ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2009

МЕХАНІКА

УДК 539.3

К. В. Аврамов

Нелинейное взаимодействие сопряженных форм колебаний в круглых пластинах с надрезами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Е. Божко)

Розглядається кругла пластина з двома надрізами. Для визначення форм її лінійних коливань застосовується теорія R-функцій у поєднанні з методом Релея–Рітца. Коливання пластини при геометрично нелінійному деформуванні розкладаються за знайденими власними формами. В результаті застосування методу Бубнова–Гальоркіна знайдено дискретну систему з трьома степенями вільності, яка досліджується методом багатьох масштабів.

Круглые пластины являются осесимметричными конструкциями. При колебаниях континуальных осесимметричных систем возбуждаются так называемые сопряженные формы колебаний [1]. На поведение сопряженных форм колебаний существенно влияют начальные несовершенства и вид контура пластины, который может отличаться от круглого. Надрезы в круглых пластинах существенно влияют на их линейные и нелинейные колебания. Круглые пластины часто совершают колебания с амплитудами, соизмеримыми с толщиной. В этом случае они описываются геометрически нелинейными моделями.

Рассмотрим колебания круглой пластины с двумя надрезами. Предполагается, что деформирование пластины является геометрически нелинейным. Колебания рассмотрим в цилиндрической системе координат (r, θ, z). Тогда перемещения точек пластины вдоль осей r, θ, z обозначим через u_r, u_θ, u_z. Динамика пластины описывается следующей системой уравнений в частных производных [2]:

$$
\begin{gathered}
u_{r,rr} - \frac{(3-\nu)u_{\theta,\theta}}{2r^2} + \frac{(1+\nu)}{2r}u_{\theta,\theta r} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{r,\theta\theta} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + u_{z,r}u_{z,rr} - \frac{1+\nu}{2r^3}u_{z,\theta}^2 + \\
+ \frac{\nu+1}{2r^2}u_{z,\theta}u_{z,\theta r} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{z,r}u_{z,\theta\theta} + \frac{1-\nu}{2r}u_{z,r}^2 = \mu\frac{1-\nu^2}{Eh}\ddot{u}_r; \\
\frac{1}{r^2}u_{\theta,\theta\theta} + \frac{3-\nu}{2r^2}u_{r,\theta} + \frac{1+\nu}{2r}u_{r,r\theta} + \frac{1-\nu}{2r}u_{\theta,r} - \frac{1-\nu}{2r^2}u_\theta + \frac{1-\nu}{2}u_{\theta,rr} + \frac{1}{r^3}u_{z,\theta}u_{z,\theta\theta} + \\
+ \frac{1+\nu}{2r}u_{z,r}u_{z,r\theta} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{z,r}u_{z,\theta} + \frac{1-\nu}{2r}u_{z,rr}u_{z,\theta} = \mu\ddot{u}_\theta\frac{1-\nu^2}{Eh};
\end{gathered} \tag{1}
$$

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4 u_z = -\mu\frac{1-\nu^2}{Eh}\ddot{u}_z + \frac{1}{r}(ru_{z,r})_{,r}\left(u_{r,r} + \frac{1}{2}u_{z,r}^2 + \frac{\nu}{r}u_r + \frac{\nu}{r}u_{\theta,\theta} + \frac{\nu}{2r^2}u_{z,\theta}^2\right) +$$
$$+ \frac{1-\nu}{r}u_{z,\theta r}\left(u_{\theta,r} + \frac{1}{r}u_{r,\theta} - \frac{1}{r}u_\theta + \frac{1}{r}u_{z,r}u_{z,\theta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^2}u_{z,\theta\theta}\left(\frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_{\theta,\theta} + \frac{1}{2r^2}u_{z,\theta}^2 + \nu u_{r,r} + \frac{\nu}{2}u_{z,r}^2\right),$$

где $\ddot{u}_\theta = \partial^2 u_\theta/\partial t^2$; $u_{z,r} = \partial u_z/\partial r$; μ — масса единицы длины пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластины.

