

---

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.031>

УДК 532.546:628.16

**В.Л. Поляков**

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

E-mail: polyakov\_igm@list.ru

## **Математическое моделирование безотрывного фильтрования водной суспензии со сменой направления**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Я. Олейником*

*Проведено теоретическое исследование последствий изменения направления фильтрационного потока для разделения водной суспензии на скором фильтре. Исходная математическая модель безотрывного нелинейного фильтрования в общем случае сведена к более простой, которая затем решена с использованием стандартного пакета программ математического анализа. Точными методами проанализирован частный случай линейной формы функционального коэффициента фильтрования. На ряде тестовых примеров установлено, что достигаемый за счет переключения фильтра в течение одного фильтроцикла эффект дает возможность продлевать его непрерывную работу на 25 % и более.*

**Ключевые слова:** *фильтрование, скорый фильтр, водная суспензия, моделирование, смена направления, потери напора, осадок.*

Основной причиной неполного использования осветлительного ресурса скорых фильтров часто являются существенная неравномерность распределения осадка по высоте слоя загрузки и, как следствие, усиленный рост потерь напора в нем [1, 2]. Именно чрезмерное расходование механической энергии препятствует применению в практике фильтрования сильносорбирующих материалов. И поэтому ощутимо интенсифицировать работу водоочистного фильтра в принципе возможно, замедляя прирост потерь напора в слое загрузки. Вообще широко используются различные способы интенсификации [3–8]. Здесь точными аналитическими методами изучаются последствия изменения направления потока в загрузке, например, с нисходящего на восходящее или наоборот, в течение фильтроцикла. Тем самым удается, во-первых, задерживать большее количество примеси в загрузке, во-вторых, добиваться более равномерного накопления осадка в ее объеме, а значит снизить энергетические затраты. Технически осуществить подобную операцию (оперативное переключение фильтра) не составляет труда. Практический же смысл она имеет только в тех случаях, ког-

---

Цитування: Поляков В.Л. Математическое моделирование безотрывного фильтрования водной суспензии со сменой направления. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 5. С. 31–41. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.031>

да осадок оказывается устойчивым по отношению к гидродинамическим воздействиям. Тогда для теоретических исследований и последующих технологических расчетов оправдано привлекать современные математические модели безотрывного фильтрования [9–11]. Итак, главной целью данной разработки стал анализ двух стадий фильтрования с потоками водной суспензии разной направленности. В его основе лежит строгое решение математической задачи безотрывного нелинейного фильтрования через изначально загрязненную загрузку. Вторая стадия начинается после смены направления фильтрационного потока. Повышение эффективности фильтра вследствие его переключения оценивалось путем сопоставления с результатами традиционного одностороннего фильтрования.

Фильтрование водной суспензии на первой стадии ( $0 < t < t_*$ ) описывается математической моделью, которая включает уравнения массопереноса, кинетики удаления взвеси, движения, гидравлического сопротивления

$$V \frac{\partial C_1}{\partial z} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \lambda(S_1)C_1, \quad (2)$$

$$V = -k(S_1) \frac{\partial h_1}{\partial z}, \quad (3)$$

$$k(S_1) = k_0 f_k(S_1), \quad (4)$$

а также оператор краевых условий

$$z = 0, \quad C = C_0, \quad (5)$$

$$t = 0, \quad S_1 = S_1^0(z), \quad (6)$$

$$z = L, \quad h_1 = H_d. \quad (7)$$

Здесь  $C_i, S_i$  — объемные концентрации взвешенных и осажденных частиц суспензии на  $i$ -й стадии;  $V$  — скорость фильтрования;  $h_i$  — пьезометрический напор;  $\lambda$  — коэффициент фильтрования;  $k, k_0$  — коэффициенты фильтрации загрязненной и чистой загрузки;  $C_0$  — исходная концентрация дисперсной примеси в суспензии;  $L$  — высота загрузки;  $H_d$  — выходной пьезометрический напор.

