doi: https://doi.org/10.15407/visn2020.06.043

ЧУГАЙ
Андрій Михайлович —
доктор технічних наук, старший науковий співробітник відділу математичного моделювання та оптимального проєктування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ТРИВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ

За матеріалами наукового повідомлення на засіданні Президії НАН України 11 березня 2020 року

Дослідження присвячено розв'язанню оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл шляхом побудови точних математичних моделей та розроблення підходів, основаних на застосуванні оптимізаційних методів нелінійного програмування і сучасних розв'язувачів. Розроблено конструктивні засоби математичного та комп'ютерного моделювання відношень орієнтованих та неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами, у вигляді нових класів вільних від радикалів Ф-функцій та квазі-Ф-функцій. Побудовано і досліджено базову математичну модель задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями і площинами, та різні її реалізації, які охоплюють широкий клас наукових і прикладних задач упаковки тривимірних тіл. Розроблено загальну методологію розв'язання задач упаковки тривимірних тіл, що допускають одночасно неперервні повороти та трансляції. Запропоновано стратегії, методи і алгоритми розв'язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл з урахуванням технологічних обмежень.

Ключові слова: упаковка, тривимірні тіла, геометричне проєктування, Ф-функції, математичне моделювання, неперервні обертання, нелінійна оптимізація.

Метою роботи є підвищення ефективності розв'язання задач розміщення тривимірних об'єктів шляхом створення методології, що ґрунтується на побудові нових засобів моделювання, математичних моделей, розробленні методів розв'язання з використанням методів нелінійного програмування. Задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів викликають постійний інтерес через велику кількість практичних застосувань у різних сферах людської діяльності. Затребуваність цих задач пояснюється тим, що заміна натурних експериментів комп'ютерним моделюванням дозволяє значно заощаджувати матеріальні ресурси та час. Тому актуальним є розроблення моделей, методів і алгоритмів для розв'язання відповідних задач [1–3].

Незважаючи на промислову та економічну важливість задач упаковки тривимірних тіл, публікацій з цієї тематики помітно менше, ніж для одно- та двовимірних задач упаковки. Однак останніми роками спостерігається швидке зростання кількості досліджень з цієї проблеми, які включають, зокрема, й нові напрями пошуку розв'язків. Складність задач оптимального розміщення об'єктів змушує постійно вдосконалювати методи пошуку оптимальних розв'язків.

Розв'язанню задач розміщення геометричних об'єктів присвячено роботи багатьох вчених з усього світу. Вагомий внесок у їх розвиток зробили такі науковці, як K. Dowsland, J. Bennell, E. Burke, G. Kendall (Велика Британія), V. Milenkovic, K. Daniels (США), J. Oliveira, S. Ferreira, M. Gomes (Португалія), E. Birgin (Бразилія), J. Terno, G. Wascher, G. Scheithauer, A. Bortfeldt (Німеччина), G. Fasano (Італія), R. Alvarez-Valdes (Іспанія), M. Hifi (Франція), S. Imahori (Японія), D. Pisinger (Данія), I. Ikonen, W.D. Biles (Фінляндія) та ін.

В Україні дослідженням задач розміщення геометричних об'єктів займається наукова школа, заснована академіком НАН України В.Л. Рвачовим та членом-кореспондентом НАН України Ю.Г. Стояном. У роботах Ю.Г. Стояна та багатьох його учнів (у тому числі М.І. Гіля, В.П. Путятіна, С.В. Яковлева, С.В. Смєлякова, В.М. Комяк, О.О. Ємця, М.В. Новожилової, Л.Д. Пономаренка, Т.Є. Романової, О.В. Панкратова, В.М. Пацука, Г.М. Яськова) запропоновано метод Ф-функцій для побудови точних моделей задач розміщення та різні підходи до їх розв'язання.

