УДК 517.977.1

В. П. Яковець, О. В. Тарасенко

Про керовність вироджених лінійних процесів

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Для лінійних нестаціонарних процесів, які описуються системами диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних, отримано достатні умови керовності.

Розглянемо процес управління, який задається системою рівнянь

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u(t), \tag{1}$$

де $A(t)$, $B(t)$ — дійсні або комплекснозначні квадратні матриці n-го порядку, $C(t)$ — матриця розмірності $(n \times m)$, $x(t)$ — n-вимірний вектор стану, $u(t)$ — m-вимірний вектор управління, $\det B(t) \equiv 0$, $\forall t \in I = [0; T]$.

Питання керовності та спостережуваності лінійних процесів даного типу досліджувались в основному у випадку, коли $B(t)$ — одинична матриця [1–4]. Випадок $\det B \equiv 0$ розглядався лише для стаціонарних процесів, коли матриці A, B, C є сталими [5, 6].

У роботі [5] введено поняття R-керовності та C-керовності системи (1). Згідно з [5], система (1) називається *C-керовною*, якщо її можна перевести з будь-якого допустимого стану в довільний стан за скінченний проміжок часу, і *R-керовною*, якщо її можна перевести з будь-якого допустимого стану в будь-який досяжний стан. При цьому *множиною допустимих управлінь* відносно заданого x_0 і класу управлінь $\Omega(x_0; I)$ називаються такі $u(t)$, для яких рівняння (1) з початковою умовою

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

є розв'язним, а множину початкових умов, для яких множина допустимих управлінь непорожня, — *множиною допустимих станів.*

У даній роботі, виходячи з теореми про звідність виродженої лінійної системи до центральної канонічної форми, доведеній у [7], знайдено достатні умови R-керовності та C-керовності системи (1).

Будемо передбачати, що виконуються всі умови вказаної теореми, а саме:

1) $\operatorname{rank} B(t) = n - r$, $\forall\, t \in [0; T]$;

2) матриця $B(t)$ має на $[0; T]$ повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t) = A(t) - B(t)d/dt$, який складається з r ланцюжків $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, завдовжки $s_1, s_2, \ldots, s_r$;

3) $A(t), B(t) \in C^{3p-2}[0; T]$, $C(t), u(t) \in C^{p-1}[0; T]$, де $p = \max\limits_{i=\overline{1,r}} s_i$.

Позначимо

$$\Psi(t) = [\psi_1^{(s_1)}(t), \ldots, \psi_1^{(1)}(t); \psi_2^{(s_2)}(t), \ldots, \psi_2^{(1)}(t); \ldots; \psi_r^{(s_r)}(t), \ldots, \psi_r^{(1)}(t)] \text{ —}$$

$(n \times s)$-матрицю $(s = s_1 + s_2 + \cdots + s_r)$, складену із вектор-стовпців $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, які утворюють жорданові ланцюжки матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t) = A^*(t) + \dfrac{d}{dt}B^*(t)$

(X^* — матриця, спряжена з X). Згідно з [8], система (1) з початковою умовою (2) буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься умова

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[\Psi^*(0)C(0)u(0)] + \sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[\Psi^*(0)A(0)]x_0 = 0, \tag{3}$$

де $I = \operatorname{diag}[I_1, I_2, \ldots, I_r]$, I_j, $j = \overline{1,r}$, — нільпотентний блок Жордана розмірності s_j. Звідси одразу випливає таке твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* 1–3*, то множиною допустимих управлінь системи* (1) *відносно вектора* x_0 *є множина вектор-функцій* $u(t)$*, які задовольняють умову* (3)*, а множину допустимих станів утворюють ті вектори* x_0*, для яких існує принаймні одне управління* $u(t)$*, що задовольняє умову* (3)*.*

Як показано в [7, 8], за виконання умов 1–3 однорідна система, що відповідає (1)

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{4}$$

має загальний розв'язок типу Коші, який є лінійною комбінацією її $(n-s)$ лінійно незалежних розв'язків. Позначимо через $X_{n-s}(t)$ фундаментальну матрицю системи (4), складену з цих розв'язків, а через $Y_{n-s}(t)$ — фундаментальну матрицю спряженої системи

$$\frac{d}{dt}(B^*(t)y) = -A^*(t)y. \tag{5}$$

Нехай

$$\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \ldots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \ldots; \varphi_r^{(1)}(t), \ldots, \varphi_r^{(s_r)}(t)] \text{ —}$$

матриця розмірності $(n \times s)$, складена з векторів, що утворюють повний жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$.