Для представления результатов теоретических исследований в обобщенной форме вводятся безразмерные переменные и параметры:  $\bar{C}_i = \frac{C_i}{C_0}$ ,  $\bar{S}_i = \frac{S_i}{n_0 C_0}$ ,  $\bar{S}_i^0 = \frac{S_i^0}{n_0 C_0}$ ,  $\tilde{h} = k_0 \frac{h - H_d}{LV}$ ,

$\bar{t} = \frac{Vt}{n_0 L}$ ,  $\bar{z} = \frac{z}{L}$ ,  $\bar{\lambda} = \frac{L\lambda}{V}$ ,  $\bar{k} = \frac{k}{k_0}$ , где  $n_0$  — пористость чистой загрузки. Тогда исходная модель с учетом известного выражения для  $\bar{k}$  [12, 13] принимает вид

$$\frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial \bar{t}} = \bar{\lambda} \bar{C}_1, \quad (9)$$

$$f_k(\bar{S}_1) \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial \bar{z}} = -1, \quad (10)$$

$$\bar{k} = f_k(\bar{S}_1) = (1 - \bar{\gamma}_c \bar{S}_1)^3, \quad (11)$$

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{C}_1 = 1, \quad (12)$$

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{S}_1 = \bar{S}_1^0(\bar{z}), \quad (13)$$

$$\bar{z} = 1, \quad \tilde{h}_1 = 0, \quad (14)$$

где  $\bar{\gamma}_c$  — относительный осредненный коэффициент состава осадка.

Фильтрование суспензии рассматривается как двухстадийный процесс — вторая стадия начинается после смены направления фильтрационного потока. Соответствующие коррективы, которые при этом следует внести в базовую модель (8)–(14) будут отмечены в дальнейшем.

Строгое решение автономной компоненты (блока) указанной модели, а именно (8), (9), (12), прежде всего выражается неявной зависимостью в интегральной форме

$$\bar{z} = \int_{\bar{S}_1}^{\bar{S}_{10}(\bar{t})} \frac{d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}(\zeta)}, \quad (15)$$

где функция  $\bar{S}_{10}(\bar{t})$  описывает увеличение относительной концентрации  $\bar{S}_1(\bar{t})$  во входном сечении загрузки со временем. В общем она определяется также из уравнения в неявной форме.

$$\bar{t} = \int_0^{\bar{S}_{10}} \frac{d\zeta}{\bar{\lambda}(\zeta)}. \quad (16)$$

Концентрацию  $\bar{C}_1$  при уже известных величинах  $\bar{S}_1(\bar{z}, \bar{t})$ ,  $\bar{S}_{10}(\bar{t})$  следует вычислять по такой формуле:

$$\bar{C}_1(\bar{z}, \bar{t}) = \frac{\bar{S}_1(\bar{z}, \bar{t})}{\bar{S}_{10}(\bar{t})}. \quad (17)$$

Относительные потери напора  $\Delta \bar{h}$  получены путем интегрирования уравнения (10) по высоте загрузки и при  $\bar{k}$  согласно (11) на обеих стадиях должны вычисляться по формуле

$$\Delta \bar{h}(\bar{t}) = \int_0^1 \frac{d\bar{z}}{f_k(\bar{S}_i(\bar{z}, \bar{t}))} = \int_{\bar{S}_{ie}(\bar{t})}^{\bar{S}_{i0}(\bar{t})} \frac{d\bar{S}_i}{\bar{S}_i \bar{\lambda}(\bar{S}_i) (1 - \bar{\gamma}_c \bar{S}_i)^3}. \quad (18)$$

Здесь  $\bar{S}_{ie}$  — относительная объемная концентрация осажденных частиц суспензии в выходном сечении загрузки на  $i$ -й стадии, которую следует находить как функцию от  $\bar{t}$  из уравнения

$$\int_{\bar{S}_{ie}(\bar{t})}^{\bar{S}_{i0}(\bar{t})} \frac{d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}(\zeta)} = 1. \quad (19)$$

Поскольку акцент здесь сделан на эффекте за счет смены направления потока суспензии, то для конкретности принимаются дополнительные допущения относительно  $S^0$  и  $\lambda(S)$ , которые практически не отражаются на оценках указанного эффекта. Так, полагается

$$\bar{\lambda}(\bar{S}_i) = \bar{\lambda}_0(\bar{S}_m - \bar{S}_i)^\chi, \quad (20)$$

где  $\chi$  — эмпирическая константа, которая может принимать любые значения, но выделяется значение 1 ввиду больших возможностей при аналитическом анализе. Используя расчетное уравнение (16) для относительной входной концентрации осажденных частиц, например, легко получить следующую формулу:

$$\bar{S}_{10}(\bar{t}) = \bar{S}_m - [\bar{S}_m^{1-\chi} + \bar{\lambda}_0(1-\chi)\bar{t}]^{\frac{1}{1-\chi}}. \quad (21)$$