Відомо, що задачі 3D-упаковки є NP-складними, внаслідок чого дуже важко розробити методи, які дозволяють знайти оптимальні розв'язки. Огляд робіт, присвячених розв'язанню тривимірних задач упаковки, свідчить, що дослідники використовують велику кількість різноманітних методів. Ці методи можна розподілити на такі групи: евристичні методи [4–7]; традиційні методи оптимізації [8, 9]; змішані підходи [10, 11]. В них використовують евристики і методи нелінійної оптимізації. Більшість публікацій з упаковки тривимірних тіл присвячено розміщенню куль або прямих паралелепіпедів. Для об'єктів, які мають більш складну просторову форму, використовують різні апроксимаційні підходи, але вони призводять до втрати властивостей задачі у її вихідній постановці. Крім того, переважна більшість робіт з дослідження проблеми тривимірних розміщень не дозволяє враховувати зміну орієнтації об'єктів. Деякі автори враховують тільки дискретні зміни в орієнтації на задані кути.

Як наслідок, використання некоректних апроксимаційних моделей низької точності та наближених евристик не дає можливості знаходити оптимальні розв'язки задач упаковки тривимірних тіл і призводить до звуження можливих галузей практичного застосування цих задач. Оскільки більшість методик розв'язання цього класу задач є наближеними, актуальним є продовження досліджень з розроблення точних засобів розв'язання задач упаковки з метою отримання наближення до глобального екстремуму.

Недоліків апроксимаційних моделей та евристичних методів можна уникнути, використовуючи побудови точних аналітичних моделей, які дозволяють адекватно описувати задачі упаковки в їх вихідній постановці і застосовувати для розв'язання сучасні оптимізаційні методи.

Слід зазначити, що існуючі підходи до розв'язання задач оптимізації останнім часом набули розвитку. Це зумовлено появою сучасних методів нелінійної оптимізації, які значно підвищують надійність, швидкість і точність пошуку локальних екстремумів і можуть бути реалізовані за допомогою зовнішніх потужних розв'язувачів задач нелінійного програмування.

Оскільки найменш дослідженими є задачі упаковки тривимірних тіл, які разом з неперервними трансляціями допускають і неперервні повороти, постає необхідність у розробленні методології математичного та комп'ютерного моделювання процесу оптимізації упаковки тривимірних об'єктів, що допускають неперервні трансляції та повороти.

Незважаючи на різні постановки, всі задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл можуть бути описані за допомогою загальної постановки, яку можна сформулювати так.

Задача. Розмістити задану множину тривимірних тіл O_i, $i \in I_n$ у заданий контейнер Ω з урахуванням обмежень на положення тіл таким чином, щоб метричні характеристики контейнера досягали оптимального значення (рис. 1*а*).

Множина тривимірних тіл O_i, $i \in I_n$ може складатися з таких видів геометричних об'єктів: конгруентні циліндри; тіла, які можна отримати за допомогою сфероконуса; паралелепіпеди та кулі; багатогранники.

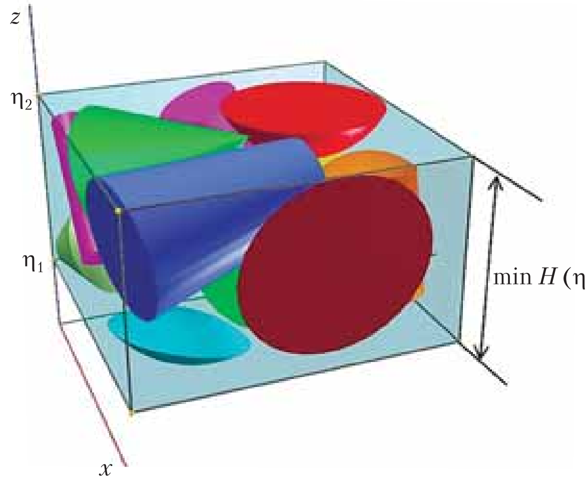
На розміщення тривимірних тіл можуть задаватися такі види обмежень: орієнтація тіл (орієнтовані (заданої незмінної орієнтації) та неорієнтовані (ортогональна зміна орієнтації, довільна зміна орієнтації)); мінімально допустимі відстані; зони заборони на розміщення тіл.

Контейнер Ω, в який необхідно упакувати тривимірні тіла, може приймати такі просторові форми (рис. 1*б*): прямокутний паралелепіпед; куля; пряма призма із зонами заборони у вигляді циліндрів; циліндр із зонами заборони у вигляді прямих прямокутних призм.

