_0^s\int_0^s \alpha(u)\alpha(v)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\,ds \le$$

$$\le H(2H-1)c^2t^{3-2H_0+2H}\left\{\int_0^{1/2}(1-s)^{1-2H_0}\beta^2(s)\,ds + \int_{1/2}^1 (1-s)^{1-2H_0}\beta^2(s)\,ds\right\} \le$$

$$\le H(2H-1)c^2t^{3-2H_0+2H}\left\{2^{2H_0-1}\int_0^1 \beta^2(s)\,ds + m_{1/2}\frac{2^{2H_0-2}}{2-2H_0}\right\} < \infty,$$

де $m_{1/2} = \sup_{u\in[1/2,1]}|\beta(u)|^2 < \infty$.

Для другого інтеграла маємо таку оцінку:

$$\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_u^t \alpha(u)K_{H_0}(t,s)\,ds\,dB_u^H\right|^2 =$$

$$= H(2H-1)\int_0^t\int_0^t \alpha(u)\alpha(v)\left(\int_u^t K_{H_0}(t,s)ds\right)\left(\int_v^t K_{H_0}(t,s)ds\right)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \le$$

$$\leq\ c^2H(2H-1)\int_0^t\int_0^t\left(\int_0^t K_{H_0}(t,s)ds\right)^2|u-v|^{2H-2}dudv\ =$$

$$=\ c^2H(2H-1)t^{2H}\left(\int_0^t K_{H_0}(t,s)ds\right)^2\ \leq\ c^2H(2H-1)t^{2H+1}\int_0^t\left|K_{H_0}(t,s)\right|^2ds\ =$$

$$=\ c^2H(2H-1)t^{2H+1}\int_0^t(t-s)^{1-2H_0}\beta^2(s/t)ds\ \leq$$

$$\leq\ H(2H-1)c^2t^{3-2H_0+2H}\left\{2^{2H_0-1}\int_0^1\beta^2(s)ds+m_{1/2}\frac{2^{2H_0-2}}{2-2H_0}\right\}\ <\ \infty.$$

Звідси випливає, що для інтегралів (8) виконуються умови стохастичної теореми Фубіні, використовуючи яку, можна зробити наступні перетворення для функції Φ:

$$\Phi(t)\ =\ \int_0^t K_{H_0}(t,s)\int_0^s\alpha(u)dB_u^H ds\ =\ \int_0^t\int_u^t\alpha(u)K_{H_0}(t,s)\,ds\,dB_u^H\ =$$

$$=\ t^{3/2-H_0}\int_0^t\int_{u/t}^1\alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H\ =:\ t^{3/2-H_0}F(t),\quad t>0.$$

Для інтегралів $\int_0^t|\delta_s|^2ds$ та $F(t)$ внаслідок їх скінченності теж виконуються умови стохастичної теореми Фубіні, а отже, її можна використати в наступних перетвореннях:

$$\int_0^t\delta_s ds\ =\ \int_0^t\int_0^s\alpha(u)\frac{u}{s^2}K_{H_0}\left(\frac{u}{s}\right)dB_u^H ds\ =\ \int_0^t\int_u^t\alpha(u)\frac{u}{s^2}K_{H_0}\left(\frac{u}{s}\right)ds\,dB_u^H\ =$$

$$=\ \int_0^t\int_{u/t}^1\alpha(u)K_{H_0}(s)\,ds\,dB_u^H\ =\ F(t)\ =\ t^{H_0-3/2}\,\Phi(t).$$

Наслідок. *Функція* $\Phi(t)=t^{3/2-H_0}\int_0^t\delta_s\,ds$ *належить до класу* $AC[0,T]$ *при кожному* $T>0$ [2], *отже, для майже всіх* $\omega\in\Omega$

$$\forall t>0:\ \Phi'(t)\ =\ (3/2-H_0)t^{1/2-H_0}\int_0^t\delta_s ds+t^{3/2-H_0}\delta_t.$$

Знайдемо додаткові умови, при яких δ_t буде похідною в середньому квадратичному функції $t^{H_0-3/2}\Phi(t)$ для всіх $t>0$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *та, крім того,* $\beta\in C((0,1])$. *Тоді* δ_t *— похідна в середньому квадратичному в точці* $t>0$ *функції* $t^{H_0-3/2}\Phi(t)$.