Однако, далее наряду с общим подходом, использующим функцию  $\lambda(S)$  произвольного вида, параллельно рассматривается частный с  $\chi = 1$ , что позволяет получать выражения, содержащие исключительно элементарные функции. В частности,

$$\bar{S}_1(\bar{z}, \bar{t}) = \frac{\bar{S}_m e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}} (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}})}{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}} + e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}} - e^{-\bar{\lambda}_0 (\bar{t} + \bar{S}_m \bar{z})}}. \quad (22)$$

Относительная выходная концентрация взвеси будет

$$\bar{C}_{1e}(\bar{t}) = \frac{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m}}{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}} + 1 - e^{-\bar{\lambda}_0 (\bar{S}_m + \bar{t})}}. \quad (23)$$

Вторая стадия начинается в момент переориентации потока суспензии ( $t = t_*$ ), что требует изменения знаков в уравнениях (8), (10), а именно,

$$\frac{\partial \bar{C}_2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (24)$$

$$\bar{k}(\bar{S}_2) \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{z}} = 1. \quad (25)$$

Кроме того, теперь необходимо учитывать начальное для второй стадии загрязнение загрузки, которое в общем случае описывается уравнением

$$\bar{z} = \int_{\bar{S}_2^0}^{\bar{S}_{0*}} \frac{d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}(\zeta)}, \quad (26)$$

а при  $\chi = 1$

$$\bar{S}_2^0(\bar{z}) = \frac{\bar{S}_m \bar{S}_{0*} e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}}}{\bar{S}_m - \bar{S}_{0*} + \bar{S}_{0*} e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}}}, \quad (27)$$

где  $\bar{S}_{0*} = \bar{S}_{10}(\bar{t}_*)$ ,  $\bar{S}_2^0(\bar{z})$  — функция начального ( $\bar{t} = \bar{t}_*$ ) распределения осажденных частиц суспензии. Наконец, условие постоянства содержания примеси на входе в загрузку

переносится на ее нижнюю границу, так что

$$\bar{z} = 1, \quad \bar{C}_2 = 1. \quad (28)$$

Вместе с тем однородное условие первого рода для  $\bar{h}_2$  принимается на новом выходе из загрузки

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{h}_2 = 0. \quad (29)$$

Итак, искомыми функциями на второй стадии являются концентрации  $\bar{C}_2(\bar{z}, \bar{t})$ ,  $\bar{S}_2(\bar{z}, \bar{t})$  и напор  $\bar{h}_2(\bar{z}, \bar{t})$ . Система уравнений первого порядка (2), (24) сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial F(\bar{S}_2)}{\partial \bar{t}} \right) - \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (30)$$

где  $F(\bar{S}_2) = \int \frac{d\bar{S}_2}{\bar{\lambda}(\bar{S}_2)}$ . Интегрирование (30) по  $\bar{t}$  с момента времени  $\bar{t}_*$  дает

$$\frac{\partial F(\bar{S}_2)}{\partial \bar{z}} - \bar{S}_2 = \frac{dF(\bar{S}_2^0)}{d\bar{z}} - \bar{S}_2^0. \quad (31)$$

С учетом (26) из (31) вытекает обыкновенное нелинейное уравнение относительно  $\bar{S}_2$  первого порядка

$$\frac{1}{\bar{\lambda}(\bar{S}_2)} \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \bar{z}} - \bar{S}_2 = -2\bar{S}_2^0(\bar{z}). \quad (32)$$

Если  $\bar{\lambda}(\bar{S})$  имеет произвольный вид, то строго решить поставленную для второй стадии математическую задачу не удастся. Поэтому целесообразно рассматривать уравнение (32) и связанные с ним уравнения (25) и

$$\frac{\partial \bar{C}_2}{\partial \bar{z}} - \bar{\lambda}(\bar{S}_2) \bar{C}_2 = 0 \quad (33)$$

как систему трех обыкновенных уравнений первого порядка и привлечь для ее решения пакеты программ математического анализа (Mathcad, Matlab и пр.). Предварительно указанная система представляется в стандартном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial \bar{z}} &= \bar{\lambda}(\bar{S}_2) \bar{C}_2, \\ \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \bar{z}} &= \bar{\lambda}(\bar{S}_2) \bar{S}_2 - 2\bar{S}_2^0(\bar{z}) \bar{\lambda}(\bar{S}_2), \\ \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{f_k(\bar{S}_2)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\bar{S}_2^0(\bar{z})$  вытекает из (26). Краевой же оператор включает три условия первого рода при  $\bar{z} = 1$  и прежде всего (28), условие для  $\bar{S}_2$

$$\bar{z} = 1, \quad \bar{S}_2 = \bar{S}_{2e}(\bar{t}). \quad (35)$$

Функция концентрации осажденных частиц в новом входном сечении  $\bar{S}_{2e}(\bar{t}) = \bar{S}_2(1, \bar{t})$  находится из уравнения

$$\int_{\bar{S}_{e*}}^{\bar{S}_{2e}} \frac{d\zeta}{\bar{\lambda}(\zeta)} = \bar{t} - \bar{t}_*, \quad (36)$$