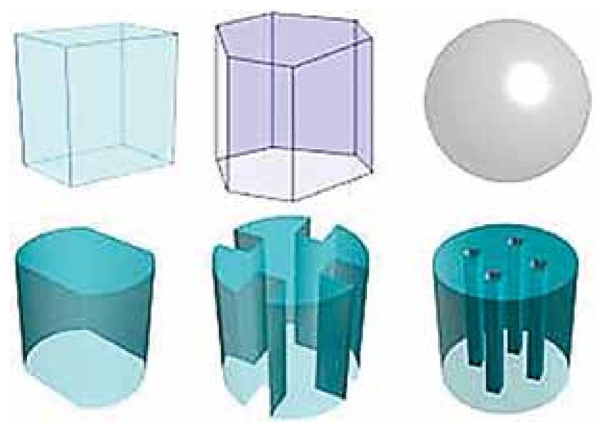
Функція цілі може бути сформульована так: мінімізувати висоту контейнера; мінімізувати об'єм контейнера; максимізувати кількість упакованих тіл у заданий контейнер.

Одна з найважливіших і найскладніших задач комп'ютерного та математичного моделювання задач упаковки тривимірних геометричних тіл — це аналітичний опис взаємодії між об'єктами.

У роботі як засіб математичного моделювання взаємовідносин між тривимірними тілами було обрано метод Ф-функцій [12–14], який на сьогодні визнано найбільш ефективним. Метод Ф-функцій дозволяє представити область допустимих розв'язків задачі розміщення сукупністю систем нерівностей з неперервно-диференційованими функціями, що



а



б

Рис. 1. Постановка загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл: *а* — постановка задачі; *б* — приклади просторових форм контейнера

дає змогу подати поставлену задачу як задачу математичного програмування.

Отже, на основі методу Ф-функцій математична модель загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл може бути представлена у вигляді класичної задачі математичного програмування, а саме:

$$F(X^*) = \underset{X \in W}{extr}\, F(X), \tag{1}$$

$$W = \{X \in R^{7n+3n_{qp}+n_{\Omega}} : \Psi_1(X) \geq 0, \\ \Psi_2(X) \geq 0, \Psi_3(X) \geq 0, \\ \Psi_4(X) \geq 0\} \tag{2}$$

де $F(X)$ — неперервна двічі диференційована функція; n — кількість тривимірних тіл; $n_{qp} = 0{,}5(1-n_q)/n_q$, n_q — кількість тривимірних тіл, для яких у моделі використовуються квазі-Φ-функції; n_Ω — кількість змінних метричних характеристик контейнера Ω; $X = (u_\Omega, u, u_p)$ — вектор змінних задачі; u_Ω — вектор метричних характеристик контейнера Ω; $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ — вектор, що визначає параметри розміщення тривимірних тіл; $u_i = (\nu_i, \Theta_i, g_i)$ — вектор, що визначає параметри розміщення тривимірного тіла $O_i(u_i)$, $i \in I_n$, $\nu_i = (x_i, y_i, z_i)$ — вектор трансляції тривимірного тіла; $\Theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ — вектор кутів повороту тіла $O_i(u_i)$, $i \in I_n$ навколо координатних осей O_x, O_y, O_z відповідно; g_i — коефіцієнт гомотетії тривимірного тіла $O_i(u_i)$; $u_p = (u_{p_{12}}, u_{p_{13}}, \ldots, u_{p_{ij}}, \ldots, u_{p_{qq}})$ — вектор додаткових змінних, що визначають параметри поділяючих площин (якщо використовуються квазі-Φ-функції) для кожної пари тіл $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$, $(i, j) \in I_n$;

$$\Psi_1(X) = \min\{\Phi^{O_i\Omega^*}(X), i \in I_n\},$$

$$\Psi_2(X) = \min\{\Phi^{O_iO_j}(X), (i, j) \in I_n\},$$

$$\Psi_3(X) = \min\{\Phi^{O_iT_k}(X), i \in I_n, k \in I_z\},$$

$\Phi^{O_i\Omega^*}(X)$ — Φ-функція для об'єктів O_i та $\Omega^* = cl(R^3 \setminus \Omega)$ (описує умови знаходження об'єкта в контейнері Ω); $\Phi^{O_iO_j}(X)$ — Φ-функція (або квазі-Φ-функція) для пари об'єктів $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$ (описує умови неперетину або знаходження на допустимій відстані об'єктів $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$); $\Phi^{O_iT_j}(X)$ — Φ-функція для об'єкта $O_i(u_i)$ та зони заборони T_k, $\Psi_4(X) \geq 0$ — система додаткових обмежень (наприклад, обмеження на метричні характеристики області розміщення або тривимірних тіл, що упаковуються).