Для дискретизации уравнений колебаний пластины (1) воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. Тогда динамика пластины с надрезами раскладывается по собственным формам линейных колебаний. Для получения этих собственных форм воспользуемся методом Релея–Ритца, в котором используется потенциальная энергия деформирования пластины П. Эта энергия в полярных координатах принимает следующий вид:

$$\Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\int\limits_\Omega\left\{u_{r,r}^2 + \frac{2\nu}{r}\left(u_{\theta,\theta} + u_r\right)u_{r,r} + \frac{1-\nu}{2}\left(u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}u_{r,\theta}\right)^2 +\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{r^2}\left(u_{\theta,\theta} + u_r\right)^2\right\}rdrd\theta + \frac{D}{2}\int\limits_\Omega\left\{u_{z,rr}^2 + 2\nu u_{z,rr}\left(\frac{1}{r^2}u_{z,\theta\theta} + \frac{1}{r}u_{z,r}\right) +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{r^2}u_{z,\theta\theta} + \frac{1}{r}u_{z,r}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{1}{r}u_{z,r\theta} - \frac{1}{r^2}u_{z,\theta}\right)^2\right\}rdrd\theta. \quad (2)$$

Здесь Ω — область пластины на плоскости (r,θ). Кинетическую энергию пластины представим так:

$$T = \frac{\mu}{2}\int\limits_\Omega(\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2)rdrd\theta,$$

где μ — масса единицы длины. Линейные колебания пластины с надрезами имеют вид

$$[u_r(r,\theta,t), u_\theta(r,\theta,t), u_z(r,\theta,t)] = [\overline{u}_r(r,\theta), \overline{u}_\theta(r,\theta), \overline{u}_z(r,\theta)]\sin(pt+\alpha).$$

Соотношения (2) введем в действие по Гамильтону и произведем необходимое интегрирование. В результате получим следующий функционал:

$$S = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\int\limits_\Omega\left\{\overline{u}_{r,r}^2 + \frac{2\nu}{r}(\overline{u}_{\theta,\theta} + \overline{u}_r)\overline{u}_{r,r} + \frac{1}{r^2}(\overline{u}_{\theta,\theta} + \overline{u}_r)^2 +\right.$$
$$\left.+ \frac{1-\nu}{2}\left(\overline{u}_{\theta,r} - \frac{\overline{u}_\theta}{r} + \frac{\overline{u}_{r,\theta}}{r}\right)^2\right\}rdrd\theta + \frac{D}{2}\int\limits_\Omega\left\{\overline{u}_{z,rr}^2 + 2\nu\overline{u}_{z,rr}\left(\frac{1}{r^2}\overline{u}_{z,\theta\theta} + \frac{1}{r}\overline{u}_{z,r}\right) +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{r^2}\overline{u}_{z,\theta\theta} + \frac{1}{r}\overline{u}_{z,r}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{1}{r}\overline{u}_{z,r\theta} - \frac{1}{r^2}\overline{u}_{z,\theta}\right)^2\right\}rdrd\theta -$$
$$- \frac{\mu}{2}p^2\int\limits_\Omega(\overline{u}_r^2 + \overline{u}_\theta^2 + \overline{u}_z^2)rdrd\theta. \quad (3)$$

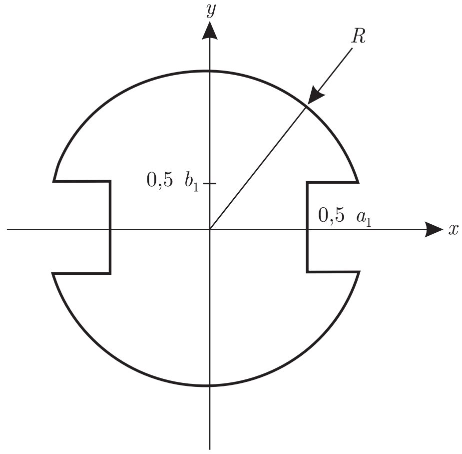


Рис. 1

В дальнейшем рассмотрим защемленную по всему контуру пластину. Границу пластины с надрезами обозначим через $\partial\Omega$. Граничные условия для защемленной пластины представим так: $\overline{u}_z|_{\partial\Omega} = [\partial\overline{u}_z/\partial r]|_{\partial\Omega} = u_\theta|_{\partial\Omega} = u_r|_{\partial\Omega} = 0$. Чтобы удовлетворить граничным условиям, запишем в аналитическом виде уравнение границы области $\partial\Omega$ (рис. 1). Для этого воспользуемся теорией R-функций, которая представлена в [3]. R-функция выбирается так: $\omega(r,\theta) = 0$; $\forall\,(r,\theta) \in \partial\Omega$; $\omega(r,\theta) > 0$; $\forall\,(r,\theta) \in \Omega$. Для круглой пластины с надрезом R-функция принимает следующий вид:

$$\omega(x,y) = (\eta_2 \vee{}_0 \eta_3) \wedge{}_0 \eta_1; \qquad \eta_1 = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2);$$
$$\eta_2 = \frac{1}{a_1}\left(\frac{a_1^2}{4} - x^2\right); \qquad \eta_3 = \frac{1}{b_1}\left(y^2 - \frac{b_1^2}{4}\right),$$

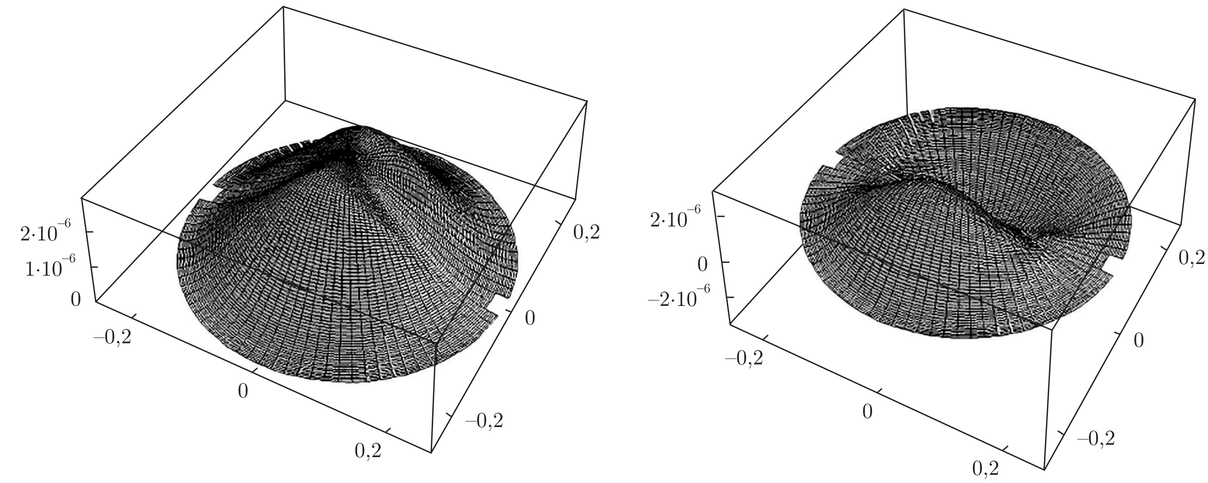
где $\wedge_0$, $\vee_0$ — булевы операции конъюнкции и дизъюнкции [3].

Формы свободных колебаний круглой пластины с надрезами, удовлетворяющие граничным условиям, представим так:

$$\overline{u}_z(r,\theta) = \omega^2(r,\theta)\sum_{k=0}^{m}[Z_k^{(c)}(r)\cos(k\theta) + Z_k^{(s)}(r)\sin(k\theta)];$$
$$\overline{u}_\theta(r,\theta) = \omega(r,\theta)\sum_{k=0}^{m}[\Theta_k^{(c)}(r)\cos(k\theta) + \Theta_k^{(s)}(r)\sin(k\theta)]; \qquad (4)$$
$$\overline{u}_r(r,\theta) = \omega(r,\theta)\sum_{k=0}^{m}[R_k^{(c)}(r)\cos(k\theta) + R_k^{(s)}(r)\sin(k\theta)].$$

Здесь функции $Z_k^{(c)}(r)$, $Z_k^{(s)}(r), \ldots, R_k^{(s)}(r)$ выражены в виде полиномов по r. Соотношения (4) вводятся в (3). После интегрирования по площади пластины Ω получаем функционал

$$S = S(a_0, \ldots, a_l); \qquad l = 6(M+1)(m+1), \qquad (5)$$



а *б*

Рис. 2

где M — степень полиномов; $a_0, \ldots, a_l$ — коэффициенты полиномов (4). Следуя методу Релея–Ритца для минимизации функционала (5), составим систему уравнений: $\partial S/\partial a_j = 0$; $j = 0, \ldots, l$. Из этих уравнений получим проблему собственных значений, которая принимает следующий вид: $(K - p^2 M)X = 0$, где $M = \|m_{ij}\|_{j=\overline{1,l+1}}^{i=\overline{1,l+1}}$; $K = \|k_{ij}\|_{j=\overline{1,l+1}}^{i=\overline{1,l+1}}$; $X = (a_0, \ldots, a_l)$.