где  $\bar{S}_{e*} = \bar{S}_1(1, \bar{t}_*)$ . Теперь задавшись временем  $\bar{t}$ , следует вести расчеты перебирая значения  $\bar{h}_2$  на этой же границе до тех пор, пока не удастся удовлетворить условие (29).

Аналитическое же выражение для  $\bar{S}_2$ , содержащее только элементарные функции, выводится в выделенном случае  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0(\bar{S}_m - \bar{S}_2)$ , а именно,

$$\bar{S}_2(\bar{z}, \bar{t}) = \bar{S}_m - \frac{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}} [\bar{S}_m - \bar{S}_{2e}(\bar{t})] [e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} + (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m}]^2}{[e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}}]^2 \{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m} - \bar{\lambda}_0 I(\bar{z}) [\bar{S}_m - \bar{S}_{2e}(\bar{t})] [e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} + (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m}]^2\}}, \quad (37)$$

где

$$I(\bar{z}) = \int_1^{\bar{z}} \frac{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \eta} d\eta}{[e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} + (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \eta}]^2} = \frac{1}{\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*})} \times \left[ \frac{1}{(1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}} - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}} - \frac{1}{(1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m} - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}} \right], \quad (38)$$

$$\bar{S}_{2e}(\bar{t}) = \bar{S}_m - (\bar{S}_m - \bar{S}_{2e}^0) e^{-\bar{\lambda}_0 (\bar{t} - \bar{t}_*)},$$

причем с учетом (22) зависимость (36) сводится к виду

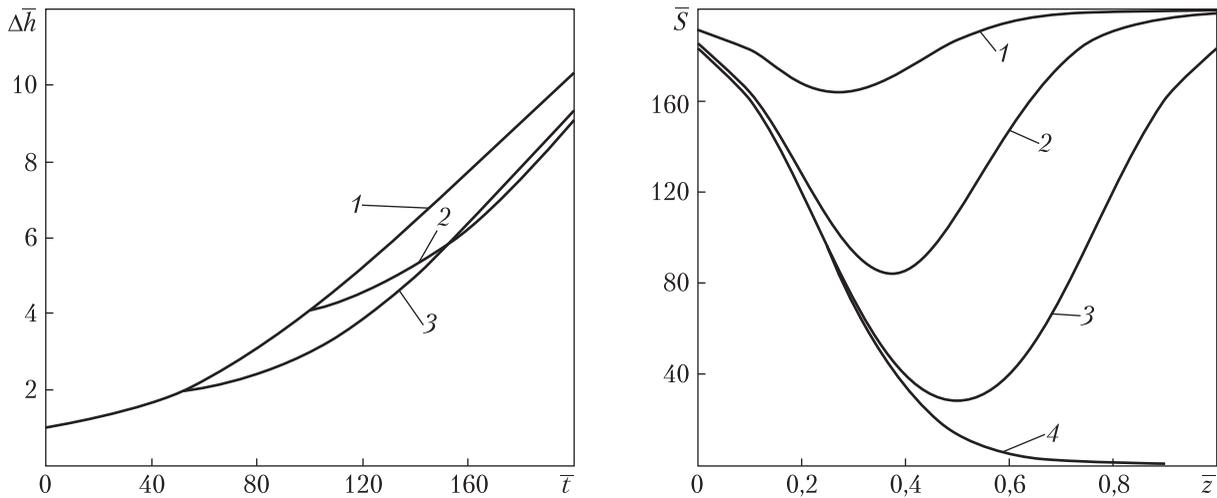
$$\bar{S}_{2e}(\bar{t}) = \bar{S}_m \frac{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}} + e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m} (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*})}{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} + e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m} - e^{-\bar{\lambda}_0 (\bar{t}_* + \bar{S}_m)}}.$$