На основі побудованих Φ-функцій залежно від форми та особливостей характеристик тривимірних тіл, виду контейнера, функції цілі та технологічних обмежень побудовано реалізації загальної математичної моделі для таких задач: упаковка максимальної кількості конгруентних циліндрів у багатозв'язну область; компоновка тривимірних тіл з урахуванням допустимих відстаней та зон заборони; упаковка неорієнтованих паралелепіпедів та куль; упаковка тіл, поверхня яких формується циліндричними, конічними та сферичними поверхнями; упаковка паралелепіпедів з урахуванням їх ортогональних поворотів; упаковка опуклих неорієнтованих гомотетичних багатогранників; упаковка неопуклих неорієнтованих багатогранників.

Для розв'язання задачі розроблено методологію, основними етапами якої є побудова допустимих початкових точок, пошук локально оптимальних розв'язків та пошук наближення до глобального розв'язку.

Для побудови допустимих початкових точок було запропоновано такі методи: метод оптимізації за групами змінних, метод гомотетичних перетворень, метод регулярного розміщення.

Для пошуку локально оптимальних розв'язків розроблено модифікації методу можливих напрямків разом зі стратегією активного набору та методу внутрішньої точки разом з алгоритмом декомпозиції.

Для пошуку наближення до глобального екстремуму запропоновано метод послідовної статистичної оптимізації та метод побудови перспективних початкових точок.

Детальний опис розроблених методів наведено в роботах [13–17].

Ефективність запропонованих моделей і методів підтверджується низкою обчислювальних експериментів, у ході яких було проведено порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами зарубіжних дослідників [18] та отримано поліпшення результатів як за функцією цілі, так і за часом розв'язання.

На рис. 2 наведено приклади розв'язання тестових задач пошуку оптимального розміщення тривимірних тіл.

Можливі сфери практичного застосування задач оптимальної упаковки тривимірних тіл умовно можна класифікувати на такі класи:

• комп'ютерне моделювання у матеріалознавстві, петрографії, порошковій металургії та нанотехнологіях;

• комп'ютерне моделювання задач машинобудування, хімічної промисловості, ядерної енергетики;