Доведення. Як з'ясувалось вище (теорема 2), для диференційовності функції Φ достатньо довести диференційовність функції F.

Для $h>0$ маємо

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\ =\ \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{u/(t+h)}^1\alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H\ -$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^t\int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H + \frac{1}{h}\int_0^t\int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H -$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^t\int_{u/t}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H +$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^t\int_{u/(t+h)}^{u/t} \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H =: I_1(t,h)+I_2(t,h).$$

Далі проведемо наступні оцінювання:

$$\mathrm{E}|I_1(t,h)|^2 = \frac{H(2H-1)}{h^2}\times$$

$$\times\int_t^{t+h}\int_t^{t+h}\left(\int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\right)\left(\int_{v/(t+h)}^1 \alpha(v)K_{H_0}(1,s)\,ds\right)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \le$$

$$\le c^2\frac{H(2H-1)}{h^2}\int_t^{t+h}\int_t^{t+h}\left(\int_{t/(t+h)}^1 K_{H_0}(1,s)\,ds\right)^2|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \underset{h\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} c^2H(2H-1)\lim_{h\to 0}\left(\frac{t}{(t+h)^2}\left(1-\frac{t}{t+h}\right)^{1/2-H_0}\beta\left(\frac{t}{t+h}\right)\right)^2\times$$

$$\times\left((3/2-H_0)h^{1/2-H_0}\right)^{-2}\lim_{h\to 0}h^{1-2H_0+2H} =$$

$$= c^2H(2H-1)\frac{t^{2H_0-3}\beta^2(1)}{(3/2-H_0)^2}\lim_{h\to 0}h^{1-2H_0+2H} = 0,\quad t>0.$$

Для інтеграла $I_2(t,h)$ одержуємо

$$\mathrm{E}\left|I_2(t,h)-\int_0^t\alpha(u)\frac{d}{dt}\left(\int_{u/t}^1 K_{H_0}(1,s)\,ds\right)dB_u^H\right|^2 = \mathrm{E}|I_2(t,h)-\delta_t|^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left|I_2(t,h)-\int_0^t\alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)dB_u^H\right|^2 = H(2H-1)\int_0^t\int_0^t\left(\alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{h}\int_{u/(t+h)}^{u/t}\alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\right)\left(\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)-\frac{1}{h}\int_{v/(t+h)}^{v/t}\alpha(v)K_{H_0}(1,s)\,ds\right)\times$$

$$\times|u-v|^{2H-2}\,du\,dv =: J_{t,h}.$$

Слід зауважити, що підінтегральна функція останнього інтеграла $J_{t,h}$ майже скрізь збігається до 0 при $h\to 0$. Покажемо, що він має ще й інтегровну мажоранту, а отже, за теоремою Лебега прямує до 0 при $h\to 0$:

$$J_{t,h} \le H(2H-1)\left\{\int_0^t\int_0^t\left|\alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)\right||u-v|^{2H-2}\,du\,dv +\right.$$

$$+\int_0^t\left|\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)\right|\left|\frac{1}{h}\int_{u/(t+h)}^{u/t}\alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\right||u-v|^{2H-2}\,du\,dv +$$

$$+ \int_0^t \left| \alpha(u) \frac{u}{t^2} K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t}\right) \right| \left| \frac{1}{h} \int_{v/(t+h)}^{v/t} \alpha(v) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| |u-v|^{2H-2}\, du dv \ +$$

$$+ \int_0^t \left| \frac{1}{h} \int_{u/(t+h)}^{u/t} \alpha(u) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| \left| \frac{1}{h} \int_{v/(t+h)}^{v/t} \alpha(v) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| |u-v|^{2H-2}\, du dv \Bigg\} \ =: \ L_{t,h}.$$