Концентрация  $\bar{C}_2$  находится из уравнения (33) при условии (28). Громоздкие выкладки для линейной формы  $\bar{\lambda}(\bar{S}_2)$  также опускаются и в итоге получено

$$\bar{C}_2(\bar{z}, \bar{t}) = e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m (1 - \bar{z})} \left[ \frac{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} + (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m}}{e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} + (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m \bar{z}}} \right]^2 \frac{\bar{S}_m - \bar{S}_2(\bar{z}, \bar{t})}{\bar{S}_m - \bar{S}_{2e}(\bar{t})}. \quad (39)$$

Таким образом, рост содержания дисперсной примеси в фильтрате опишется зависимостью

$$\bar{C}_{20}(\bar{t}) = \bar{C}_2(0, \bar{t}) = e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m} [e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*} + (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{t}_*}) e^{-\bar{\lambda}_0 \bar{S}_m}]^2 \frac{\bar{S}_m - \bar{S}_{20}(\bar{t})}{\bar{S}_m - \bar{S}_{2e}(\bar{t})}. \quad (40)$$



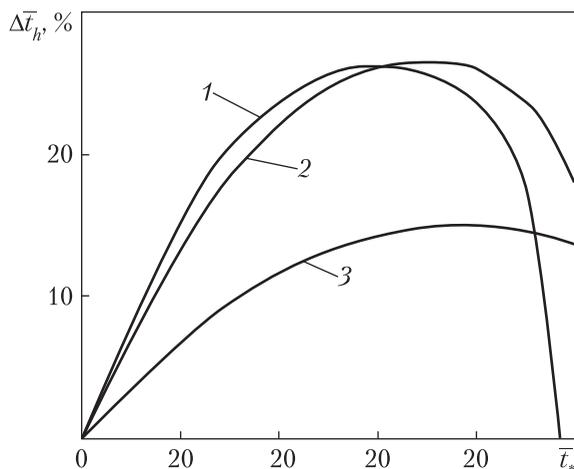
**Рис. 1.** Рост относительных потерь напора в загрузке со временем: 1 –  $\bar{t}_* = 0$  или  $\infty$ ; 2 –  $\bar{t}_* = 100$ ; 3 –  $\bar{t}_* = 50$

**Рис. 2.** Профили относительной объемной концентрации осажденных частиц суспензии: 1 –  $\bar{t} = 200$ ; 2 –  $\bar{t} = 150$ ; 3 –  $\bar{t} = 100$ ; 4 –  $\bar{t} = 50$

И наконец, относительные потери напора на любой момент времени  $\bar{t} > \bar{t}_*$  после установления  $\bar{S}_2(\bar{z}, \bar{t})$  рекомендуется рассчитывать также по формуле (18).

Количественный анализ продолжительного безотрывного фильтрования суспензии на скором фильтре выполнялся в условиях, когда нисходящее фильтрование на протяжении одного рабочего периода сменялось восходящим. При этом принимались линейная сорбционная функция (20) ( $\chi = 1$ ) и значения коэффициента  $\bar{\lambda}_0$  или отдельные, отвечающие умеренной и высокой поглотительной способности фильтрующего материала, или из диапазона от 0,01 до 0,1. Значения других модельных параметров фиксировались, а именно  $\bar{S}_m = 200$ ,  $\bar{\gamma}_c = 0,003$ . Время изменения направленности течения суспензии варьировалось дискретно ( $\bar{t}_* = 50$  и 100) или непрерывно от 0 до 100. Предметом множества расчетов стали относительные величины – потери напора в загрузке, объемные концентрации взвешенных и осажденных частиц, технологические времена.

Прежде всего рассчитывалась выходная концентрация  $\bar{C}_e$  и время защитного действия слоя загрузки. Полученные таким образом данные подтвердили, что при безотрывном фильтровании в отсутствие автокатализа изменение направления потока суспензии не ведет к ухудшению качества ее разделения. Поэтому акцент здесь был сделан на потерях напора и времени достижения ими предельно допустимой величины (во всех примерах  $\Delta \bar{h}_*$  принималась равной 6). На рис.1 представлены кривые, изображающие прирост указанных потерь по мере прогрессирующего кольматажа загрузки при разном времени переключения фильтра, включая для сравнения и  $\bar{t}_* = \infty$  (или 0). Предварительные расчеты выполнялись с привлечением уравнений (15), (16) по формуле (18). Очевидно весьма существенное замедление темпа нарастания гидравлического сопротивления пористого слоя благодаря активному включению в осветлительный процесс ранее удаленного (нижнего) его участка (кривые 2, 3). Причиной подобного замедления является принципиально иной характер распределения осадка по высоте после подачи суспензии в загрузку с противоположной сто-