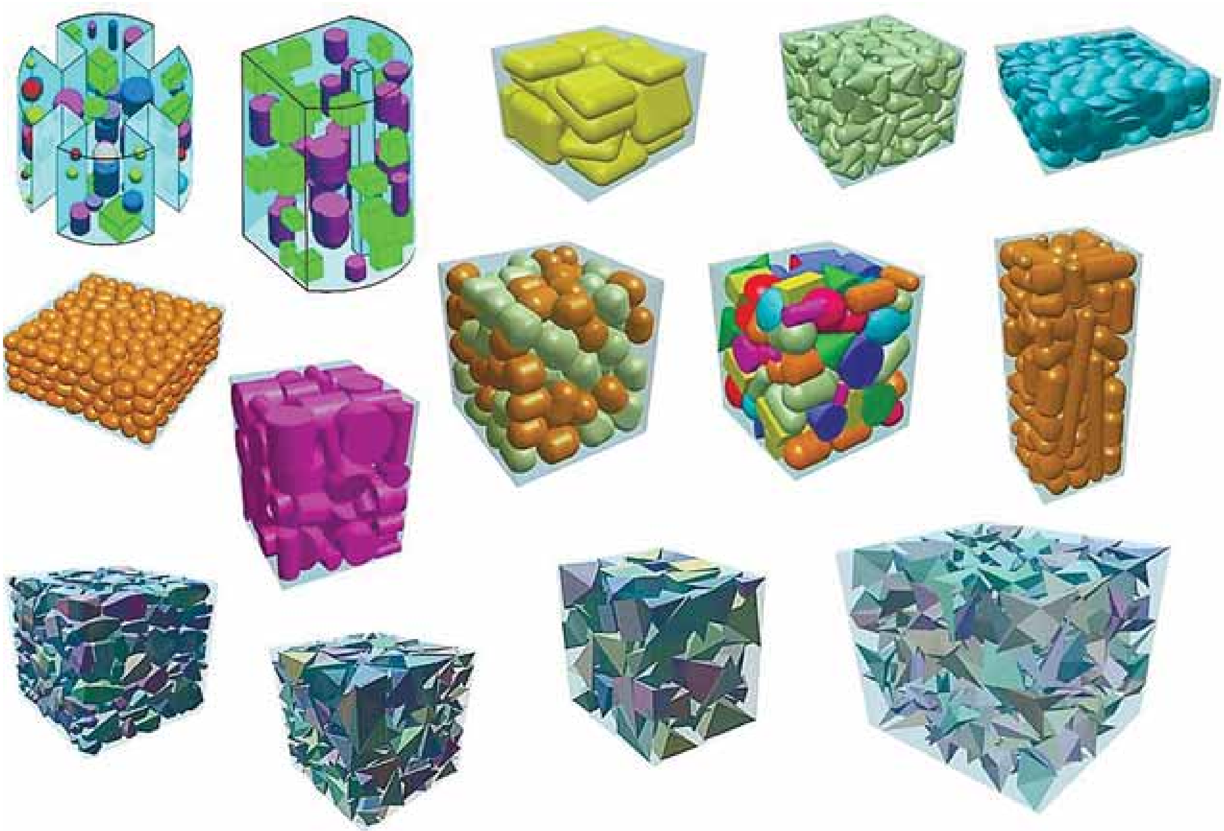


Рис. 2. Приклади розв’язання тестових задач розміщення

• оптимізація процесу 3D-друку для SLS-технології адитивного виробництва;

• оптимізація компоновочних рішень;

• оптимізація перевезення та зберігання вантажів.

Розглянемо детальніше постановки цих задач.

Дослідження властивостей сплаву в порошковій металургії. На процеси спікання, сплаву порошкових матеріалів і синтезу сполук, що утворюються, впливають гранулометричний склад порошків, форма частинок і щільність їх заповнення. Визначити оптимальні значення показників можна, застосувавши комп’ютерне моделювання задач розміщення тривимірних тіл.

Ще одним застосуванням задач розміщення тривимірних тіл може бути задача моделювання структури керна нафтоносної породи, яку називають «цифровий керн». Ця технологія дозволяє визначати фільтраційні можливості гірських порід за допомогою цифрових технологій. Для вивчення зразків породи (керна), вилучених з пробуреної нафтоносної свердловини, дослідники зазвичай використовують лабораторні методи. Такі дослідження тривають кілька місяців, є доволі трудомісткими і в результаті повністю руйнують досить цінний зразок породи. Тому все активніше розвиваються цифрові технології, які дають змогу моделювати гірську породу та її фільтраційні можливості.

Інша сфера застосування — моделювання композитних матеріалів у матеріалознавстві. Для виготовлення деталей за допомогою лазерних 3D-принтерів використовують порошкові композитні матеріали різного хімічного та фазового складу (наприклад, титанові сплави). Метою проведення комп’ютерного моделювання в цьому разі є пошук оптимального заповнення заданого об'єму частинками сферичної і несферичної форми для дослідження механічних та технологічних властивостей виробів, які виготовляють з використанням сучасних технологій, зокрема 3D-друку.

Актуальним завданням на сьогодні є оптимізація процесу 3D-друку, мета якої полягає в максимізації кількості виробів, які можна одночасно виробляти за один запуск 3D-принтера (оптимізація процесу 3D-друку), а також у мінімізації висоти зайнятої частини робочої камери принтера.

Задачі пакування знаходять своє застосування і в ядерній енергетиці. Наприклад, при моделюванні щільності заповнення елементів активної зони ядерного реактора з метою оцінки впливу зовнішніх сил на реактивність реактора.