Как следует из функционала (3), изгибные линейные колебания пластинки u_z и колебания в плоскости u_r, u_θ являются независимыми. Поэтому их можно исследовать отдельно. Рассмотрим стальную пластинку с такими параметрами: $a_1 = 0{,}46$ м; $b_1 = 0{,}02$ м; $R = 0{,}25$ м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0{,}3$; $\rho = 7800$ кг/м^3; $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м. Для этих значений производился расчет собственных частот и форм колебаний. Первая собственная частота p_1 отвечает зонтичной форме, а вторая и третья частоты p_2, p_3 соответствуют двум сопряженным формам колебаний. Нами производились расчеты с различными порядками полиномов, аппроксимирующих формы колебаний. Было показано, что $M = 8$ достаточно для достижения требуемой точности. Численные значения частот таковы: $p_1 = 1841$ рад/с; $p_2 = 2772$ рад/с; $p_3 = 3350$ рад/с. Вторая и третья собственные формы представлены на рис. 2. Для сравнения приведем собственные частоты для идеально круглой пластины. Первая частота, соответствующая зонтичной форме, — $p_1^* = 1252$ рад/с, а две частоты, соответствующие сопряженным формам, — $p_{2,3} = 2606$ рад/с.

Нелинейные колебания пластины разложим по собственным формам, которые были исследованы выше:

$$u_z = \sum_{i=1}^{3} q_i(t)\overline{u}_z^{(i)}(r,\theta); \qquad u_\theta = \sum_{i=1}^{3} \psi_i(t)\overline{u}_\theta^{(i)}(r,\theta); \qquad u_r = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(t)\overline{u}_r^{(i)}(r,\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_z^{(i)}$, $\overline{u}_\theta^{(i)}$, $\overline{u}_r^{(i)}$ — собственные формы линейных колебаний; $q_1(t), q_2(t), \ldots, \varphi_3(t)$ — обобщенные координаты. Введем соотношения (6) в первые два уравнения системы (1), отбрасывая инерционные слагаемые. Эта операция возможна, так как собственные частоты колебаний пластины в плоскости значительно выше изгибных частот. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $(\varphi_1, \ldots, \psi_3)$, которая принимает следующий вид:

$$[B][\varphi_1\varphi_2\varphi_3\psi_1\psi_2\psi_3]^T = \sum_{l=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} q_l q_\mu [A_{l\mu}^{(1)} A_{l\mu}^{(2)} A_{l\mu}^{(3)} D_{l\mu}^{(1)} D_{l\mu}^{(2)} D_{l\mu}^{(3)}]^T. \tag{7}$$

Здесь $A_{l\mu}^{(i)}$; $D_{l\mu}^{(i)}$ — параметры, формулы для которых не приводятся для краткости; $[B]$ — матрица 6×6, элементы которой также не приводятся для краткости. Решение системы (7) введем в (6). В результате получим:

$$u_\theta = \sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} \alpha_{l\mu}^{(i)} \overline{u}_\theta^{(i)}(r,\theta) q_l q_\mu; \qquad u_r = \sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} \chi_{l\mu}^{(i)} \overline{u}_r^{(i)}(r,\theta) q_l q_\mu, \tag{8}$$

где параметры $\alpha_{l\mu}^{(i)}$, $\chi_{l\mu}^{(i)}$ не описываются для краткости. Теперь (8) введем в третье уравнение системы (1) и воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. В результате получим следующую динамическую систему с тремя степенями свободы:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} G_{il\mu}^{(k)} q_i q_l q_\mu; \qquad k = \overline{1,3}. \tag{9}$$

Параметры $G_{il\mu}^{(k)}$ здесь не приводятся. Приведем систему (9) к следующим безразмерным переменным и параметрам:

$$\varepsilon H_{il\mu}^{(k)} = \frac{h^2}{p_1^2} G_{il\mu}^{(k)}; \qquad (l,\mu) = \overline{1,3}, \qquad \tau = p_1 t; \qquad \xi_i = \frac{q_i}{h}; \qquad i = \overline{1,3},$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$.

