

О. А. Ярова

Про групи, усі власні підгрупи яких близькі до абелевих

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)**Вивчаються локально ступінчасті групи, у яких усі підгрупи або нормальні, або мають черніковський комутант.*

Нехай G — група. Позначимо через $L_{\text{norm}}(G)$ сімейство всіх нормальних підгруп G . Вивчення впливу сімейства $L_{\text{norm}}(G)$ на структуру групи G було розпочато наприкінці XIX ст. Так, Р. Дедекінд у роботі [1], що вже стала класичною, описав скінченні групи, у яких усяка підгрупа нормальна, тобто сімейство $L_{\text{norm}}(G)$ складається з усіх підгруп. Згодом опис Р. Дедекінда було розширено на довільні групи Р. Бером [2]. Зауважимо, що групи, усяка підгрупа яких нормальна, були пізніше названі *дедекіндовими*. О. Ю. Шмідт почав вивчення (скінченних) груп, у яких сімейство $L_{\text{non-norm}}(G)$ усіх підгруп, що не є нормальними, задовольняє деяке достатньо сильне обмеження. Так, у роботах [3, 4] він описав будову скінченних груп, у яких $L_{\text{non-norm}}(G)$ — клас спряжених підгруп або об'єднання двох класів спряжених підгруп. С. М. Черніков у роботі [5] досліджував нескінченні групи, у яких сімейство $L_{\text{non-norm}}(G)$ задовольняє деяку природну умову скінченності. З цієї роботи починається великий цикл досліджень, присвячених вивченню груп, у яких сімейство $L_{\text{non-norm}}(G)$ задовольняє деяке природне обмеження. Детально вони розглянуті в [6, 7], ми торкнемося лише робіт, що мають безпосереднє відношення до тематики даної роботи. Г. М. Ромаліс і М. Ф. Сесекін в роботах [8–10] почали вивчати групи, у яких сімейство $L_{\text{non-norm}}(G)$ складається з абелевих підгруп. Такі групи були названі ними метагамільтоновими. Скінченні метагамільтонові групи розглядалися в роботах [11, 12]. Повний опис метагамільтонових груп було одержано в серії робіт М. Ф. Кузенного і М. М. Семка [13]. Продовженням таких досліджень є розгляд ситуації, коли підгрупи сімейства $L_{\text{non-norm}}(G)$ належать до класу груп, який є природним розширенням класу абелевих груп. Так, у роботах [14, 15] розглядалися групи, в яких підгрупи сімейства $L_{\text{non-norm}}(G)$ мають скінченний комутант або є FC -групами.

Наша мета — дослідження груп, усі власні підгрупи яких близькі до абелевих. Оскільки природним узагальненням скінченних груп є черніковські групи, то природним розширенням груп зі скінченним комутантом є групи з черніковським комутантом. У даній роботі починається вивчення груп, у яких усяка підгрупа або нормальна, або має черніковський комутант.

Теорема 1. *Нехай G — локально майже розв'язна група, всяка підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Тоді мають місце такі твердження:*

1. *Усяка скінченно породжена підгрупа групи G буде скінченною над центром, зокрема, G — локально FC -група.*
2. *Комутант групи G буде локально скінченною підгрупою, зокрема, якщо G не має скруту, то вона абелева.*

Нагадаємо, що група G називається *локально ступінчастою*, якщо всяка її скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу. Клас локально ступінчастих

груп досить широкий, зокрема, він включає локально фінітно апроксимовані і локально майже розв'язні групи.

Теорема 2. *Нехай G — локально ступінчаста група, усяка підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G не є локально майже розв'язною. Тоді мають місце такі твердження:*

1. G включає таку нормальну локально скінченну підгрупу T , що G/T — неперіодична абелева група.

2. T не має скінченної системи породжуваних елементів.

3. Усяка власна підгрупа T має черніковський комутант.

Теорема 3. *Нехай G — локально розв'язна група. Якщо всяка власна підгрупа G має черніковський комутант, то і комутант всієї групи G буде черніковською підгрупою.*

1. Dedekind R. Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. — 1897. — **48**. — S. 548–561.
2. Baer R. Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S.-B. Heidelberg Akad. — 1933. — **2**. — S. 12–17.
3. Шмидт О. Ю. Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп // Мат. сб. — 1926. — **33**. — С. 161–172.
4. Шмидт О. Ю. Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп // Тр. семинара по теории групп. — Москва; Ленинград: Наука, 1938. — С. 7–26.
5. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. — 1967. — **19**, № 6. — С. 111–131.
6. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — Москва: Наука, 1980. — 384 с.
7. Артемович О. Д., Курдаченко Л. А. Группы, богаті X -підгрупами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2003. — **61**. — С. 218–237.
8. Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метатамилтоновых группах. I // Мат. зап. Уральск. ун-т. — 1966. — **5**, № 3. — С. 45–49.
9. Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М. О метатамилтоновых группах. II // Там же. — 1968. — **6**, № 5. — С. 50–53.
10. Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метатамилтоновых группах. III // Там же. — 1970. — **7**, № 3. — С. 195–199.
11. Нагребецкий В. Т. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Там же. — 1967. — **6**, № 1. — С. 80–88.
12. Махнев А. А. О конечных метатамилтоновых группах // Там же. — 1976. — **10**, № 1. — С. 60–75.
13. Кузенный М. Ф., Семко М. М. Метатамилтонові групи та їх узагальнення. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. — 232 с.
14. Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes // Advanced in Group Theory 2002: Proc. of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoly, May – June, 2002. — Roma: Aracne, 2003. — P. 93–110.
15. Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes // Math. Proc. Royal Irish Academy. — 2004. — **104A**, No 2. — P. 177–189.

Національний університет державної
податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 12.11.2008

O. A. Yarova

On groups whose all own subgroups are near to Abelian

Locally step groups, whose all subgroups are normal or have Chernikov's derived subgroup, are studied.