Для $0 < h < 1$ справедлива оцінка

$$\left| \frac{1}{h} \left(\int_{v/(t+h)}^{v/t} \alpha(v) K_{H_0}(1,s)\, ds \right) \right| \ \le \ c \frac{1}{h} \int_{v/(t+h)}^{v/t} (1-s)^{1/2-H_0} |\beta(s)|\, ds \ \le$$

$$\le \ c \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0} \frac{1}{h} \int_{v/(t+h)}^{v/t} |\beta(s)|\, ds \ \le \ c \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0} \frac{1}{h} \int_{t/(t+h)}^{1} |\beta(s)|\, ds \ \le$$

$$\le \ c \sqrt{m_{t/(t+1)}} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0}.$$

Звідси

$$L_{t,h} \ \le \ c^2 t^{2H-2} m^2 H(2H-1) \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0} (1-v)^{1/2-H_0} |u-v|^{2H-2}\, du dv \ +$$

$$+ \ 2c^2 t^{2H-2} m \sqrt{m_{t/(t+1)}}\, H(2H-1) \ \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0} (1-v)^{1/2-H_0} |u-v|^{2H-2}\, du dv \ +$$

$$+ \ c^2 t^{2H-2} m_{t/(t+1)} H(2H-1) \ \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0} (1-v)^{1/2-H_0} |u-v|^{2H-2}\, du dv \ < \ +\infty.$$

Отже δ_t — похідна в середньому квадратичному в точці $t > 0$ функції $F(t) = t^{H_0 - 3/2} \Phi(t)$.

Сформулюємо додаткові умови, при виконанні яких $\Phi(t)$ буде для майже всіх $\omega \in \Omega$ неперервно диференційовною на множинах вигляду $[r, R]$, $R > r > 0$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3 та, крім того,* β *— невід'ємна, монотонно незростаюча і така, що* $u\beta(u)$ *— монотонно неспадна. Тоді* δ_t *— неперервний процес на довільному відрізку* $[r, R]$, $R > r > 0$.

Доведення. Для довільних $t_2 > t_1 > 0$: $\{t_1, t_2\} \subset [r, R]$, де $R > r > 0$ — фіксовані, маємо

$$\mathrm{E}\left|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}\right|^2 \ \le \ 2E \left| \int_0^{t_1} \alpha(u) u \left[\frac{1}{t_2^2} K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_2}\right) - \frac{1}{t_1^2} K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_1}\right) \right] dB_u^H \right|^2 \ +$$

$$+ \ 2E \left| \int_{t_1}^{t_2} \alpha(u) u \frac{1}{t_2^2} K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_2}\right) dB_u^H \right|^2 \ =$$

$$= 2H(2H-1)\int_0^{t_1}\int_0^{t_1}\alpha(u)u\left[\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_2}\right)-\frac{1}{t_1^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_1}\right)\right]\times$$

$$\times\ \alpha(v)v\left[\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t_2}\right)-\frac{1}{t_1^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t_1}\right)\right]|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\ +$$

$$+\ 2H(2H-1)\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\alpha(u)u\alpha(v)v\left[\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_2}\right)\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t_2}\right)\right]|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\ =:\ M+N.$$

Для N неважко отримати наступну оцінку:

$$N\ \le\ L_2(t_2-t_1)^{1-2H_0+2H},$$

де

$$L_2\ =\ \frac{L_1}{r^{1-2H_0+2H}},\quad L_1\ =\ \frac{c^2Hm^2}{1-H_0}+\frac{c^2 2H(2H-H_0+1/2)m^2}{2^{2H-H_0-1/2}(3/2-H_0)(2H-2H_0+1)}\ >\ 0.$$

Знайдемо тепер оцінку для M:

$$M\ =\ 2H(2H-1)\times$$

$$\times\int_0^{t_1}\int_0^{t_1}\alpha(u)\alpha(v)\left[\frac{1}{t_1}\frac{u}{t_1}\beta\left(\frac{u}{t_1}\right)\left(1-\frac{u}{t_1}\right)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2}\frac{u}{t_2}\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\left(1-\frac{u}{t_2}\right)^{1/2-H_0}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t_1}\frac{v}{t_1}\beta\left(\frac{v}{t_1}\right)\left(1-\frac{v}{t_1}\right)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2}\frac{v}{t_2}\beta\left(\frac{v}{t_2}\right)\left(1-\frac{v}{t_2}\right)^{1/2-H_0}\right]|u-v|^{2H-2}\,du\,dv.$$