Тогда динамическая система (9) принимает вид

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = \varepsilon \sum_{i,l,\mu} H_{il\mu}^{(k)} \xi_i \xi_l \xi_\mu; \qquad k = \overline{1,3}. \tag{10}$$

Как следует из результатов расчета линейных колебаний, описанных выше, в системе (10) наблюдается два внутренних резонанса:

$$\omega_3 = 2\omega_1 + \varepsilon\gamma; \qquad \omega_3 = \omega_2 + \varepsilon\sigma,$$

где γ, σ — параметры расстройки.

Для исследования динамики системы (10) воспользуемся методом многих масштабов. Тогда решение представим так:

$$\xi_k = \xi_{k,0}(T_0, T_1, \ldots) + \varepsilon \xi_{k,1}(T_0, T_1, \ldots) + \cdots, \tag{11}$$

где $T_0 = \tau$; $T_1 = \varepsilon\tau$ — масштабы времени. Введем (11) в (10) и приравняем слагаемые при ε^0 и ε^1. В результате получим

$$\xi_{k,0} = A_k \exp(i\omega_k T_0) + \overline{A}_k \exp(-i\omega_k T_0); \qquad k = \overline{1,3}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{k,1}}{\partial T_0^2} + \omega_k^2 \xi_{k,1} + 2\frac{\partial^2 \xi_{k,0}}{\partial T_0 \partial T_1} = \sum_{j=1}^{3} R_{jk} A_k A_j \overline{A}_j \exp(i\omega_k T_0) +$$
$$+ G_k A_3 A_k \overline{A}_2 \exp[iT_0(\omega_k + \varepsilon\sigma)] + G_k \overline{A}_3 A_k A_2 \exp[iT_0(\omega_k - \varepsilon\sigma)] +$$
$$+ 3H_{kkk}^{(k)} A_k^2 \overline{A}_k \exp(i\omega_k T_0) + P_k A_2^2 \overline{A}_3 \exp[i(\omega_2 - \varepsilon\sigma)] +$$
$$+ F_k A_3^2 \overline{A}_2 \exp[iT_0(\omega_3 + \varepsilon\sigma)] + \text{Н.С.Ч.}; \qquad k = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Здесь Н.С.Ч. — несущественные для дальнейшего анализа слагаемые; параметры R_{jk}; G_k; $H_{kkk}^{(k)}$, P_k, F_k не описываются для краткости; $A_k(T_1)$ — комплексная амплитуда, которая будет определена ниже. Введем (12) в (13) и приравняем нулю секулярные члены. В результате получим систему модуляционных уравнений относительно комплексных переменных (A_1, A_2, A_3), к которой применим следующую замену переменных: $A_j = 0{,}5 a_j \exp(i\psi_j)$; $j = \overline{1,3}$. Получим систему шести модуляционных уравнений относительно действительных переменных. К полученной системе применим такую замену переменных:

$$(a_1, a_2, a_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = (a_1, a_2, a_3, \gamma); \qquad \gamma = \psi_3 - \psi_2 + \sigma T_1. \tag{14}$$

В результате получим систему модуляционных уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_1' = 0; \qquad a_2' = -\frac{P_2}{8\omega_2} a_2^2 a_3 \sin\gamma + \frac{F_2}{8\omega_2} a_3^2 a_2 \sin(2\gamma);\\
&a_3' = \frac{F_3}{8\omega_3} a_3^2 a_2 \sin\gamma - \frac{P_3}{8\omega_3} a_2^2 a_3 \sin(2\gamma);\\
&\gamma' = \sigma + \frac{1}{8\omega_2\omega_3} \sum_j \delta_j a_j^2 + \frac{\delta_*}{8\omega_2\omega_3} a_2 a_3 \cos\gamma + \left(\frac{F_2}{8\omega_2} a_3^2 - \frac{P_3}{8\omega_3} a_2^2\right) \cos(2\gamma) +\\
&\qquad + \frac{3}{8\omega_2} H_{222}^{(2)} a_2^2 - \frac{3}{8\omega_3} H_{333}^{(3)} a_3^2,
\end{aligned} \tag{15}$$

где параметры δ_*, δ_j не описываются для краткости.