**Рис. 3.** Зависимость  $\Delta\bar{t}_h(\bar{t}_*)$ : 1 –  $\bar{\lambda}_0 = 0,06$ ; 2 –  $\bar{\lambda}_0 = 0,04$ ; 3 –  $\bar{\lambda}_0 = 0,02$

ской точки зрения и зависит от сорбционных свойств фильтрующей среды и времени его реализации. Предметом расчетов при этом являются технологические времена, а именно, время защитного действия загрузки  $t_p$  и время достижения предельных потерь напора в загрузке  $t_h$  [14, 15]. В данном случае предпочтительнее исходить из результатов расчета времени  $\bar{t}_h$ , которое дает обобщенное представление о степени и характере загрязненности слоя загрузки. В наглядной форме и процентном выражении эффект от перенаправления потока в противоположную сторону демонстрирует рис. 3. Здесь его последствия описываются кривыми зависимости относительного приращения  $\Delta\bar{t}_h = (\bar{t}_{h0} - \bar{t}_{h\infty})/\bar{t}_{h\infty}$  ( $\bar{t}_{h0}, \bar{t}_{h\infty}$  – относительные значения  $\bar{t}_h$  при переключении фильтра в течение и после окончания расчетного периода) от времени  $\bar{t}_*$  при разных значениях  $\bar{\lambda}_0$ . Естественно, что область определения функции  $\Delta\bar{t}_h(\bar{t}_*)$  или, другими словами, диапазон значений  $\bar{t}_*$ , при которых имеет место увеличение  $\bar{t}_h$ , ограничен значениями 0 и  $\bar{t}_{h\infty}$ . В частности, при  $\bar{\lambda}_0 = 0,06$  будет  $\bar{t}_{h\infty} = 96,92$  и  $\Delta\bar{t}_h$  обращается в 0 (кривая 2). В целом, судя по рис. 3, при выбранных исходных данных реально благодаря своевременной смене направления фильтрации ( $\bar{t}_* \approx 50 \dots 85$  в зависимости от значения  $\bar{\lambda}_0$ ) добиваться продления непрерывной работы фильтра примерно на 25 % (кривые 1, 2). В случае слабосорбирующего фильтрующего материала эффект заметно снижается (кривая 3). Наконец, из рис. 3 очевидна важность правильного выбора момента  $t_*$ .

Подводя итоги проведенных здесь теоретических исследований и расчетов, следует подчеркнуть, что переориентация фильтрационного потока в ходе безотрывного фильтрования водной суспензии почти не сказывается на степени ее осветления. Однако благодаря активному вовлечению на втором этапе фильтрования в разделение суспензии удаленной и пока слабозагрязненной части загрузки, рост потерь напора в ней удастся существенно замедлить и, как следствие, соответствующим образом увеличить время достижения их предельно допустимой величины. Особенно отчетливо этот эффект проявляется, если материал загрузки имеет умеренную или высокую сорбирующую способность. По нашим данным возможно таким образом продлевать непрерывную работу фильтра на 25 % и более. И здесь важное значение приобретает время переключения фильтра. Конкретно показано и представляется логичным, что изменять направление течения целесообразно после достаточно

роны. Результаты расчетов профилей  $\bar{S}_2(\bar{z})$  на разные моменты времени, начиная с момента  $\bar{t}_*$ , приведены на рис. 2. Получены они подбором при  $\bar{\lambda}_0 = 0,05$  с использованием (11) и (34) или (37). Вследствие усиленного осадкообразования вблизи нового входа в загрузку указанные профили быстро приобретают форму, обратную колоколообразной с четко выраженным минимумом. При этом осветлительный ресурс загрузки используется существенно полнее, чем при обычной односторонней подаче суспензии.