У хімічній промисловості задачі упаковки тривимірних тіл застосовують у моделюванні заповнення спеціальних контейнерів каталітичними елементами при розробленні технологій очищення газу та дистиляції. Показники технологічної установки безпосередньо пов'язані з розміщенням каталітичних елементів або їх внутрішнім розподілом. Низька каталітична організація всередині реактора означає відсутність однорідності, яка перешкоджає проходженню рідин, що спричинює падіння тиску. Більш щільне навантаження впливає на каталітичні процеси, зменшуючи каналовий ефект.

Ще одним широким напрямом застосувань задач розміщення є задачі компонування. Вони виникають у найрізноманітніших галузях, таких як машинобудування, будівництво, проєктування літальних апаратів тощо. В усіх цих задачах крім геометричних обмежень потрібно враховувати обмеження механічного характеру та вирішувати задачі трасування.

Перспективним напрямом застосування задач розміщення у машинобудуванні є оптимізація топології геометрії промислових виробів з метою економії матеріалів за умови збереження міцнісних характеристик.

Топологічна оптимізація дозволяє змінити стандартну геометрію на геометрію, спеціально адаптовану під конкретну технологію з метою досягнення певного критерію оптимальності зі збереженням або поліпшенням її функціоналу.

Задачі пакування знаходять своє застосування і в сучасній медицині. Так, при плануванні радіопроменевої терапії необхідно розв'язати задачу пошуку найбільш щільного заповнення зони ураження нерегулярної форми кулями різного діаметра. Гамма-промені з цих джерел спроєктовані на спільний центр, створюючи кулю високої дози опромінення. Ключовою геометричною задачею лікування гамма-ножем є розміщення набору куль у 3D-пухлині нерегулярної форми. Кулі, що накладаються, можуть спричинити передозування, тоді як низька щільність заповнення може призвести до недостатньої дози і до її нерівномірного розподілу. Гамма-ніж створює нерівні кулі випромінювання з чотирма різними радіусами (4, 8, 14 і 18 мм). На практиці найчастіше використовують підхід, який полягає в тому, щоб спочатку знайти положення більших куль, а потім розміщувати менші кулі в решті контейнера. Зменшення загальної кількості куль впливає на скорочення часу лікування.

Світовий рівень створених засобів математичного моделювання підтверджено публікаціями у високорейтингових міжнародних журналах та в кількох монографіях.

Висновки. Вирішено важливу наукову проблему створення методології розв'язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл на основі отриманих нових фундаментальних, теоретично обґрунтованих результатів, зокрема з розроблення конструктивних засобів математичного моделювання, побудови нових математичних моделей, створення нових ефективних методів геометричного проєктування.

REFERENCES
[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ]