Утворимо $(n \times n)$-матриці

$$P(t) = [Y_{n-s}(t), \Psi(t)]^*, \qquad Q(t) = [X_{n-s}(t), \Phi(t)], \tag{6}$$

які [8] будуть неособливими при всіх $t \in [0; T]$. Зробивши в системі (1) заміну $x = Q(t)y$ і помноживши зліва на $P(t)$, зведемо її до вигляду

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} Y_{n-s}^*(t)C(t)u(t) \\ R(t)\Psi^*(t)C(t)u(t) \end{pmatrix},$$

де $R(t) = [\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}$, а E_s, E_{n-s} — одиничні матриці s-го та $(n-s)$-го порядку відповідно [8].

Позначивши $y = \operatorname{col}(y_1, y_2)$, де y_1 — $(n-s)$-вимірний вектор, а y_2 — s-вимірний, дістанемо

$$\frac{dy_1}{dt} = G(t)u(t), \tag{7}$$

$$I\frac{dy_2}{dt} = y_2 + F(t)u(t), \tag{8}$$

де

$$G(t) = Y^*_{n-s}(t)C(t), \tag{9}$$

$$F(t) = R(t)\Psi^*(t)C(t). \tag{10}$$

Нехай $y_0 = \mathrm{col}(y^0_1, y^0_2)$ — допустимий стан системи (7), (8), а $y_1 = \mathrm{col}(y^1_1, y^1_2)$ — довільний наперед заданий стан. Розв'язком цієї системи з початковою умовою $y(0) = y_0$ буде

$$y_1(t) = y^0_1 + \int\limits_0^t G(\tau)u(\tau)\,d\tau; \qquad y_2(t) = -\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t)u(t)].$$

Тоді управління $u(t)$ переводитиме систему із стану y_0 в стан y_1 за скінченний час $t_1 \in [0;T]$, якщо воно задовольнятиме інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^{t_1} G(\tau)u(\tau)\,d\tau = y^1_1 - y^0_1 \tag{11}$$

з початковою умовою

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t)u(t)] + y^1_2 = 0. \tag{12}$$

Будемо шукати його у вигляді

$$u(t) = G^*(t)\xi + \omega(t), \tag{13}$$

де ξ — сталий $(n-s)$-вимірний вектор, $\omega(t)$ — m-вимірна вектор-функція, яка задовольняє умову

$$\int\limits_0^{t_1} G(\tau)\omega(\tau)\,d\tau = 0. \tag{14}$$

Підставивши (13) у (11), (12), дістанемо

$$W(0, t_1)\xi = y^1_1 - y^0_1, \tag{15}$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t_1)\omega(t_1)] = -\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t_1)G^*(t_1)]\xi - y^1_2, \tag{16}$$

де

$$W(0, t_1) = \int\limits_0^{t_1} G(\tau)G^*(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Якщо

$$\det W(0, t_1) \neq 0, \tag{18}$$

то з рівняння (15) однозначно визначається вектор ξ при будь-яких наперед заданих y_1^0, y_1^1:

$$\xi = W^{-1}(0, t_1)(y_1^1 - y_1^0).$$

Для знаходження вектор-функції $\omega(t)$ розглянемо рівняння

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t)\omega(t)] = -\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t)G^*(t)]\xi - y_2^1.$$