Результативность предложенного здесь приема интенсификации безотрывного фильтрования удобно оценивать с технологиче-

сильного загрязнения ближней к входу части загрузки (в примерах  $\bar{t}_* \approx 50 \dots 85$ ). При отрывном же фильтровании резкая смена направления потока ведет к скачкообразному ухудшению качества осветления, причем содержание примеси в фильтрате при этом может сразу превысить нормативное значение и затем продолжительное время оставаться недопустимо большим.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Boller M.A., Kavanaugh M.C. Particle characteristics and headloss increase in granular media filtration. *Water Res.* 1995. **29**, № 4. P.1139–1149.
2. Mays D.S., Hunt J.R. Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media. *Environ. Sci. Technol.* 2005. **39**(2). P. 577–584.
3. Грабовский П.А. Фильтрование воды через зернистый слой с убывающей скоростью. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2016. № 8. С. 40–45. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.040>
4. Поляков В.Л. Теоретический анализ плоскорадиального фильтрования. *Вода и экология. Проблемы и решения.* 2015. **2**(62). С. 14–24.
5. Шевчук Е.А., Мамченко А.В., Гончарук В.В. Технология прямоочного фильтрования природных и сточных вод через зернистые загрузки. *Химия и технология воды.* 2005. **27**, № 4. С. 369–383.
6. Chaundry F.H. Theory of declining rate filtration. I. Continuous operation. *J. Environ. Eng. Div. ASCE.* 1987. **113**(4). P. 834–851.
7. Mochanka S.S. Theory of multilayer filtration. *J. Sanit. Eng. Div. ASCE.* 1969. **95**(6). P. 1079–1095.
8. Tobiason J.E., Johnson G.S., Westerhoff P.K., Vigneswaran B. Particle size and chemical effects on contact filtration performance. *J. Environ. Engineering.* 1993. **119**, № 3. P. 520–533.
9. Поляков В.Л., Мартынов С.Ю. Расчет обезжелезивания подземных вод на скором фильтре. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 3. С. 35–45. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.035>
10. Bai R., Tien C. Effect of deposition in deep-bed filtration: determination and search of rate parameters. *J. Colloid. Interface Sci.* 2000. **231**. P. 299–311.
11. Ives K.J. Mathematical models, of deep bed filtration. In: *The Scientific Basis of Filtration*, Ed. Ives K.J. NATO Advanced Study Institutes Series E: Applied Sciences № 2 Noordhoff International, Leyden, 1975.
12. Минц Д.М., Мельцер В.З. Гидравлическое сопротивление зернистой пористой среды в процессе коагуляции. *ДАН СССР.* 1970. **192**, № 2. С. 304–306.
13. Poliakov V., Kravchuk A., Kochetov G., Kravchuk O. Clarification of aqueous suspensions with a high content of suspended solids in rapid sand filters. *Eureca: Physics and Engineering.* 2019. № 1. P. 28–45.
14. Журба М. Водоочистные фильтры с плавающей загрузкой. Москва: РИО ВоГТУ, 2011. 536 с.
15. Поляков В.Л. Теоретический анализ длительности фильтроцикла. *Химия и технология воды.* 2009. **31**, № 6. С. 605–618.

Поступило в редакцию 25.03.2020

#### REFERENCES

1. Boller, M. A. & Kavanaugh, M. C. (1995). Particle characteristics and headloss increase in granular media filtration. *Water Res.*, 29, No.4, pp. 1139-1149.
2. Mays, D. S. & Hunt, J. R. (2005). Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media. *Environ. Sci. Technol.*, 39(2), pp. 577-584.
3. Grabovskiy, P. A. (2016). Water filtration through granular medium at declining rate. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 8, pp. 40-45 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.040>
4. Polyakov, V. L. (2015). Theoretical analysis of axisymmetric filtration. *Woda i ekologiya. Probleme i resheniya*, 2(62), pp. 14-24 (in Russian).
5. Shevchuk, E. A., Mamchenko, A. V. & Goncharuk, V. V. (2005). Technology of direct-flow filtration of natural and waste waters through granular filter media. *Chimiya i tehnologiya vody*, 27, No. 4, pp. 369-383 (in Russian).

6. Chaundry, F. H. (1987). Theory of declining rate filtration. I. Continuous operation. J. Environ. Eng. Div. ASCE, 113(4), pp. 834-851.
7. Mochanka, S. S. (1969). Theory of multilayer filtration. J. Environ. Eng. Div. ASCE, 95(6), pp. 1079-1095.
8. Tobiason, J. E., Johnson, G. S., Westerhoff, P. K. & Vigneswaran, B. (1993). Particle size and chemical effects on contact filtration performance. J. Environ. Engineering, 119, No. 3, pp. 520-533.
9. Polyakov, V. L. & Martynov, S. Yu. (2019). Calculation of iron removal from groundwater at rapid filter. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 3, pp. 35-45 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.035>
10. Bai, R. & Tien, C. (2000). Effect of deposition in deep-bed filtration: determination and search of rate parameters. J. Col. Interface Sci., 231, pp. 299-311.
11. Ives, K. J. (1975). Mathematical models, of deep bed filtration. In: the Scientific Basis of Filtration, Ed. Ives K.J. NATO Advanced Study Institutes Series E: Applied Sciences, No. 2, Leyden: Noordhoff International.
12. Mintz D.M. & Meltzer V.Z. (1970). Hydraulic resistance of granular porous medium in the process of colmatage. DAN SSSR, 192, No. 2, pp. 304-306.
13. Polyakov, V., Kravchuk, A., Kochetov, G. & Kravchuk, O. (2019). Clarification of aqueous suspensions with a high content of suspended solids in rapid sand filters. Eureka: Physics and Engineering, No. 1, pp. 28-45.
14. Zhurba, M. G. (2011). Water filters with floating medium. Moscow: Rio VoSTU.
15. Polyakov, V. L. (2009). Theoretical analysis of filter run duration. *Chimiya i tehnologiya vody*, 31, No. 6, pp. 605-618 (in Russian).