Неподвижные точки системы (15) описывают следующие колебания системы (10):

$$\xi_k = a_k \cos(\Omega_k t); \qquad \Omega_k = \omega_k - \varepsilon D_k(a_1, a_2, a_3); \qquad k = \overline{1,3}.$$

В системе автономных уравнений (15) существуют неподвижные точки: $a_1 \neq 0$; $a_2 \neq 0$; $a_3 \neq 0$; $\gamma \neq 0$. Для исследования колебаний, соответствующих этим неподвижным точкам, величина a_2 задается с некоторым шагом. Для каждого значения a_2 величины γ, a_3, a_1 находятся из уравнений:

$$\begin{aligned}
&\cos\gamma = \frac{P_2 a_2}{2F_2 a_3}; \qquad a_3 = a_2 \sqrt{\frac{P_2 P_3}{F_2 F_3}};\\
&a_1^2 = \delta_1^{-1}[-8\sigma\omega_2\omega_3 - a_2^2(\delta_2 + 3\omega_3 H_{222}^{(2)}) + a_3^2(3\omega_2 H_{333}^{(3)} - \delta_3) - \delta_* a_2 a_3 \cos\gamma -\\
&\qquad - (F_2\omega_3 a_3^2 - P_3\omega_2 a_2^2)\cos(2\gamma)].
\end{aligned} \tag{16}$$

Произведем численный анализ колебаний пластины с параметрами, представленными выше. Неподвижные точки (16) соответствуют возбуждению как двух сопряженных форм,

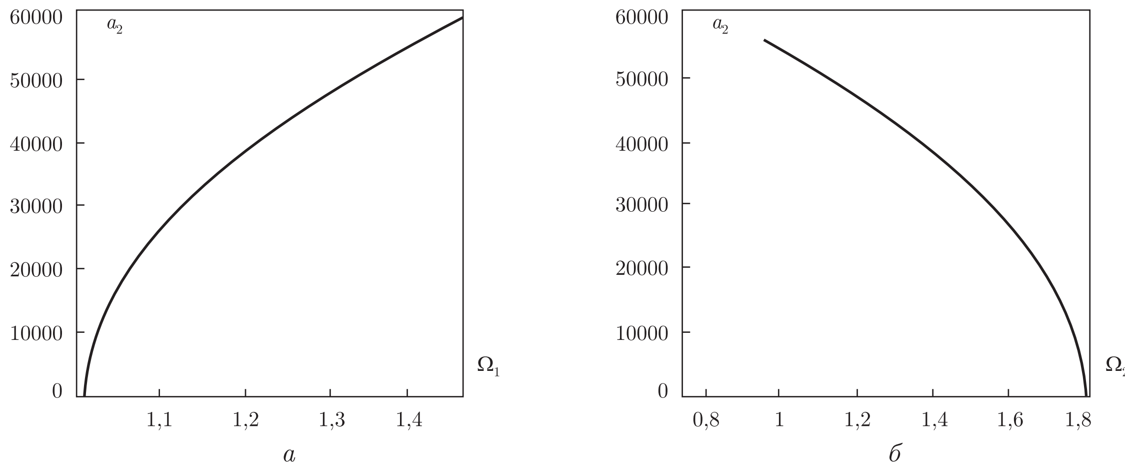


Рис. 3

так и осесимметричной зонтичной формы колебаний. Скелетные кривые, описывающие зависимость частот колебаний Ω_j, $j = \overline{1,2}$, от амплитуды a_2, представлены на рис. 3. Скелетная кривая, описывающая колебания пластины по осесимметричной зонтичной форме, является жесткой, а скелетные кривые, описывающие колебания по двум сопряженным формам, являются мягкими.

Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины в рамках проекта Ф25.1/042.

1. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Вища шк., 1989. – 240 с.
2. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1978. – 344 с.
3. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 550 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.10.2008

K. V. Avramov

Nonlinear interaction of two conjugate modes of oscillations in circular plates with cuts

A circular plate with two cuts is considered. The combination of the R-function and Rayleigh–Ritz methods is used to determine the linear vibrations modes. The vibrations of a plate under a geometrically nonlinear deformation are expanded in the obtained eigenmodes. Using the Bubnov–Galerkin procedure, a system with three degrees of freedom is derived and studied by the multiple scales method.