Зауважимо, що для кожного $u\in(0,t_1]$, використовуючи монотонність функцій $u\beta(u)$, $\beta(u)$, маємо

$$\frac{1}{t_1}\frac{u}{t_1}\beta\left(\frac{u}{t_1}\right)\left(1-\frac{u}{t_1}\right)^{1/2-H_0}\ >\ \frac{1}{t_2}\frac{u}{t_2}\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\left(1-\frac{u}{t_2}\right)^{1/2-H_0},$$

а отже,

$$(t_1-u)^{1/2-H_0}t_2^{5/2-H_0}\ >\ (t_2-u)^{1/2-H_0}t_1^{5/2-H_0}.$$

Звідси одержуємо

$$M\ \le\ c^2 2H(2H-1)\times$$

$$\times\int_0^{t_1}\int_0^{t_1}t_2^2\frac{u}{t_2}\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\frac{v}{t_2}\beta\left(\frac{v}{t_2}\right)\left[\frac{1}{t_1^{5/2-H_0}}(t_1-u)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2^{5/2-H_0}}(t_2-u)^{1/2-H_0}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t_1^{5/2-H_0}}(t_1-v)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2^{5/2-H_0}}(t_2-v)^{1/2-H_0}\right]|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\ \le$$

$$\le\ \frac{c^2 2H(2H-1)m^2t_2^2}{t_1^{5/2-H_0}}\int_0^{t_1}\left[t_2^{5/2-H_0}(t_1-u)^{1/2-H_0}-t_1^{5/2-H_0}(t_2-u)^{1/2-H_0}\right]\times$$

$$\times\int_0^{t_1}(t_1-v)^{1/2-H_0}|u-v|^{2H-2}\,du\,dv.$$

Нехай далі

$$L_3 = \frac{1}{2H-1} + \frac{2H-H_0+1/2}{(2H-1)(3/2-H_0)2^{2H-H_0-1/2}} > 0,$$

$$L_4 := \frac{c^2 2H(2H-1)m^2 R^{2H+1}}{r^{5/2-H_0}} L_3 > 0,$$

$$L_5 =: \frac{L_4}{2-2H_0}\left[R^{7/2-3H_0}(R-r)^{2H_0-1} + R^{5/2-H_0}\right] > 0,$$

тоді $M \le L_5(t_2-t_1)^{2-2H_0}$.

Отже,

$$N + M \le L_2(t_2-t_1)^{1-2H_0+2H} + L_5(t_2-t_1)^{2-2H_0} =$$

$$= (t_2-t_1)^{2-2H_0}\left(L_2(t_2-t_1)^{2H-1}+L_5\right) \le (t_2-t_1)^{2-2H_0}\left(L_2(R-r)^{2H-1}+L_5\right) =:$$

$$=: L_6(t_2-t_1)^{2-2H_0}, \quad L_6 > 0,$$

тобто $\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^2 \le L_6(t_2-t_1)^{2-2H_0}$.

Тепер слід зауважити, що δ_t — гауссівський процес і $\mathrm{E}\delta_t = 0$, а отже, виконується наступне:

$$\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^{2n} = (2n-1)!!\sigma^{2n}, \quad \text{де} \quad \sigma^2 = \mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^2.$$

Виберемо n таким чином: $n = \left[\frac{1}{2-2H_0}\right]+1$, тоді

$$\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^{2n} = (2n-1)!!\sigma^{2n} \le (2n-1)!!L_6^n(t_2-t_1)^{n(2-2H_0)}, \tag{9}$$

причому $n(2-2H_0) > 1$. Оцінка (9), згідно з умовами теореми Колмогорова [5], означає неперервність δ_t.

Зауваження. Функції $\beta(t) \equiv 1$ та $\beta(t) = t^{1/2-H_0}$, $t > 0$, задовольняють умови теорем $2-4$.

1. *Kleptsyna M.L., Le Breton A., Rouland M.C.* An elementary approach to filtering in systems with fractional Brownian observation noise // INRIA. Rapport de recherche. – 1998. – № 349. – 38 p.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. *Norros I.E., Valkeila E., Virtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Browinian motions // Bernoulli. – 1999. – № 6.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 342 с.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.

Одержано 01.11.99,
після доопрацювання — 09.06.2000