Received 25.03.2020

В.Л. Поляков

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

E-mail: polyakov\_igm@list.ru

#### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗВІДРИВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ФІЛЬТРУВАННЯ ЗІ ЗМІНОЮ НАПРЯМКУ

Виконано теоретичне дослідження наслідків зміни напрямку фільтраційного потоку для розділення водної суспензії на швидкому фільтрі. Вихідна математична модель безвідривного нелінійного фільтрування в загальному випадку зведена до більш простої, яка розв'язується з використанням стандартного пакета програм математичного аналізу. Точними методами проаналізовано частинний випадок лінійної форми функціонального коефіцієнта фільтрування. На ряді тестових прикладів встановлено, що ефект, який досягається за рахунок переключення фільтра протягом одного фільтроцикла, дає можливість подовжити його перервну дію на 25 % і більше.

**Ключові слова:** фільтрування, швидкий фільтр, водна суспензія, моделювання, зміна напрямку, втрати напору, осади.

V.L. Polyakov

Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: polyakov\_igm@list.ru

#### MATHEMATICAL MODELING OF THE UNDETACHABLE FILTRATION OF A WATER SUSPENSION WITH CHANGING THE FLOW DIRECTION

A theoretical study of the clarifying effect at a rapid filter when changing the direction of the suspension flow in its medium during the filter run (descending to ascending or vice versa) is performed. As an instrument for research, mostly exact analytical methods have been used. In the technological process of filtration, two stages are conventionally distinguished – before and after changing the place of a suspension supply. The theoretical analysis is based on a mathematical model of undetachable nonlinear filtration. The composition and amount of a dispersed contamination in the initial suspension are stable, and the filter medium is initially clean (first stage) or already contains a large amount of a deposition mainly near the outlet (second stage). The suspension flow in the contaminated medium obeys the linear law with hydraulic conductivity, which is an empirical function of

the concentration of deposited particles. The exact solution in implicit form of the corresponding mathematical problem is presented in relation to the first stage of filtration, which allows us to specify the physico-chemical picture in the medium layer as far as the beginning of the second stage. An arbitrary form of the functional filtration coefficient is allowed, which requires the use of numerical methods to solve this problem in the second stage. The initial system of ordinary differential equations in the canonical form and the procedure for calculating the most important filtration characteristics based on the data array thus obtained are presented. A special case of a linear form of the filtration coefficient is analyzed separately by strict analytical methods. In a number of examples with typical initial data, the derived calculation equations and dependences are used to establish the effect due to a sharp change in the direction of the suspension flow during one filter run. It is shown that, in this way, the quality of the filtrate is deteriorated minimally. However, due to the active participation in the suspension clarification of the virtually entire volume of the filter medium, it is possible to achieve a more uniform distribution of the deposition in it and, as a result, a very significant reduction in head losses. Thus, based on the calculations of the technological time (the maximum permissible head losses are achieved), there is a real opportunity to extend the continuous operation time of rapid filters by 25 % or more.

The nonlinear problem of transfer and deposition of ferric iron in the layer of a fast filter bed is formulated with regard for the oxidation of ferrous iron and definitely solved. The equations for the calculation of changes over time and over the height of the bed in the concentrations of suspended and deposited particles of iron hydroxide and the increase of a head loss in it are constructed. The forecast of the concentration of iron hydroxide in the filtrate and deposited form is done on examples. The possibility of a reliable substantiation of technological and constructive parameters based on the obtained solutions is shown.

**Keywords:** *filtration, rapid filter, suspension flow, modeling, direction change, head losses, deposition.*