Якщо воно має розв'язок у деякому околі точки t_1, то рівність (16) буде виконуватись. Неважко переконатися, що єдиним розв'язком цього рівняння відносно $F(t)\omega(t)$ є вектор-функція

$$F(t)\omega(t) = -F(t)G^*(t)\xi - y_2^1. \tag{19}$$

Позначимо

$$C(t)\omega(t) = z(t). \tag{20}$$

Тоді, взявши до уваги (9), (10), рівняння (14), (20) запишемо у вигляді

$$\int_0^{t_1} Y_{n-s}^*(\tau)z(\tau)\,d\tau = 0; \tag{21}$$

$$\Psi^*(t)z(t) = d(t), \tag{22}$$

де

$$d(t) = -\Psi^*(t)C(t)G^*(t)\xi - R^{-1}(t)y_2^1.$$

Співвідношення (21) буде виконуватись, якщо

$$Y_{n-s}^*(t)z(t) = 0, \qquad \forall\, t \in [0; t_1]. \tag{23}$$

Отже, для визначення вектор-функції $z(t)$ маємо систему рівнянь (22), (23), яку згідно з (6) можна записати у вигляді одного рівняння

$$P(t)z(t) = \widetilde{d}(t),$$

де $\widetilde{d}(t) = \mathrm{col}(0; d(t))$, звідки

$$z(t) = P^{-1}(t)\widetilde{d}(t).$$

Нарешті, щоб знайти вектор-функцію $\omega(t)$, треба розв'язати рівняння (20). Воно буде розв'язним, якщо $m \geqslant n$ і $\operatorname{rank} C(t) = n$ на $[0; t_1]$.

Таким чином, якщо при деякому $t_1 \in [0; T]$ виконується умова (18) і вказані вище умови розв'язності рівняння (20), то систему (7), (8), а отже, і вихідну систему (1) за час t_1 можна перевести з будь-якого допустимого стану (який визначається умовою (3) і залежить від управління) в будь-який наперед заданий стан. Отже, у цьому випадку система буде

C-керовною. Якщо ж виконується тільки умова (18), то систему (7), (8) можна перевести із стану $y_0 = \mathrm{col}(y_1^0, y_2^0)$ у стан $y_1 = \mathrm{col}(y_1^1, y_2^1)$, де $(n-s)$-вимірні вектори y_1^0, y_1^1 довільні наперед задані, а s-вимірні вектори y_2^0, y_2^1 підпорядковані управлінню $u(t)$, яке визначається за формулою (13), в якій $\omega = 0$. Тому в цьому випадку система (1) буде R-керовною.

У результаті доведено таку теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* 1–3*, а також:*

а) $\det\left[\int\limits_0^{t_1} Y_{n-s}^*(\tau)C(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)\,d\tau\right] \neq 0$ *при деякому* $t_1 \in [0; t_1]$*;*

б) $m \geqslant n$*;*

в) $\mathrm{rank}\, C(t) = n$, $\forall\, t \in [0; t_1]$, *де* $Y_{n-s}(t)$ *— фундаментальна матриця системи* (5)*, спряженої з однорідною системою* (4)*, що відповідає* (1).

Тоді система (1) C*-керовна.*

Якщо ж виконуються лише умови 1–3 *та а, то дана система буде* R*-керовною.*

Умова *а* рівносильна додатній визначеності квадратичної форми з матрицею $W(0; t_1)$. Так само, як і в [1], можна показати, що вона виконується тоді і тільки тоді, коли рівняння

$$C^*(t)Y_{n-s}(t)c = 0$$

не має розв'язків, відмінних від нульового, відносно сталих векторів c.

Відзначиимо, що умови C-керовності та R-керовності стаціонарного процесу, який описується системою (1) із сталими матрицями A, B, C, отримані в [5], випливають як наслідок з теореми 2.

1. *Абгарян К. А., Хрусталев М. М., Жирнова Э. Б.* Управляемость и наблюдаемость линейных систем. – Москва: Моск. авиац. ин-т, 1977. – 78 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. – Москва: Наука, 1971. – 508 с.
3. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – Москва: Мир, 1977. – 650 с.
4. *Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. – Москва: Мир, 1971. – 400 с.
5. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations 2. – S. Francisco; London; Melbourne: Pitman, 1982. – 234 p.
6. *Pandolfi L.* Controllability and stabilization for linear systems of algebraic and differential equations // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1980. – **30**, No 4. – P. 601–620.
7. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. АН Украины. – 1993. – № 4. – С. 10–15.
8. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.

Ніжинський державний університет
ім. Миколи Гоголя

Надійшло до редакції 05.11.2008

V. P. Yakovets, O. V. Tarasenko

On the controllability of singular linear processes

The sufficient conditions of the controllability for the linear nonstationary processes which are described by the systems of differential equations with degenerate matrix at the derivatives are obtained.