1. Petrov M.S., Gaidukov V.V., Kadushnikov R.M., Antonov I.V., Nurkanov E.Yu. Numerical method for modelling the microstructure of granular materials. *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*. 2004. **43**(7–8): 330–335. DOI: https://doi.org/10.1023/B:PMMC.0000048126.87171.f9
2. Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. *Powder Techn*. 2016. **301**: 160–168. DOI: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.05.012
3. Verkhoturov M., Petunin A., Verkhoturova G., Danilov K., Kurennov D. The 3D Object Packing Problem into a Parallelepiped Container Based on Discrete-Logical Representation. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. **49**(12): 1–5. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.540
4. Karabulut K.A., Inceoglu M. Hybrid Genetic Algorithm for Packing in 3D with Deepest Bottom Left with Fill Method. In: Yakhno T. (ed.) *Advances in Information Systems*. ADVIS-2004. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3261. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. P. 441–450. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-30198-1_45
5. Cao P., Fan Z., Gao R., Tang J. Complex Housing: Modelling and Optimization Using an Improved Multi-Objective Simulated Annealing Algorithm. *Proc. ASME*. 2016. No. 60563, V02BT03A034. DOI: https://doi.org/10.1115/DETC2016-60563
6. Li G., Zhao F., Zhang R., Du J., Guo C., Zhou Y. Parallel Particle Bee Colony Algorithm Approach to Layout Optimization. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. 2016. **13**(7): 4151–4157. DOI: https://doi.org/10.1166/jctn.2016.5263
7. Torczon V., Trosset M. From evolutionary operation to parallel direct search: Pattern search algorithms for numerical optimization. *Computing Sci. Statistics*. 1998. Vol. 29. P. 396–401.
8. Birgin E.G., Lobato R.D., Martinez J.M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *Journal of Global Optimization*. 2016. **65**: 709–743. DOI: https://doi.org/10.1007/s10898-015-0395-z
9. Joung Y.-K., Noh D.S. Intelligent 3D packing using a grouping algorithm for automotive container engineering. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2014. **1**(2): 140–151. DOI: https://doi.org/10.7315/JCDE.2014.014
10. Fasano G.A. Global optimization point of view to handle non-standard object packing problems. *Journal of Global Optimization*. 2013. **55**(2): 279–299. DOI: https://doi.org/10.1007/s10898-012-9865-8
11. Egeblad J., Nielsen B.K., Brazil M. Translational packing of arbitrary polytopes. *Computational Geometry*. 2009. **42**(4): 269–288. DOI: https://doi.org/10.1007/s10898-012-9865-8
12. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2016. **65** (2): 283–307. DOI: https://doi.org/10.1007/s10898-015-0331-2
13. Stoyan Y.G., Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. *Advances in Decision Sciences*. 2014. DOI: https://doi.org/10.1155/2014/571743
14. Stoyan Y.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Modeling Close Packing of 3D Objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**(2): 296–304. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-016-9826-1
15. Pankratov O., Romanova T., Stoyan Y., Chuhai A. Optimization of packing polyhedra in spherical and cylindrical containers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. **1**(4): 39–47. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.60847
16. Stoyan Y.G., Chugay A.M. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybernetic Systems Analysis*. 2012. **48**: 837–845. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-012-9463-2
17. Stoian Y.E., Chugay A.M., Pankratov A.V., Romanova T.E. Two Approaches to Modeling and Solving the Packing Problem for Convex Polytopes. *Cybernetic Systems Analysis*. 2018. **54**: 585–593. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0059-3
18. Liu X., Liu J., Cao A., Yao Z. HAPE3D — a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*. 2015. **16**(5): 380–390. DOI: https://doi.org/10.1631/FITEE.1400421

Andrey M. Chugay

Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems
of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kharkiv)
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4079-5632

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING
OF OPTIMIZATION 3D PACKING PROBLEM

According to the scientific report at the meeting
of the Presidium of NAS of Ukraine, March 11, 2020

The research is devoted to the solution of optimization problems of packing three-dimensional bodies by construction exact mathematical models and developing approaches based on the use of optimization methods of non-linear programming and modern solvers. Constructive tools of mathematical modeling and computer modeling of the relationship between oriented and non-oriented three-dimensional bodies which boundary is formed by cylindrical, conical, spherical surfaces and planes in the form of new classes of free of radicals Φ-functions and quasi-Φ-functions are developed. Based on the tools of mathematical modeling the basic mathematical model of the problem of optimal packing of three-dimensional bodies whose boundary is formed by cylindrical, conical, spherical surfaces and planes is constructed and investigated. Also various implementations that cover a wide class of scientific and applied problems of packing three-dimensional bodies are constructed. A general methodology for solving the problems of packing three-dimensional bodies that simultaneously allow continuous rotations and translations are developed. Strategies, methods and algorithms for solving optimization problems of packing three-dimensional bodies with account for technological constraints (minimum permissible distances, prohibition zones, the possibility of continuous translations and rotations) are proposed. Based on the proposed tools of mathematical modeling, mathematical models, methods and algorithms, software using parallel computing technology for automatically solving the optimization problems of packing three-dimensional bodies is created. The results obtained can be used to solve problems of optimization of layout solutions, computer modeling in materials science, powder metallurgy and nanotechnologies, optimization of the 3D printing process for SLS additive production technology, and in information and logistics systems that optimize transportation and storage of goods.

Keywords: packing, three-dimensional bodies, geometric projection, Φ-functions, mathematical modeling, continuous rotations, nonlinear optimization.